

Étude numérique des vibrations d'un fluide contenu dans une cavité visco-élastique par une méthode d'homotopie et de perturbation

B. Claude¹, L. Duigou¹, G. Girault², J. M. Cadou¹

¹ Institut de recherche Dupuy de Lôme, Université de Bretagne Sud, {bertille.claude,laetitia.duigou,jean-marc.cadou}@univ-ubs.fr

² Centre de recherche des Écoles de Saint-Cyr Coëtquidan, gregory.girault@univ-ubs.fr

Résumé — Dans ce travail nous nous intéressons aux problèmes de vibroacoustique interne avec couplage fluide-structure. Le solide est un sandwich composé d'une couche visco-élastique comprise entre deux couches élastiques. Ce problème sera résolu par une méthode basée sur les techniques d'homotopie et de perturbation. Ceci nécessite dans un premier temps la résolution du problème non amorti, que l'on propose de résoudre avec la méthode asymptotique numérique.

Mots clés — vibrations, couplage fluide-structure, visco-élasticité, méthode de perturbation

1 Introduction

Les problématiques de maîtrise du bruit et des vibrations concernent différents domaines industriels. On trouve par exemple des applications dans le domaine du transport, pour améliorer le confort des usagers, ou encore dans le domaine militaire si on s'intéresse à la discrétion acoustique. Une des solutions passives existantes est l'utilisation de matériaux amortissants, tels que les structures de type "sandwich", constituées d'une couche de matériau visqueux entouré par deux couches d'un matériau élastique.

Nous nous intéressons aux problèmes d'interaction fluide-structure, en nous limitant dans un premier temps aux structures ayant un fluide interne. De tels problèmes doivent être modélisés par des systèmes couplés. Il existe pour cela différentes formulations [11] : déplacement-potential des vitesses, déplacement-déplacement, déplacement-pression... C'est cette dernière formulation qui a été choisie. Elle présente l'avantage de n'avoir qu'une seule inconnue par nœuds fluide, et de ne pas générer de mode propre non physique. L'inconvénient est que cela mène à un système non-symétrique, nécessitant l'utilisation d'un algorithme de résolution spécifique. De plus, le problème est mal posé dans le cas de la fréquence nulle, ce qui peut s'avérer problématique lorsque l'on utilise des techniques de réduction de modèle. Cependant cette difficulté pourra être contournée par l'ajout d'une condition de conservation de la masse [7].

Pour résoudre ce problème de vibrations non linéaire, nous proposons une méthode basée sur les techniques d'homotopie et de perturbation. Cette méthode nécessite un point de départ, qui sera choisi comme étant la solution du problème non amorti.

Après avoir présenté les équations du problème couplé, une méthode de résolution basée sur des techniques de perturbation et d'homotopie sera développée. Pour obtenir le point initial nécessaire à la méthode proposée, une méthode de résolution basée sur la méthode asymptotique numérique sera présentée pour déterminer les solutions du problème non amorti. Pour valider cette dernière, un exemple de fluide contenu dans une cavité élastique sera étudié.

2 Équations du problème couplé

Nous considérons un fluide parfait compressible contenu dans un solide de type "sandwich", constitué de deux couches d'un matériau élastique entourant une couche d'un matériau visco-élastique. Le problème est discrétisé par la méthode des éléments finis, avec une formulation en pression p (pour le fluide) et en déplacement u_S (pour le solide). Ceci conduit à la formulation discrète suivante :

$$\left(\begin{bmatrix} K_S & -C \\ 0 & K_F \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} M_S & 0 \\ C^T & M_F \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} u_S \\ p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Les indices "S" et "F" se rapportent respectivement au solide et au fluide. Les matrices K , M et C représentent les matrices de rigidité, de masse et de couplage pour l'interface fluide-structure.

Le comportement visqueux du solide implique une matrice rigidité complexe $K_S = K_S(0) + K_S(\omega)$. Le symbole λ représente les valeurs propres recherchées, celles-ci sont liées aux pulsations propres par la relation $\lambda = \omega^2$. Le matériau en contact avec le fluide étant élastique, la matrice de couplage est réelle. En revanche, les valeurs propres et le déplacement u_S seront complexes. Par ailleurs, la dépendance à la fréquence de la matrice de rigidité implique que le problème (1) est non linéaire.

Le problème (1) peut également s'écrire sous la forme d'un problème aux valeurs propres généralisé :

$$\{(K(0) + K(\omega) - \lambda M)U = 0 \quad (2)$$

où U est un vecteur mixte contenant les inconnues de déplacement u_S et de pression p . M est la matrice masse globale (matrice réelle), et $K(0)$ et $K(\omega)$ sont les matrices rigidité globales définies comme suit :

$$K(0) = \begin{bmatrix} K_S(0) & -C \\ 0 & K_F \end{bmatrix} \quad K(\omega) = \begin{bmatrix} K_S(\omega) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$K(0)$ est réelle et fixée, tandis que $K(\omega)$ est complexe et dépendante de la pulsation ω .

Pour résoudre le problème (2), complexe et non linéaire, une méthode basée sur la technique d'homotopie associée à celle de perturbation est présentée dans la section suivante.

3 Méthode de résolution numérique

3.1 Résolution du problème visco-élastique

Le problème (2) est non linéaire et complexe. Pour le résoudre, nous proposons une méthode basée sur les techniques d'homotopie et de perturbation décrite par Mallil *et al.* dans [10].

L'équation (2) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\{(K(0) + K(\omega) + \Omega M)U = 0 \quad \text{avec} \quad \Omega = -\omega^2 = i^2\lambda \quad (4)$$

Les inconnues du problème sont notées sous la forme incrémentale, avec U_0 et Ω_0 un point initial à définir :

$$\begin{Bmatrix} U \\ \Omega \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_0 + \Delta U \\ \Omega_0 + \Delta \Omega \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Après insertion de (5) dans (4), il vient :

$$[K(0) + K(\omega) + \Omega_0 M]U_0 + [K(0) + K(\omega) + \Omega_0 M]\Delta U + \Delta \Omega M U_0 + \Delta \Omega M \Delta U = 0 \quad (6)$$

L'équation (6) peut être réécrite sous la forme :

$$L_t^0(\Delta U, \Delta \Omega) + Q(\Delta U, \Delta \Omega) + R^0 = 0 \quad (7)$$

avec :

$$L_t^0(\Delta U, \Delta \Omega) = [K(0) + K(\omega) + \Omega_0 M]\Delta U + \Delta \Omega M U_0 \quad (8)$$

$$Q(\Delta U, \Delta \Omega) = \Delta \Omega M \Delta U \quad (9)$$

$$R^0 = [K(0) + K(\omega) + \Omega_0 M]U_0 \quad (10)$$

$L_t^0(\bullet)$ est un opérateur linéaire, $Q(\bullet, \bullet)$ un opérateur quadratique et R^0 représente le vecteur résidu initial.

En posant $X = \begin{Bmatrix} \Delta U \\ \Delta \Omega \end{Bmatrix}$, il vient :

$$L_t^0(X) + Q(X, X) + R^0 = 0 \quad (11)$$

La technique d'homotopie est appliquée de la même manière que Mallil *et al.* [10], c'est-à-dire en insérant un paramètre ε de la façon suivante :

$$L^*(V) + \varepsilon L(V) + Q(V, V) + \varepsilon R^0 = 0 \quad \text{tel que} \quad V(\varepsilon = 1) = X \quad \text{et} \quad L = (L_t^0 - L^*) \quad (12)$$

Le paramètre de perturbation ε varie de manière continue entre 0 et 1. Pour $\varepsilon = 0$ le problème à résoudre est supposé "simple" (ou déjà résolu). Pour $\varepsilon = 1$, on retrouve le problème (11).

Les inconnues du problème sont alors cherchées sous la forme d'un développement en série en fonction des puissances du paramètre d'homotopie ε :

$$V = \sum_{i=1}^N \varepsilon^i V_i \quad (13)$$

Après insertion des développements (13) dans (12), une série d'équations linéaires est obtenue. Le nombre d'équation étant inférieur au nombre d'inconnues, la condition d'orthogonalisation suivante est ajoutée :

$$\langle V - U_0, U_0 \rangle = 0 \quad (14)$$

avec $\langle \bullet, \bullet \rangle$ le produit scalaire Euclidien de deux vecteurs.

La résolution du problème non linéaire complexe (2) revient alors à résoudre la série de problèmes linéaires suivante :

Problème à l'ordre 1 :

$$\begin{cases} L^*(V_1) = -R^0 \\ \langle V_1 - U_0, U_0 \rangle = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Problème à l'ordre 2 :

$$\begin{cases} L^*(V_2) = -L(V_1) - Q(V_1, V_1) \\ \langle V_2 - U_0, U_0 \rangle = 0 \end{cases} \quad (16)$$

Problème à l'ordre 2 $\langle p \leq N$:

$$\begin{cases} L^*(V_p) = -L(V_{p-1}) - \sum_{r=1}^{p-1} Q(V_r, V_{p-r}) \\ \langle V_p - U_0, U_0 \rangle = 0 \end{cases} \quad (17)$$

L'opérateur L^* et les valeurs de départ U_0 , Ω_0 sont choisis comme dans la méthode proposée par Duigou *et al.* dans [6]. L'opérateur L^* est choisi réel et ne dépend que de la solution du problème non amorti (U^M , λ^M). Cet opérateur étant le même à chaque ordre, une seule opération de triangulation sera nécessaire pour l'ensemble des itérations, ce qui représente un gain en terme de temps de calcul et d'espace mémoire utilisé.

L'opérateur L^* est défini à partir des solutions du problème non amorti. Dans la section suivante, nous proposons donc une méthode de résolution du problème non amorti.

3.2 Résolution du problème non amorti

Pour résoudre le problème d'interaction fluide-structure avec un solide visco-élastique, la méthode proposée nécessite la connaissance des solutions du problème non amorti pour définir l'opérateur L^* . La première étape de la résolution consiste donc à déterminer les couples (U^M , λ^M) solutions du problème non amorti. Ces solutions particulières seront de plus prises comme valeurs initiales U_0 et Ω_0 dans l'algorithme de résolution pour le premier pas de calcul.

Pour un solide élastique, le problème (1) devient :

$$\left(\begin{bmatrix} K_S(0) & -C \\ 0 & K_F \end{bmatrix} - \lambda^M \begin{bmatrix} M_S & 0 \\ C^T & M_F \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} u_S^M \\ p^M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (18)$$

ou encore, sous forme d'un problème aux valeurs propres généralisé :

$$(K(0) - \lambda^M M) U^M = 0 \quad (19)$$

Compte tenu de la présence du terme de couplage C dans les matrices masse et rigidité globales, le problème à résoudre est non symétrique. Il est de plus mal conditionné, car l'ordre de grandeurs des termes de $K_S(0)$ est nettement plus important que celui des termes de M_F (pour notre cas test de la section 4, les ordres de grandeur des composantes des matrices $K_S(0)$ et M_F sont respectivement de 10^9 et 10^{-10} pour une cavité contenant de l'air).

On se propose de résoudre le problème (19) en utilisant une méthode basée sur une technique de perturbation initialement proposée pour la résolution de problèmes de vibrations de structures élastiques [4].

L'idée est d'introduire un second membre composé d'un vecteur force aléatoire F et d'un scalaire μ :

$$(K(0) - \lambda^M M)U^M = \mu F \quad (20)$$

Avec l'ajout de l'inconnue μ , il est nécessaire d'introduire une équation supplémentaire, que l'on choisit sous la forme de la condition d'orthogonalisation suivante :

$$\langle U - Z, Z \rangle = 0 \quad (21)$$

Le vecteur Z est choisi comme vérifiant le problème (20) pour lequel $\lambda^M = 0$ et $\mu = 1$, c'est-à-dire tel que $KZ = F$.

Déterminer les solutions (U^M, λ^M) revient alors à déterminer les valeurs de λ^M pour lesquelles le scalaire μ est nul. En effet, dans le cas où μ est nul, les problèmes (20) et (19) sont équivalents.

Pour cela nous utiliserons la méthode asymptotique numérique. Dans un premier temps, la valeur propre λ^M est écrite comme étant la somme du λ_0 initial et d'un paramètre $\hat{\lambda}$:

$$\lambda^M = \lambda_0 + \hat{\lambda} \quad (22)$$

Ici, la valeur initiale λ_0 est choisie nulle. L'insertion de (22) dans (20) conduit à :

$$(K(0) - (\lambda_0 + \hat{\lambda})M)U^M = \mu F \quad (23)$$

Les inconnues du problème sont ensuite cherchées sous la forme d'un développement asymptotique en fonction de $\hat{\lambda}$:

$$\begin{cases} U^M \\ \mu \end{cases} = \sum_{i=0}^N \hat{\lambda}^i \begin{cases} U_i \\ \mu_i \end{cases} \quad (24)$$

avec N l'ordre de troncature. Après insertion de (24) dans (23) et identification suivant les puissances de $\hat{\lambda}$, on obtient les problèmes linéaires suivants :

Ordre 0 :

$$\begin{cases} (K - \lambda_0 M)U_0 = \mu_0 F \\ \langle U_0, Z \rangle = \langle Z, Z \rangle \end{cases} \quad (25)$$

Ordre $1 \leq j \leq N$:

$$\begin{cases} (K - \lambda_0 M)U_j = \mu_j F + MU_{j-1} \\ \langle U_j, Z \rangle = 0 \end{cases} \quad (26)$$

Les problèmes (25) et (26) ont le même opérateur tangent $K - \lambda_0 M$, donc une seule triangulation de matrice est nécessaire lors de la détermination des inconnues (U_j, μ_j) . Les solutions sont ensuite améliorées avec l'application des approximants de Padé [1]. Déterminer les valeurs et vecteurs propres (U^M, λ^M) solutions du problème (19) consiste donc à trouver les valeurs de $\hat{\lambda}$ qui vont annuler le scalaire μ . De manière plus précise, cela conduit à déterminer les racines de la série (24) ou bien les racines du numérateur des approximants de Padé.

4 Résultats

Afin de valider la méthode de résolution du problème non amorti proposée en 3.2, nous considérons une cavité en acier remplie d'un fluide parfait et compressible (air ou eau). Les caractéristiques géométriques et les propriétés mécaniques sont présentées sur la Figure 1. Cet exemple, issu de [2], nous permettra de confronter nos résultats à des valeurs de référence.

Le problème est discrétisé par la méthode des éléments finis. Nous utilisons des éléments quadratiques linéaires. Les nœuds solides possèdent deux degrés de liberté (deux déplacements), les nœuds fluides en possèdent un (la pression), et les nœuds appartenant à une interface fluide-structure en possèdent trois (deux degrés de liberté en déplacement et un en pression).

Les résultats présentés ont été obtenus avec un maillage de 2304 éléments quadrangles (1280 éléments solides et 1024 éléments fluides). Ceci représente 2401 nœuds (1312 nœuds solides, 961 nœuds fluides et 128 nœuds d'interface), soit 3969 degrés de liberté. Après plusieurs tests, il a été choisi un ordre de troncature de l'approximation polynomiale (24) égal à $N = 15$. Cet ordre de troncature des séries présente un optimum entre le temps de calcul et la qualité des solutions obtenues.

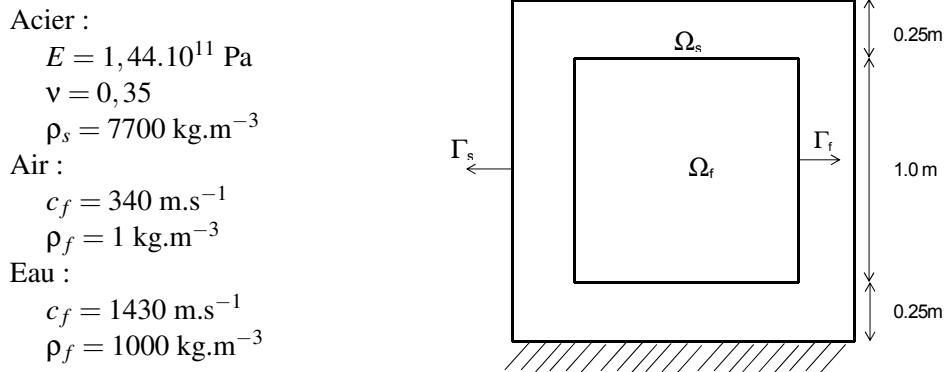


FIGURE 1 – Géométrie et propriétés mécaniques de la cavité étudiée [2]

Les dix premières pulsations propres calculées avec la méthode de perturbation sont présentées dans la table 1. Elles sont comparées aux valeurs données par Bermúdez et Rodríguez dans [2]. La Figure 2 montre l'allure des cinq premiers modes propres, pour le fluide et pour le solide. Les résultats obtenus avec la méthode proposée sont très proches des valeurs de référence, ce qui nous permet de valider l'algorithme de résolution du problème non amorti.

Air		Eau	
Méthode de perturbation	Référence	Méthode de perturbation	Référence
676,926	664,121	654,159	641,837
1068,562	1068,129	2159,301	2116,398
1068,607	1068,152	3445,498	3201,475
1511,191	1510,589	3907,321	3804,124
2139,448	2136,102	4221,192	4211,620
2139,707	2136,240	4710,677	4687,927
2304,012	2258,686	5168,735	5155,246
2391,688	2388,418	5454,176	5385,805
2391,734	2388,539	6280,978	6239,332
3026,000	-	7597,443	-

TABLE 1 – Résultats obtenus pour les 10 premières pulsations propres (rad/s) - Comparaison avec les résultats de référence [2]

Les performances de la méthode de perturbation proposée sont ensuite comparées à celles d'un solveur classique pour les problèmes aux valeurs propres non symétriques : le solveur ARPACK, basé sur l'algorithme d'Arnoldi [8]. Les pulsations propres obtenues sont identiques. En revanche, le temps de calcul pour obtenir les dix premières pulsations propres est nettement plus élevé pour le solveur ARPACK que pour la méthode proposée, comme le montre la Figure 3.

De plus, il apparaît qu'ARPACK ne permet pas de résoudre le problème aux valeurs propres non symétrique en l'état. En effet, les matrices sont mal conditionnées, ce qui entraîne un temps de calcul très long et des problèmes de convergence et de stabilité. Pour remédier à ce problème, il a été ajouté une étape de préconditionnement avant l'utilisation du solveur ARPACK. Ce préconditionnement est basé sur la méthode proposée par Maess et Gaul [9] et permet de réécrire le système mal conditionné (18) sous la

forme bien conditionnée suivante :

$$\left(\begin{bmatrix} K_S(0) & -C_K \\ 0 & \widehat{K}_F \end{bmatrix} - \lambda^M \begin{bmatrix} M_S & 0 \\ C_M^T & \widehat{M}_F \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} u_s^M \\ p^M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (27)$$

avec

$$\begin{cases} \widehat{K}_F = abK_F \text{ et } \widehat{M}_F = abM_F \\ C_K = aC \text{ et } C_M = bC \\ a = \sqrt{\frac{\|K_S\|_f}{\|M_F\|_f}} \text{ et } b = \sqrt{\frac{\|M_S\|_f}{\|K_F\|_f}} \\ \widehat{p}^M = \frac{1}{a}p^M \end{cases} \quad (28)$$

où le symbole $\|\bullet\|_f$ représente la norme de Frobenius.

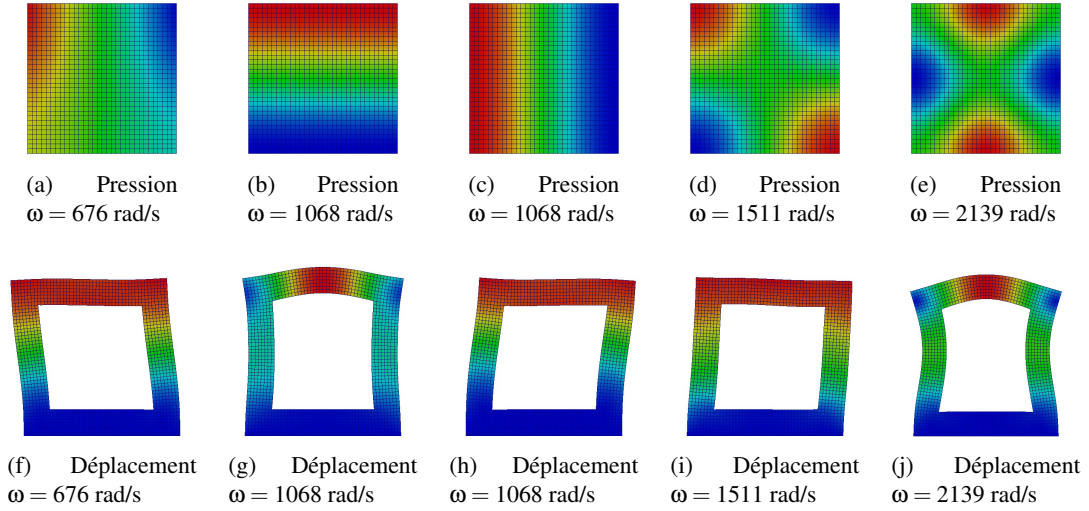


FIGURE 2 – Allure des cinq premiers modes propres du système couplé, mode de pression pour le fluide (a, b, c, d, e), et mode de déplacement pour le solide (f, g, h, i, j).

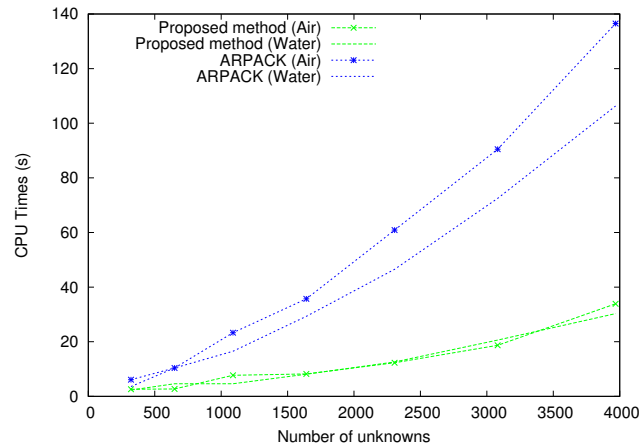


FIGURE 3 – Comparaison des temps CPU pour le calcul des dix premières valeurs propres par la méthode proposée et par ARPACK.

5 Conclusion et perspectives

Dans ce travail, nous avons proposé une méthode basée sur les techniques d'homotopie et de perturbation pour résoudre un problème de vibrations en interaction fluide-structure avec un solide visco-élastique. Cette méthode nécessite le calcul d'un opérateur tangent L^* et d'une solution de départ U_0, Ω_0 .

Ces valeurs sont déterminées à partir des solutions du problème non amorti U^M , Ω^M , comme proposé dans [6]. Du fait de la présence du couplage fluide-structure, le problème non amorti est non symétrique et mal conditionné. Nous proposons donc une méthode basée sur la méthode asymptotique numérique et les approximants de Padé pour le résoudre. Cette méthode a été testée sur un exemple extrait de [2], et a permis de valider le calcul des pulsations propres du système non amorti. La comparaison en terme de temps de calcul des deux méthodes permet de mettre en évidence l'efficacité de la technique proposée, le gain en temps de calcul n'étant pas négligeable. De plus, il est à noter que la résolution du problème non amorti proposée ne nécessite pas de préconditionnement. Les développements sont en cours pour le calcul numérique des solutions du problème amorti et les résultats numériques seront présentés lors du congrès. Ceux-ci pourront être comparés à des travaux déjà réalisés sur le sujet [3], [5].

Références

- [1] F. Abdoun, L. Azrar, E. Daya, M. Potier-Ferry, *Forced harmonic response of viscoelastic structures by an asymptotic numerical method*, Computer and Structures, 91-100, 2009.
- [2] A. Bermúdez, R. Rodríguez, *Finite element computation of the vibration modes of a fluid-solid system*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 355-370, 1994.
- [3] A. Bobillot, E. Balmès, *Iterative techniques for eigenvalue solutions of damped structures coupled with fluids*, The American Institut of Aeronautics and Astronautics, 1-9, 2002.
- [4] E.H. Boutyour, J.M. Cadou, B. Cochelin, M. Potier-Ferry, *Etude des vibrations linéaires de plaques par une méthode asymptotique numérique et les approximants de Padé*, 8ème Colloque National en Calcul des structures, CSMA, 2007.
- [5] J.F. Deü, W. Larbi, R. Ohayon, *Vibration and transient response of structural-acoustic interior coupled systems with dissipative interface*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 4894-4905, 2008.
- [6] L. Duigou, E. M Daya, M. Potier-Ferry, *Iterative algorithms for non-linear eigenvalue problems. Application to vibrations of viscoelastic shells*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1323-1335, 2003.
- [7] R. Ohayon, *Reduced symmetric models for modal analysis of internal structural-acoustic and hydroelastic-sloshing systems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 3009-3019, 2001.
- [8] R. Lehoucq, D.C. Sorensen, C. Yang, *ARPACK User's Guide : Solution of large-scale eigenvalue problems with implicitly restarted Arnoldi methods*, SIAM, Philadelphia, 1998.
- [9] M. Maess, L. Gaul, *Substructuring and model reduction of pipe components interacting with acoustic fluids*, Mechanical Systems and Signal Processing, 45-64, 2006.
- [10] E. Mallil, H. Lahmam, N. Damil, M. Potier-Ferry, *An iterative process based on homotopy and perturbation techniques*, Computer Methods in Applied Mechanics en Engineering, 1845-1858, 2000.
- [11] H. Morand, R. Ohayon, *Interactions fluides-structures*, Masson, 1992.