

Sensibilité des caractéristiques dynamiques d'une poutre rotative encastrée uniforme avec une méthode de perturbation

Ferhat BEKHOUCHA¹, Said RECHAK¹, Jean-Marc CADOU²

¹ Ecole Nationale Polytechnique, Alger, Algérie, {ferhat.bekhoucha, said.rechak}@g.enp.edu.dz

² Institut de recherche Dupuy-de-Lôme, FRE CNRS 3744, IRDL, 56100 Lorient, France, jean-marc.cadou@univ-ubs.fr

Résumé — Dans cette communication, les vibrations libres d'une poutre en mouvement de rotation à section uniforme sont étudiées en utilisant la méthode asymptotique numérique. Les équations du mouvement de la poutre dans son plan de rotation sont déterminées en utilisant la méthode de Lagrange, puis ensuite transformées en un problème gyroscopique linéaire aux valeurs propres. Une méthode est proposée pour la résolution du système gyroscopique et permet de transformer le problème en une forme standard comportant des matrices symétriques réelles. Les courbes d'évolution des fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation sont déterminées.

Mots clés — Vibration libre, re-analyse, vitesse de rotation critique, bifurcation de Hopf.

1 Introduction

L'analyse vibratoire des poutres en rotation est d'une grande importance dans la conception de nombreux systèmes mécaniques ainsi que pour l'évaluation de leur performance. On peut citer par exemple, les aubes de turbomachines, les pales des hélicoptères ou d'éoliennes mais également les panneaux flexibles des satellites. Des modèles dynamiques simplifiés sont utilisés par de nombreux chercheurs sous certaines hypothèses restrictives. Une étude conséquente de ces modèles peut être trouvée dans [1]. Dans ces études, l'évolution de ces fréquences naturelles en fonction de la vitesse de rotation sont généralement présentées sous forme de tables. Des expressions approchées de ces fréquences naturelles sont présentées dans [2, 6]; avec une erreur maximale de l'ordre de 0,1% [6]. Ces formules semi-empiriques sont développées afin de faciliter la conception des poutres rotatives et éviter ainsi l'utilisation de méthode d'interpolation. A l'origine, les fréquences naturelles et les modes propres sont solutions de problèmes du type valeurs/vecteurs propres. Des techniques de ré-analyse peuvent alors être utilisées pour évaluer les fréquences naturelles à différentes vitesses de rotation, telle que par exemple la méthode combinée d'approximation [4]. Pour améliorer cette méthode, qui est moins appropriée pour les grandes perturbations, des méthodes d'approximations combinées modifiées sont discutés dans [8]. D'autres méthodes de réanalyse ont été mises au point, comme dans [7], où une méthode de perturbation basée sur un développement asymptotique des valeurs propres et des vecteurs propres est associée à une technique d'homotopie.

Dans cette étude, une analyse des caractéristiques dynamiques d'une poutre encastrée rotative d'Euler-Bernoulli est réalisée en utilisant la méthode asymptotique numérique (MAN). L'objectif est de suivre l'effet de la vitesse de rotation, prise ici comme paramètre de perturbation, sur les fréquences naturelles et les modes du faisceau tournant. Les équations d'équilibre sont obtenues en utilisant le formalisme de Lagrange avec un ensemble de variables hybrides. Elles sont basées sur les hypothèses que la poutre est isotrope avec une section transversale uniforme et que les déflexions sont linéaires élastiques. La déformation axiale à l'état stationnaire est également considérée petite et par conséquent des vitesses de rotation critiques peuvent apparaître [3]. Cette instabilité est généralement décrite comme étant seulement liée au premier mode de flexion dans le plan. Dans ce travail, nous montrons qu'il existe d'autres vitesses de rotation critiques liées aux modes supérieurs de flexion et même d'extension. Le problème aux valeurs propres est transformé en une fonctionnelle, qui peut être traitée par la MAN. Une méthode, différente de celle développée dans [5, 9], est proposée pour la résolution du problème aux valeurs propres lié à un système gyroscopique linéaire. Cette nouvelle méthode transforme le problème d'origine en un système augmenté permettant d'avoir des matrices symétriques, conduisant par conséquent, à des valeurs

propres réelles et des vecteurs propres réels.

2 Equations d'équilibre

La Figure 1 montre une poutre Euler-Bernoulli de longueur L fixée sur un moyeu de rayon r rotatif avec une vitesse de rotation stationnaire Ω . Le matériau est considéré homogène et isotrope. Dans ce papier, les équations linéarisées du mouvement des vibrations libres d'une poutre rotative uniforme et encadrée sont dérivées en utilisant les équations de Lagrange. Lorsqu'un point P_0 de la ligne moyenne se déplace vers P , les déformations peuvent être décrites en fonction des coordonnées hybrides, une variable cartésienne v utilisée avec une variable non-cartésienne s , l'élongation de la longueur d'arc de la ligne moyenne, qui est liée aux coordonnées cartésiennes par :

$$u = s - \frac{1}{2} \int_0^x (v')^2 d\sigma \quad (1)$$

où $(')$ désigne la dérivée par rapport à la variable muette σ . En utilisant la méthode de Rayleigh-Ritz, les variables hybrides sont exprimées comme suit :

$$s(x, t) = \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{1i}(x) q_{1i}(t), \quad v(x, t) = \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{2i}(x) q_{2i}(t) \quad (2)$$

où, ϕ_{1i} and ϕ_{2i} sont les modes choisis dans l'approximation de Rayleigh-Ritz, q_{1i} et q_{2i} sont les coordonnées généralisées. Le paramètre μ est le nombre de modes, qui est identique pour les variables s et v .

Basée sur les hypothèses énoncées précédemment, l'énergie cinétique est donnée par

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \mathbf{v}_P^T \cdot \mathbf{v}_P dx = \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \left\{ [\dot{u} - \Omega v]^2 + [\dot{v} + \Omega(r + x + u)]^2 \right\} dx \quad (3)$$

où \mathbf{v}_P est le vecteur vitesse au point P :

$$\mathbf{v}_P = (\dot{u} - \Omega v) \mathbf{i} + [\dot{v} + \Omega(r + x + u)] \mathbf{j} \quad (4)$$

En considérant une théorie des déflexions linéaires, l'énergie potentielle de la poutre rotative peut être exprimée par :

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_0^L \left[EA s'^2 + EI_z v''^2 \right] dx \quad (5)$$

En injectant l'équation (3) dans les équations (4, 5), les équations de Lagrange pour les vibrations libres sont données par

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, \mu \quad (6)$$

En négligeant les termes non-linéaires dans les expressions des dérivées partielles de \mathcal{T} et \mathcal{U} , on obtient les équations linéarisées du mouvement :

$$\sum_{j=1}^{\mu} \left[M_{ij}^{11} \ddot{q}_{1j} - 2\Omega M_{ij}^{12} \dot{q}_{2j} + (K_{ij}^S - \Omega^2 M_{ij}^{11}) q_{1j} \right] = \Omega^2 P_{1i} \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^{\mu} \left[M_{ij}^{22} \ddot{q}_{2j} + 2\Omega M_{ij}^{21} \dot{q}_{1j} + \{ K_{ij}^B + \Omega^2 (M_{ij}^R - M_{ij}^{22}) \} q_{2j} \right] = 0 \quad (8)$$

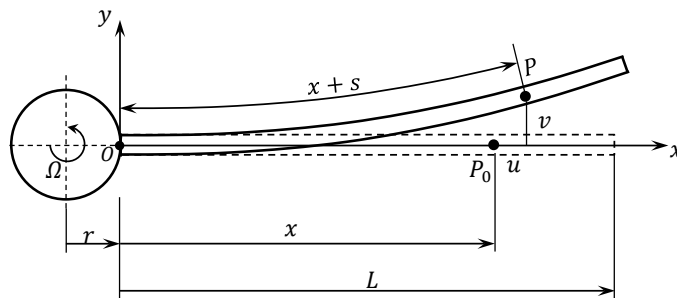


FIGURE 1 – Poutre rotative encadrée uniforme d'Euler-Bernoulli.

pour $i = 1, 2, \dots, \mu$, avec

$$\begin{aligned} M_{ij}^{mn} &= \int_0^L \rho A \phi_{mi} \phi_{nj} dx, & K_{ij}^S &= \int_0^L EA \phi'_{1i} \phi'_{1j} dx \\ K_{ij}^B &= \int_0^L EI_z \phi''_{2i} \phi''_{2j} dx, & P_{1i} &= \int_0^L \rho A (r+x) \phi_{1i} dx \\ M_{ij}^R &= \int_0^L \rho A \left[r(L-x) + \frac{1}{2}(L^2-x^2) \right] \phi'_{2i} \phi'_{2j} dx \end{aligned} \quad (9)$$

Déformation axiale stationnaire

A l'état stationnaire, une poutre uniforme rotative est soumise seulement à la force centrifuge, qui est variable le long de la poutre. Dans cette situation, toutes les variables sont indépendantes du temps ($\dot{s}(x,t) = \ddot{s}(x,t) = 0$), $s(x) = u(x)$, et $v(x) = 0$. Ainsi, l'équation (7) sans approximation et en utilisant une intégration par partie se réduit à

$$Eu'' = -\rho\Omega^2(r+x+u) \quad (10)$$

La solution de l'équation différentielle (10), avec les conditions aux limites $u(0) = 0$ and $u'(L) = 0$, est donnée par :

$$u(x) = \frac{L + \eta r \sin(\eta)}{\eta \cos(\eta)} \sin\left(\frac{\eta x}{L}\right) + r \cos\left(\frac{\eta x}{L}\right) - (r+x) \quad (11)$$

où, η est un paramètre adimensionnel défini par : $\eta^2 = \rho L^2 \Omega^2 / EA^2$. L'expression (11) est singulière à ($\eta = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k = 0, 1, \dots$). Le premier point singulier est défini dans la littérature [11, 12] et il correspond à la première vitesse critique. Dans la section présentant les résultats (Section 5), plusieurs autres points singuliers seront identifiés.

Variables adimensionnelles

La poutre rotative étudiée dans ce papier est uniforme avec une vitesse de rotation stationnaire. Pour faciliter la comparaison, il est intéressant de transformer les équations (9, 10) sous une forme adimensionnelle. Pour cela, plusieurs variables adimensionnelles et paramètres sont introduits :

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{t}{T}, & \xi &= \frac{x}{L}, & \gamma &= \Omega T, & T &= \sqrt{\frac{\rho L^4}{EI}} \\ \bar{q}_{ij} &= \frac{q_{ij}}{L}, & \delta &= \frac{r}{L}, & \beta &= \sqrt{\frac{AL^2}{I}}, & \eta &= \frac{\gamma}{\beta} \end{aligned} \quad (12)$$

L'introduction de ces variables adimensionnelles dans les équations (7, 8) permet d'obtenir les équations discrétisées d'un problème de vibrations libres autour d'une position stationnaire

$$\sum_{j=1}^{\mu} \left[\bar{M}_{ij}^{11} \ddot{\bar{q}}_{1j} - 2\gamma \bar{M}_{ij}^{12} \dot{\bar{q}}_{2j} + (\beta^2 \bar{K}_{ij}^S - \gamma^2 \bar{M}_{ij}^{11}) \bar{q}_{1j} \right] = 0 \quad (13)$$

$$\sum_{j=1}^{\mu} \left[\bar{M}_{ij}^{22} \ddot{\bar{q}}_{2j} + 2\gamma \bar{M}_{ij}^{21} \dot{\bar{q}}_{1j} + \{ \bar{K}_{ij}^B + \gamma^2 (\bar{M}_{ij}^R - \bar{M}_{ij}^{22}) \} \bar{q}_{2j} \right] = 0 \quad (14)$$

pour $i = 1, 2, \dots, \mu$, où

$$\begin{aligned} \bar{M}_{ij}^{mn} &= \int_0^1 \psi_{mi} \psi_{nj} d\xi, & \bar{K}_{ij}^S &= \int_0^1 \psi'_{1i} \psi'_{1j} d\xi \\ \bar{K}_{ij}^B &= \int_0^1 \psi''_{2i} \psi''_{2j} d\xi, & \bar{M}_{ij}^R &= \int_0^1 \left[\delta(1-\xi) + \frac{1}{2}(1-\xi^2) \right] \psi'_{ni} \psi'_{nj} d\xi \end{aligned} \quad (15)$$

où, ψ_{ij} sont les modes normés en fonction de ξ (variable d'espace adimensionnelle) et qui ont les mêmes fonctionnelles que ϕ_{ij} . Le symbole $(\dot{})$ indique la différentiation par rapport au temps τ , (\prime) indique la

différentiation spatiale par rapport à ξ , et β est le taux de l'élongement de la poutre.

Ces équations du mouvement peuvent être exprimées sous forme matricielle par une seule équation :

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = 0 \quad (16)$$

où, le vecteur q_i est de dimension 4μ et correspond à $[\bar{q}_{1i}, \bar{q}_{2i}]^T$. Les matrices précédentes sont définies par

$$M = \begin{bmatrix} M^{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M^{22} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -2\gamma M^{12} \\ 2\gamma M^{21} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$K = \begin{bmatrix} \beta^2 K^S - \gamma^2 M^{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & K^B + \gamma^2 (M^R - M^{22}) \end{bmatrix} \quad (18)$$

Les matrices M^{mn} , K^S , K^B et M^R sont définies dans l'équation (15) par \bar{M}_{ij}^{mn} , \bar{K}_{ij}^S , \bar{K}_{ij}^B et \bar{M}_{ij}^R , respectivement.

3 Problème de valeurs/vecteurs propres

L'équation (16) est du type système gyroscopique linéaire puisque la matrice C est asymétrique. En conséquence, la solution recherchée (valeurs/vecteurs propres) est complexe et l'équation (16) doit être écrite sous forme d'espace d'état

$$I\dot{x} = -Gx \quad (19)$$

où, $x(\tau) = [q(\tau), \dot{q}(\tau)]^T$ est un vecteur de dimension $2(2\mu) = 4\mu$. Les matrices I et G , sont de dimension $4\mu \times 4\mu$ et sont exprimées par

$$I = \begin{bmatrix} K & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -K \\ K & C \end{bmatrix} \quad (20)$$

où $\mathbf{0}$ est une matrice nulle de dimension 4μ . La solution de l'équation (19), est choisie sous une forme harmonique, $x(\tau) = xe^{\sigma\tau}$, où le vecteur propre x de dimension 4μ est un vecteur complexe et la valeur propre σ est un nombre complexe. En introduisant l'expression de $x(\tau)$ dans l'équation (19), le problème aux valeurs propres suivant est obtenu :

$$\sigma Ix = -Gx \quad (21)$$

Comme la matrice I est symétrique et que la matrice G est anti-symétrique, la solution recherchée est composée de 2μ paires de nombres complexes conjugués et purement imaginaires λ_k ainsi que de 2μ paires de vecteurs complexes conjugués x_k et \bar{x}_k ($k = 1, 2, \dots, 2\mu$) de la forme

$$\sigma_k = \pm i\omega_k, \quad x_k = y_k + iz_k \quad \text{et} \quad \bar{x}_k = y_k - iz_k \quad (22)$$

Il est plus aisé, lors de la résolution du problème à l'aide de la MAN, d'opérer avec des quantités réelles. Pour cela, une méthode est proposée dans [5] pourrait être utilisée. Cette méthode consiste à transformer le problème initial en introduisant une nouvelle matrice symétrique, obtenue en fonction de l'inversion de I , et qui est définie par ($\mathbb{K} = G^T I^{-1} G$). Cette méthode n'est pas appropriée pour l'algorithme de continuation proposé dans la section 4. Dans cette étude, nous proposons une nouvelle méthode basée sur un système augmenté. Pour se faire, on insère les expressions (22) dans l'équation (21), et on sépare les parties réelles et les parties imaginaires pour obtenir les systèmes matriciels suivant :

$$i\omega_k I(y_k + iz_k) = -G(y_k + iz_k) \quad (23)$$

$$-i\omega_k I(y_k - iz_k) = -G(y_k - iz_k) \quad (24)$$

La séparation des parties réelles et imaginaires dans l'équation (23), en considérant le cas $i\omega_k$, donne deux équations avec des quantités réelles :

$$\begin{cases} \omega_k I y_k = -G z_k \\ \omega_k I z_k = G y_k \end{cases} \quad (25)$$

L'équation (25) peut être écrite sous la forme matricielle

$$\omega_k \widehat{\mathbf{I}} \begin{Bmatrix} y_k \\ z_k \end{Bmatrix} = \widehat{\mathbf{G}} \begin{Bmatrix} y_k \\ z_k \end{Bmatrix} \quad (26)$$

où les matrices $\widehat{\mathbf{I}}$ et $\widehat{\mathbf{G}}$ sont de dimension $8\mu \times 8\mu$ et sont exprimées par :

$$\widehat{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{G} \\ \mathbf{G} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (27)$$

Pour le cas $-i\omega$ le vecteur propre correspondant est $[-z_k, y_k]^T$. Les deux cas de figure peuvent être représentés sans l'indice k par l'expression généralisée :

$$\lambda \widehat{\mathbf{I}} U = \widehat{\mathbf{G}} U \quad (28)$$

Dans ce nouveaux problème aux valeurs propres, les fréquences naturelles ($\lambda = \omega_k$, associées aux modes k) sont répétées et les vecteurs propres correspondants, définis par $U = [y_k, z_k]^T$ et $U = [-z_k, y_k]^T$, sont orthogonaux. Ainsi, les deux parties ; réelles y_k et imaginaire z_k sont déterminées plus simplement que dans [5, 9], du fait que le problème aux valeurs propres initial (21) est transformé en un problème aux valeurs propres ayant des solutions réelles Eq.(28). Pour étudier la variation des fréquences naturelles et les modes de vibrations en fonction de la vitesse de rotation, nous proposons d'utiliser la MAN. Pour chaque vitesse de rotation, la poutre rotative a un spectre de fréquences et de modes propres. Ainsi la fonctionnelle étudiée a deux variables, la valeur propre et le mode propre, qui évoluent en fonction de la vitesse de rotation γ . Pour faciliter la phase de continuation, la fonctionnelle doit être exprimée explicitement en fonction de cette vitesse de rotation. A partir des équations (17, 18, 20,27), les matrices $\widehat{\mathbf{I}}$ et $\widehat{\mathbf{G}}$ peuvent être re-arrangées sous la forme :

$$\widehat{\mathbf{I}} = \widehat{\mathbf{I}}_1 + \gamma^2 \widehat{\mathbf{I}}_2 \quad (29)$$

$$\widehat{\mathbf{G}} = \widehat{\mathbf{G}}_1 + \gamma \widehat{\mathbf{G}}_2 + \gamma^2 \widehat{\mathbf{G}}_3 \quad (30)$$

avec,

$$\widehat{\mathbf{I}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_i \end{bmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{G}}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{G}_j \\ \mathbf{G}_j & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (31)$$

pour $i = 1, 2$ and $j = 1, 2, 3$, et sont définies par

$$\mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} \beta^2 \mathbf{K}^S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^B \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^{R2} - \mathbf{M}^{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -2\mathbf{M}^{12} \\ 2\mathbf{M}^{21} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{K}_1 \\ \mathbf{K}_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{K}_2 \\ \mathbf{K}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (34)$$

Ainsi, le problème aux valeurs propres, qui sera résolu avec la MAN est donné par

$$\lambda(\widehat{\mathbf{I}}_1 + \gamma^2 \widehat{\mathbf{I}}_2)U - (\widehat{\mathbf{G}}_1 + \gamma \widehat{\mathbf{G}}_2 + \gamma^2 \widehat{\mathbf{G}}_3)U = \mathbf{0} \quad (35)$$

où, le couple (U, λ) , i.e. U est le vecteur propre augmenté de dimension 8μ et la valeur propre λ , sont réels et correspondent à la vitesse de rotation γ .

4 Méthode asymptotique numérique

A partir de l'équation (35), le problème à résoudre est défini par une fonctionnelle de dimension 8μ

$$\mathcal{F}(U, \lambda, \gamma) = \lambda(\widehat{\mathbf{I}}_1 + \gamma^2 \widehat{\mathbf{I}}_2)U - (\widehat{\mathbf{G}}_1 + \gamma \widehat{\mathbf{G}}_2 + \gamma^2 \widehat{\mathbf{G}}_3)U = 0 \quad (36)$$

Les inconnues U et λ , sont cherchées sous forme d'une série polynomiale d'un paramètre de chemin a :

$$U(a) = U_0 + \sum_{j=1}^n a^j U_j, \quad \lambda(a) = \lambda_0 + \sum_{j=1}^n a^j \lambda_j \quad (37)$$

où, U_j et λ_j sont les nouvelles inconnues à déterminer, n est l'ordre de troncature et $(U_0, \lambda_0, \gamma_0)$ est le point initial.

La variation de la vitesse de rotation, γ , est choisie comme paramètre de chemin, $a = \Delta\gamma$:

$$\gamma = \gamma_0 + a \quad (38)$$

Pour résoudre ce problème, deux équations supplémentaires sont ajoutées

$$U^T \hat{\mathbf{I}}U = U^T (\hat{\mathbf{I}}\mathbf{1} + \gamma^2 \hat{\mathbf{I}}\mathbf{2})U = 1 \quad (39)$$

$$\bar{U}_0^T \hat{\mathbf{I}}U = \bar{U}_0^T (\hat{\mathbf{I}}\mathbf{1} + \gamma^2 \hat{\mathbf{I}}\mathbf{2})U = 0 \quad (40)$$

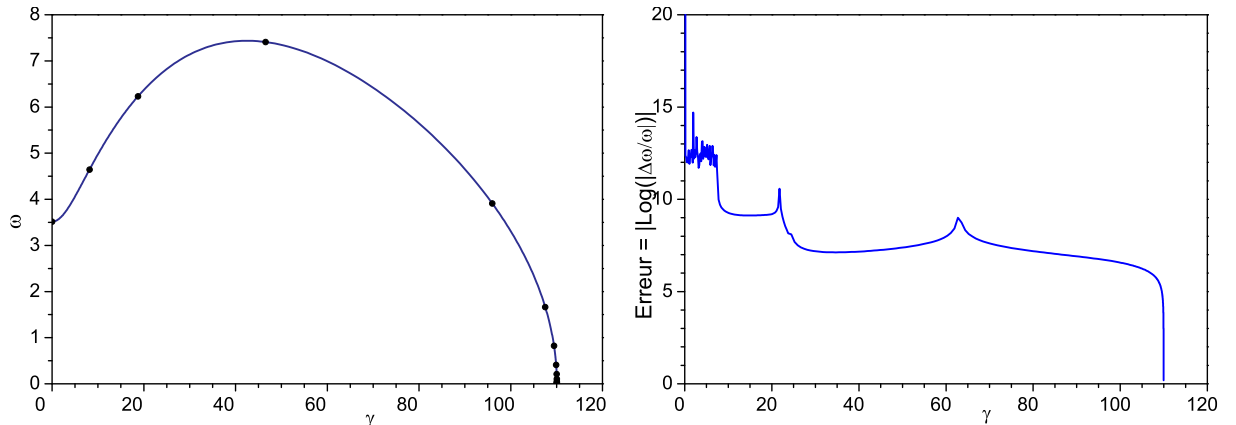
L'introduction de ces développements (38, 37) dans les équations (36, 39) et l'écriture en fonction des puissances de ' a ' permet d'obtenir une succession de systèmes linéaires singuliers à résoudre. Le premier système, dit d'ordre 0, correspond au point initial $(U_0, \lambda_0, \gamma_0)$. Les équations supplémentaires permettent de relaxer ces systèmes singuliers ainsi que de les résoudre. A titre d'exemple, le système d'ordre 1 est exprimé par :

$$\begin{bmatrix} L_t^0 & U_0^* & \bar{U}_0^* \\ U_0^{*T} & 0 & 0 \\ \bar{U}_0^{*T} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ k1 \\ k2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 \hat{\mathbf{I}}_0 U_1 + \hat{\mathbf{G}}\mathbf{2}U_0 + 2\gamma_0(\hat{\mathbf{G}}\mathbf{3} - \lambda_0 \hat{\mathbf{I}}\mathbf{2})U_0 \\ -\gamma_0 U_1^T \hat{\mathbf{I}}\mathbf{2}U_0 \\ -2\gamma_0 \bar{U}_0^T \hat{\mathbf{I}}\mathbf{2}U_0 \end{bmatrix} \quad (41)$$

où, L_t^0 est l'opérateur tangent de la fonctionnelle \mathcal{F} , $U_0^{*T} = \hat{\mathbf{I}}_0^T U_0$, $\bar{U}_0^{*T} = \hat{\mathbf{I}}_0^T \bar{U}_0$, (ki) sont les multiplicateurs de Lagrange, et la matrice $\hat{\mathbf{I}}_0$ est définie par $\hat{\mathbf{I}}_0 = \hat{\mathbf{I}}\mathbf{1} + \gamma_0^2 \hat{\mathbf{I}}\mathbf{2}$. Une fois la branche solution calculée à l'aide de la MAN, on peut déterminer l'apparition d'éventuels points singuliers. Dans cette étude nous avons utilisé l'algorithme proposé dans [13], où une régression géométrique apparaît dans les termes des séries (U_j) lorsque la solution s'approche d'un point de bifurcation.

5 Résultats numériques

Les résultats présentés ci-dessous sont obtenus avec les paramètres suivant : le nombre de modes utilisés dans l'approximation spatiale de Rayleigh-Ritz est $\mu > 10$ pour garantir une bonne convergence. Pour la MAN, un ordre de troncature $n \geq 20$ est nécessaire pour une éventuelle détection de singularités et un paramètre de précision des fractions de Padé $\eta_p > 10^{-4}$ [13]. Les courbes solutions recherchées représentent la variation de la fréquence naturelle d'un mode donné en fonction de la vitesse de rotation. Dans ce qui suit et pour éviter la confusion entre l'indice indiquant le numéro du mode étudié et les indices des termes du développement asymptotique λ_i , le $k^{\text{ième}}$ mode sera indiqué par ω_k , où $\omega_k = \lambda(a) = \sum_{i=0}^n a^i \lambda_i$. La figure 2a montre l'évolution du premier mode de flexion en fonction de la vitesse de rotation, dont le point initial est une solution stationnaire et le dernier point est un point de bifurcation correspondant à la vitesse de rotation critique. La précision des résultats obtenus est montrée sur la figure 2b et présentée



(a) La fréquence fondamentale vs de la vitesse de rotation.

(b) Erreur relative de la fréquence naturelle

FIGURE 2 – Premier mode de flexion, avec $\beta = 70$, $\delta_h = 0$ et l'ordre de troncature $n = 30$.

TABLE 1 – Deux premiers modes de flexion et le premier mode d’extension- fréquence adimensionnelle et CAM^b ($\beta = 70$, $\delta_h = 0$).

γ	1 ^{er} mode (flexion)			2 nd mode (flexion)			1 ^{er} mode (extension)		
	Padé	PVP ^a	CAM ^b	Padé	PVP	CAM	Padé	PVP	CAM
0	3.5160	3.5160*	1.0000	22.0345	22.0345	1.0000	110.3869	110.3869	1.0000
2	3.6196	3.6196*	1.0000	22.5239	22.5239	1.0000	110.4409	110.4409	1.0000
4	3.8881	3.8881	1.0000	23.9316	23.9316	1.0000	110.6031	110.6031	1.0000
6	4.2395	4.2395	1.0000	26.1058	26.1058	1.0000	110.8741	110.8741	1.0000
8	4.6109	4.6109	1.0000	28.8652	28.8652	1.0000	111.2539	111.2539	1.0000
10	4.9705	4.9705*	1.0000	32.0466	32.0466	1.0000	111.7419	111.7419	1.0000
12	5.3059	5.3059	0.9988	35.5241	35.5236	1.0000	112.3374	112.3373	1.0000

^a Problème aux valeurs propres (26). ^b Critère d’assurance modale, utilisé dans [7].
 * Valeurs en adéquation avec [14], donnant : 3.5160, 3.6169 et 4.9703, respectivement.

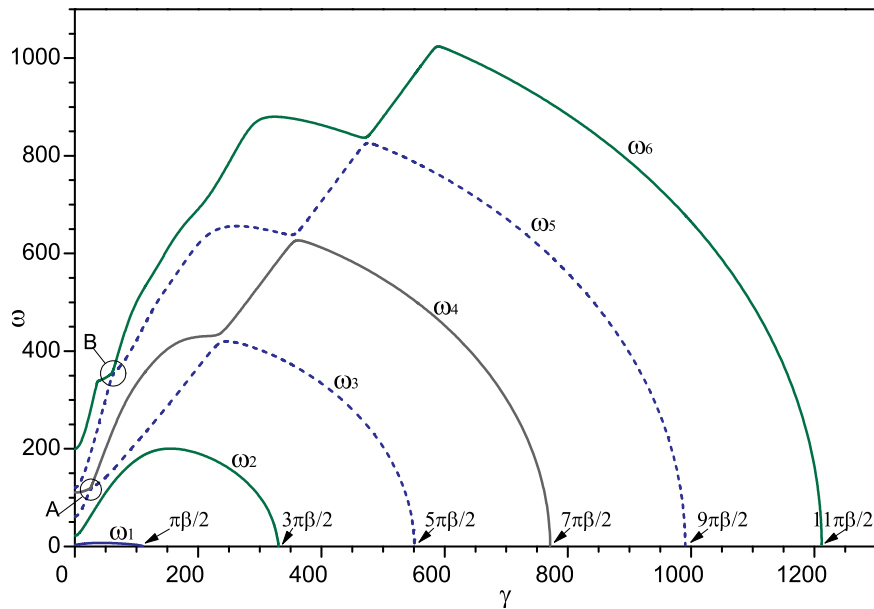


FIGURE 3 – Les six premiers modes de vibration, avec $\beta = 70$, $\delta_h = 0$ et un ordre de troncature $n = 25$

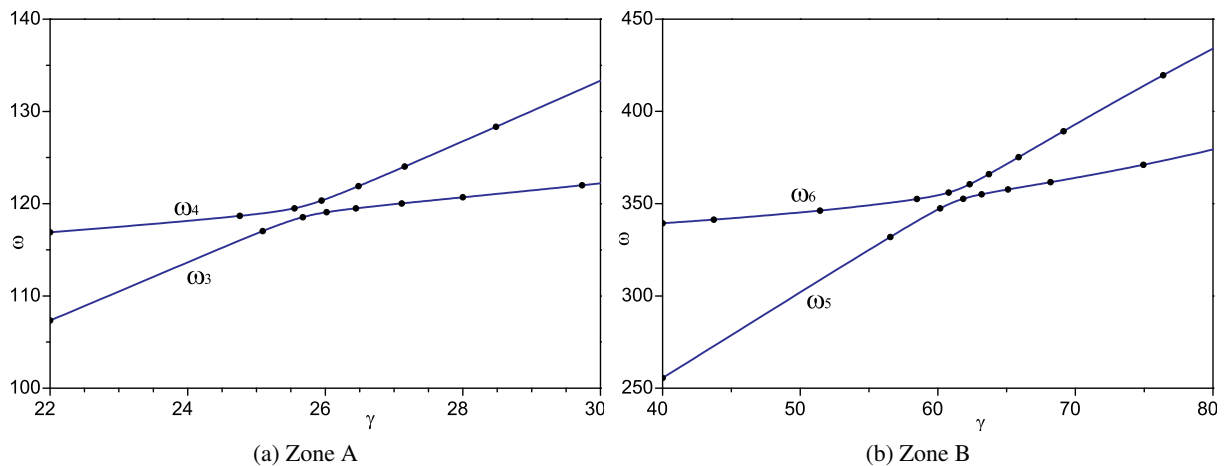


FIGURE 4 – Zone de rapprochement entre les modes $\beta = 70$, $\delta_h = 0$ et l’ordre de troncature $n = 30$.

en fonction de l'erreur relative. Elle est en moyenne de 10^{-7} et augmente rapidement lorsque l'on s'approche de la vitesse critique. Le tableau 1 présente une comparaison entre les fréquences naturelles obtenues avec un seul pas de la MAN et celles calculées en résolvant les problèmes aux valeurs propres pour chaque vitesse de rotation. Cette comparaison concerne les deux premiers modes de flexion et le premier mode d'extension à des différentes vitesses de rotation. L'erreur maximale des fréquences naturelles est de l'ordre de 10^{-5} . La concordance des modes a été vérifiée en utilisant le critère d'assurance modale, les colonnes (CAM) montrent la précision des modes de vibration calculés avec la MAN. La Figure 3 montre l'effet de la vitesse de rotation sur les six premiers modes de la fonctionnelle \mathcal{F} définie dans l'équation (36), où le mode 4 correspond au premier mode d'extension. L'erreur moyenne pour tous ces résultats est de l'ordre 10^{-6} . On peut remarquer que tous ces modes se terminent avec des points singuliers et correspondent à $(\eta = \pi/2 + k\pi, \text{ pour } k = 0, 1, \dots)$.

6 Conclusion

Dans cette étude, le problème aux valeurs propres, obtenu après une linéarisation des équations de mouvement d'une poutre rotative autour d'une position d'équilibre stationnaire, a été étudié. Une nouvelle méthode est développée permettant de transformer le système gyroscopique ayant des solutions complexes en un système standard avec des solutions réelles. Ce dernier est exprimé sous forme de fonctionnelle traitée par la méthode de continuation MAN. Le premier pas calculé avec cet algorithme en utilisant les approximants de Padé couvre un intervalle important ($\Delta\gamma > 12$) avec une erreur maximale de 10^{-5} . Des vitesses de rotation critiques ont été détectées et comparées aux expressions analytiques. En s'approchant de ces points singuliers, des régressions géométriques ont été détectées démontrant l'instabilité de ces points de bifurcations dynamiques de type Hopf. Les modes obtenus présentent certaines zones de rapprochement, appelées veering et dues aux effets de couplage. Ces zones ont été facilement identifiées grâce aux solutions analytiques obtenues avec l'algorithme de continuation MAN.

Références

- [1] A. Bazoune *Survey on modal frequencies of centrifugally stiffened beams*, Shock and Vibration Digest 37 : 449-469, 2005.
- [2] D. H. Hodges *An approximate formula for the fundamental frequency of a uniform rotating beam clamped off the axis of rotation*, J. Sound Vib. 77 : 11-18, 1981.
- [3] D.H. Hodges, R.R. Bless *Axial instability of rotating rods revisited*, Int. J. Nonlinear Mech. 46 : 879-887, 1994.
- [4] U. Kirsch *Implementation of combined approximations in structural optimization*, Comput. Struct. 78 : 449-457, 2000.
- [5] L. Meirovitch *New method of solution of the eigenvalue problem for gyroscopic systems*, AIAA J. 12 : 1337-1342, 1974.
- [6] D. A. Peters *An Approximate Solution for the Free Vibration of Rotating Uniform Cantilever Beams*, NASA TMX-62299, 1973.
- [7] G. Sliva, A. Brezillon, J-M. Cadou, L. Duigou *A study of the eigenvalue sensitivity by homotopy and perturbation methods*, J. Comput. Appl. Math. 234 : 2297-2302, 2010.
- [8] T. Xu, G. Guo, H. Zhang *Vibration reanalysis using frequency-shift combined approximations*, Struct. Multi-discip. O., 44 : 235-246, 2011
- [9] W. Wang, J. Kirkhope *New eigensolutions and modal analysis for gyroscopic-rotor systems, Part 1- Undamped systems*, J. Sound Vib. 175 : 159-170, 1994.
- [10] G. Zhang G, E. Nikolaidis, Z. P. Mourelatos *An efficient re-analysis methodology for probabilistic vibration of large-scale structures*, J. Mech. Veh. Des. 131 : 1-13, 2009.
- [11] F. Bekhoucha, S. Rechak, L. Duigou, JM. Cadou (2016) *Nonlinear free vibrations of centrifugally stiffened uniform beams at high angular velocity*, J. Sound Vib. DOI : 10.1016/j.jsv.2016.05.045.
- [12] SC. Lin, KM. Hsiao (2001) *Vibration analysis of rotating Timoshenko beams*, J. Sound Vib. 240 : 303–322.
- [13] B. Cochelin, M. Medale (2013) *Power series analysis as a major breakthrough to improve the efficiency of asymptotic numerical method in the vicinity of bifurcations*, J. Comp. Phys. 236 : 594–607.
- [14] HH. Yoo, S. H. Shin *Vibration analysis of rotating cantilever beams*, J. Sound Vib. 212 : 807-828, 1998.