

Application de la méthode de Base Réduite pour la réponse vibroacoustique de structures immergées avec paramètres incertains

C. Leblond¹, M. Abbas^{2,3}, J. Vernet-Castex⁴,
S. Prigent⁴, J.-F. Sigrist¹

¹ CESMAN, DCNS Research, {cedric.leblond,jean-francois.sigrist}@dcnsgroup.com

² EDF R&D, mickael.abbas@edf.fr

³ Institut des Sciences de la Mécanique et Applications Industrielles, UMR 9219 EDF-CNRS-CEA-ENSTA, Université Paris Saclay

⁴ DSI, DCNS, {julie.vernetcastex, stephane.prigent}@dcnsgroup.com

Résumé — La réponse fréquentielle de structures immergées avec paramètres incertains est considérée dans le présent papier. Un modèle d'ordre réduit (MOR) paramétrique est construit à cet égard, à partir d'une formulation monolithique du problème vibroacoustique discret et de la méthode de Base Réduite. L'approche est implémentée dans le code de calcul code_aster et est appliquée sur un cas de complexité industrielle. Le MOR paramétrique est de plus intégré dans une tablette numérique, afin d'évaluer les possibilités de calcul en temps réel offertes par ce type de support.

Mots clés — Base Réduite, vibroacoustique, structures immergées, paramètres incertains.

1 Introduction

L'estimation de la réponse vibratoire de structures immergées demeure un processus coûteux dans les industries navale et nucléaire, de par la taille et la complexité des structures en jeu, ainsi que leur couplage fort avec un fluide lourd. La discrétisation par éléments finis de tels problèmes vibroacoustiques résulte en des systèmes matriciels linéaires à plusieurs millions de degrés de liberté, devant être inversés à chaque fréquence d'intérêt. Dans la pratique, des analyses en bandes larges (sur une grille fréquentielle grossière) sont réalisées en bureau d'études, de sorte à réduire le temps global de calcul. Par ailleurs, le choix des matériaux, leurs caractéristiques et les détails géométriques peuvent évoluer selon les différentes phases de conception. De nombreuses simulations sont dès lors théoriquement requises afin d'accompagner le développement du produit. Néanmoins, les temps de calcul prohibitifs limitent drastiquement le nombre de simulations réalisées dans la pratique, ce qui peut *in fine* altérer la robustesse et l'optimalité du design.

Une technique de réduction de modèle est évaluée dans le présent papier, de sorte à rendre accessibles les analyses vibroacoustiques en bandes fines, sur un espace paramétrique de relativement grande dimension. En effet, les modèles d'ordre réduit (MOR) peuvent de nos jours représenter des systèmes complexes avec relativement peu de degrés de liberté, au prix d'une perte de précision acceptable. De nombreuses techniques de construction de MOR peuvent être trouvées dans la littérature. La plupart d'entre elles implique la connaissance d'une base de dimension réduite comme point de départ, par exemple et non exhaustivement, la POD [14], la réduction *a priori* [20], la PGD [1, 2, 16] et la Base Réduite [5, 13]. Le point crucial pour obtenir un MOR paramétrique fiable est de construire une base spatiale qui couvre la physique en jeu, sur tout l'espace des paramètres. Cette base doit de plus être d'une dimension beaucoup plus faible que le modèle complet discrétisé, pour que le MOR puisse être résolu en ligne en temps réel, ou du moins, beaucoup plus rapidement que le modèle non réduit.

Les méthodes de réduction de modèle dédiées au calcul de la réponse vibroacoustique de structures immergées sont principalement basées sur une procédure de sous-structuration dynamique [18], impliquant d'une part les modes acoustiques et les solutions statiques dans le domaine fluide, et d'autre part les modes structurels non-amortis et non-couplés. Ces approches potentiellement efficaces dans les cas faiblement amortis et pour les domaines fluides confinés, requièrent un effort de développement important pour être industriellement exploitables, puisqu'elles ne sont pas basées sur un modèle complet monolithique. Dans le cas d'un domaine fluide infini, une autre stratégie consiste à utiliser la méthode des éléments de frontière résultant en une matrice de masse additionnelle fonction de la fréquence. La



FIGURE 1 – Géométrie du cas d’étude, représentant un tronçon de coque cylindrique avec des raidisseurs en T et un carlingage générique. Le tronçon est en contact du fluide sur la face externe de la coque. Un effort ponctuel est appliqué verticalement au milieu de la plaque du carlingage. Une condition d’impédance est imposée sur la surface sphérique du domaine fluide, afin de mimer l’influence d’un domaine infini.

réduction peut alors être réalisée par projection de Galerkin sur les modes structurels in vacuo non-amortis [19, 15]. Le caractère multidimensionnel de l’espace paramétrique constitue ici une difficulté additionnelle. Jusqu’à récemment, cet aspect ne semblait pas être particulièrement traité pour les problèmes vibroacoustiques, malgré les besoins industriels sous-jacents. La PGD constitue à cet égard une piste sérieuse puisqu’elle s’est avérée très efficace pour de nombreux problèmes paramétriques multidimensionnels [7, 10]. Son application à des problèmes vibroacoustiques avec paramètres incertains est un travail en cours [8, 9]. Dans la présente étude, il est choisi d’évaluer la méthode de Base Réduite associée à un algorithme glouton [5, 13, 4, 6, 17].

Le but est ici d’obtenir un MOR paramétrique, pouvant être utilisé en temps réel lorsque les paramètres varient. Le temps de calcul en amont de la base réduite peut en soi être long, mais il doit rester acceptable pour un bureau d’étude, soit de l’ordre de quelques jours. L’algorithme de construction du MOR doit de plus être faiblement intrusif, de sorte à pouvoir être implémenté relativement aisément dans un code de calcul industriel. La stratégie de réduction résultante satisfait ces contraintes. Le modèle complet est tout d’abord décrit dans la section 2. La construction du modèle d’ordre réduit paramétrique est ensuite détaillée dans la section 3. Il est enfin illustré section 4, sur le cas d’un tronçon de coque raidie pour un espace paramétrique de dimension quatre. L’exploitation du MOR pour le calcul en temps réel est enfin évoquée à la section 5.

2 Le modèle complet monolithique

Une structure immergée dans un domaine fluide $\tilde{\Omega}_f$ est considérée ; un cas d’étude est illustré sur la Figure 1. Dans la suite, les tildes sont utilisés pour désigner les quantités dimensionnelles ; à l’inverse, l’absence de tilde impliquera une quantité adimensionnelle, normalisée selon le Tableau 1. La structure, définie par le domaine $\tilde{\Omega}_s$ de frontière $\partial\tilde{\Omega}_s$, est constituée de N_s matériaux élastiques. Le milieu fluide, modélisé par un comportement acoustique, interagit avec la structure sur la frontière $\tilde{\Gamma} \in \partial\tilde{\Omega}_s$. Une condition d’impédance est de plus imposée à la frontière $\tilde{\Gamma}_\infty$ du domaine fluide de sorte à mimer l’impact d’un domaine infini [3, 17]. De nombreuses formulations peuvent être trouvées dans la littérature pour mo-

TABLE 1 – Les variables sont normalisées par la masse volumique du fluide $\tilde{\rho}_f = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$, la vitesse du son dans le fluide $\tilde{c}_f = 1500 \text{ m.s}^{-1}$ et une longueur caractéristique $\tilde{L} = 1 \text{ m}$.

Variable	Facteur de normalisation
Longueur, déplacement	\tilde{L}
Temps	\tilde{L}/\tilde{c}_f
Fréquence	\tilde{c}_f/\tilde{L}
Masse volumique	$\tilde{\rho}_f$
Pression, contrainte	$\tilde{\rho}_f \tilde{c}_f^2$
Potentiel	\tilde{L}^2
Impédance	$\tilde{\rho}_f \tilde{c}_f$

déliser ce problème d'interaction structure-acoustique. Nous choisissons ici la formulation monolithique en (déplacement \mathbf{u} , pression p , potentiel des déplacements ϕ) [22, 17], puisqu'elle est disponible dans de nombreux codes éléments finis industriels et est adaptée aux problèmes de grande dimension.

La discrétisation par éléments finis de ce problème vibroacoustique couplé résulte en un système matriciel de la forme [12, 22] :

$$[-i\omega^3 \mathbf{I} - \omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}] \mathbf{X} = \mathbf{B} \quad (1)$$

avec ω la pulsation, \mathbf{I} la matrice d'impédance, \mathbf{M} la matrice de masse, \mathbf{C} la matrice d'amortissement, \mathbf{K} la matrice de raideur et \mathbf{B} le vecteur second membre. Le vecteur $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^N$ regroupe les composantes de l'approximation de Galerkin X^N de la solution couplée (\mathbf{u}, p, ϕ) du problème vibroacoustique.

Dans le présent papier, les paramètres variables considérés, en plus de la fréquence, sont les masses volumiques (ρ_s^i pour i allant de 1 à N_s) des différents matériaux constituant la structure. La nature des variations des paramètres peut être soit déterministe soit aléatoire. L'ensemble des paramètres $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{N_s+1}$ est maintenant défini et un point de cet ensemble est noté $\mu \equiv \{\mu_1, \dots, \mu_{N_s+1}\}$. Les variations des paramètres physiques sont donc considérées via les quantités paramétrées $\omega(\mu)$, $\rho_s^1(\mu)$, \dots , $\rho_s^{N_s}(\mu)$. Des manipulations élémentaires permettent dès lors d'exprimer explicitement le système matriciel (1) sous la forme paramétrique :

$$\mathbf{A}(\mu) \mathbf{X}(\mu) = \mathbf{B} \quad (2)$$

$$\text{avec } \mathbf{A}(\mu) = -i\omega(\mu)^3 \mathbf{I} - \omega(\mu)^2 \left[\mathbf{M}_{fluide} + \sum_{j=1}^{N_s} \rho_s^j(\mu) \mathbf{M}_j \right] + i\omega(\mu) \mathbf{C} + \mathbf{K} \quad (3)$$

Ce système constitue le *modèle complet*, utilisé dans la suite comme référence et point de départ pour la construction du MOR.

3 Le modèle d'ordre réduit paramétrique

3.1 Forme de l'approximation de faible rang

Nous choisissons la décomposition espace-paramètre d'ordre M sous la forme monolithique suivante :

$$\mathbf{X}_M(\mu) = \begin{Bmatrix} U_M(\mu) \\ P_M(\mu) \\ \Phi_M(\mu) \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^M \alpha_m(\mu) \Psi_m = \Psi^M \alpha^M(\mu) \quad (4)$$

avec $\alpha_m(\mu) \in \mathbb{C}$ les fonctions des paramètres, $\Psi_m \in \mathbb{C}^N$ les fonctions d'espace, $\alpha^M(\mu) = \{\alpha_1(\mu), \dots, \alpha_M(\mu)\}^T \in \mathbb{C}^M$ et $\Psi^M = [\Psi_1, \dots, \Psi_M] \in \mathbb{C}^{N \times M}$. Classiquement, l'introduction de l'approximation de rang M Eq. (4) de la solution dans le modèle complet (2) fait apparaître un résidu $\mathbf{R}_M(\mu)$, explicitement défini par :

$$\mathbf{R}_M(\mu) = (\mathbf{B} - \mathbf{A}(\mu) \mathbf{X}_M(\mu)) \quad (5)$$

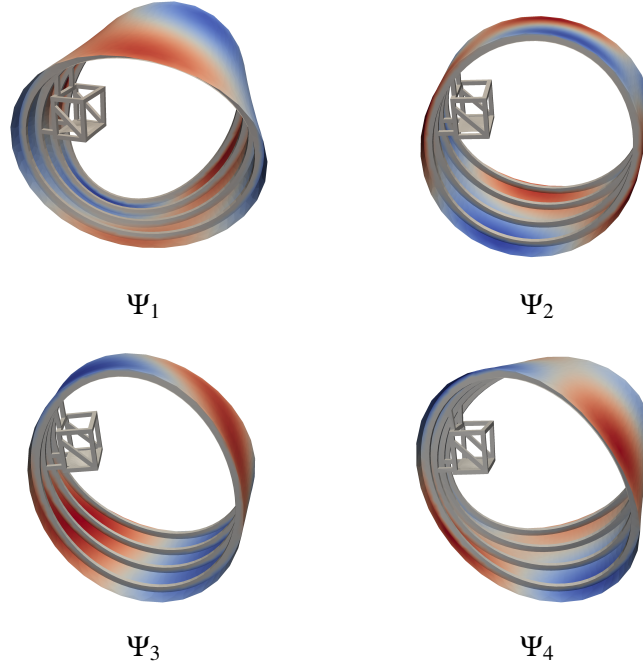


FIGURE 2 – Quatre premières fonctions d’espace obtenues par l’algorithme de Base Réduite. Les déplacements sont visibles via la déformation de la structure, et la pression du fluide est représentée sur la coque par les couleurs.

L’erreur entre la solution exacte et l’approximation de rang M , $\mathbf{e}_M(\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{X}(\boldsymbol{\mu}) - \mathbf{X}_M(\boldsymbol{\mu})$, est dès lors liée au résidu via la relation :

$$\mathbf{e}_M(\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\mu})\mathbf{R}_M(\boldsymbol{\mu}) \quad (6)$$

3.2 Construction du modèle d’ordre réduit paramétrique

Pour la construction du MOR, nous considérons qu’une base spatiale $\boldsymbol{\Psi}^M = [\boldsymbol{\Psi}_1, \dots, \boldsymbol{\Psi}_M] \in \mathbb{C}^{N \times M}$ est déjà connue (la construction de cette base fait l’objet de la section suivante). Le MOR est classiquement obtenu en réalisant la projection du modèle complet sur des fonctions tests appropriées $\boldsymbol{\Xi}_m \in \mathbb{C}^N$, pour $m = 1 \dots M$. Plus précisément, les sous-espaces de faible dimension $\mathcal{Y}_M = \text{span}\{\boldsymbol{\Xi}_m\}_{m=1}^M \subset \mathbb{C}^N$ et $\mathcal{X}_M = \text{span}\{\boldsymbol{\Psi}_m\}_{m=1}^M \subset \mathbb{C}^N$ sont introduits. L’approximation de rang M , $\mathbf{X}_M(\boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{X}_M$, est alors définie par la formulation faible :

$$\delta \mathbf{Y}_M^H \mathbf{A}(\boldsymbol{\mu}) \mathbf{X}_M(\boldsymbol{\mu}) = \delta \mathbf{Y}_M^H \mathbf{B}, \quad \forall \delta \mathbf{Y}_M \in \mathcal{Y}_M \quad (7)$$

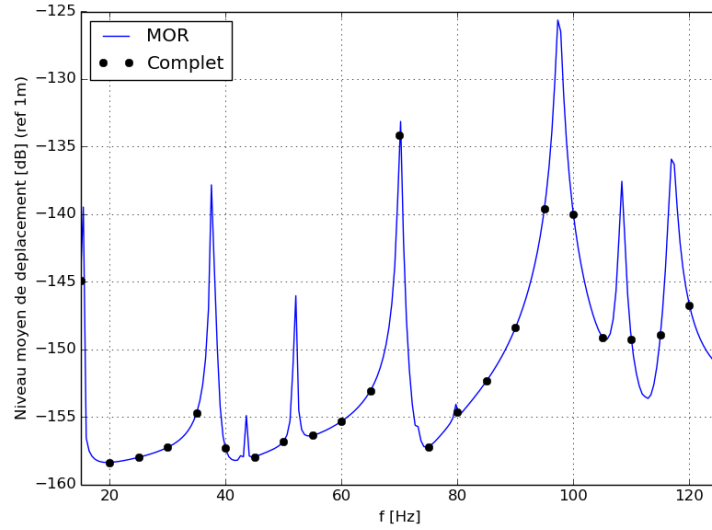
L’utilisation des relations (3) et (4) permet d’exprimer explicitement cette relation, sous la forme de M équations algébriques couplées :

$$\sum_{n=1}^M \left[-i\omega(\boldsymbol{\mu})^3 I_{mn} - \omega(\boldsymbol{\mu})^2 \left[M_{fluide,mn} + \sum_{j=1}^{N_s} \rho_s^j(\boldsymbol{\mu}) M_{j,mn} \right] + i\omega(\boldsymbol{\mu}) C_{mn} + K_{mn} \right] \alpha_n(\boldsymbol{\mu}) = B_m \quad (8)$$

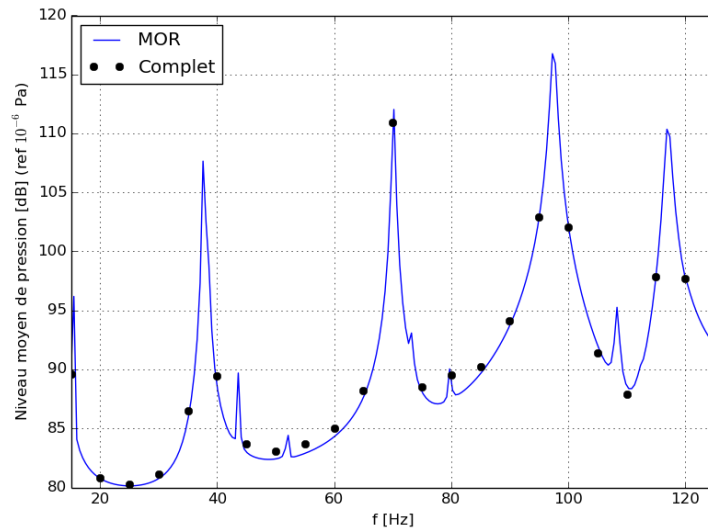
pour $m = 1 \dots M$, où les coefficients sont définis par :

$$\begin{aligned} I_{mn} &= \boldsymbol{\Xi}_m^H \mathbf{I} \boldsymbol{\Psi}_n, & M_{fluide,mn} &= \boldsymbol{\Xi}_m^H \mathbf{M}_{fluide} \boldsymbol{\Psi}_n, & M_{j,mn} &= \boldsymbol{\Xi}_m^H \mathbf{M}_j \boldsymbol{\Psi}_n, \\ C_{mn} &= \boldsymbol{\Xi}_m^H \mathbf{C} \boldsymbol{\Psi}_n, & K_{mn} &= \boldsymbol{\Xi}_m^H \mathbf{K} \boldsymbol{\Psi}_n, & B_m &= \boldsymbol{\Xi}_m^H \mathbf{B} \end{aligned} \quad (9)$$

L’équation (8) constitue le MOR paramétrique. Dans le présent papier, nous choisissons $\boldsymbol{\Xi}_m = \boldsymbol{\Psi}_m$ pour $m = 1 \dots M$; il s’agit donc d’une projection de Galerkin classique, imposant au résidu (5) d’être orthogonal à chaque fonction d’espace : $\boldsymbol{\Psi}_m^H \mathbf{R}_M(\boldsymbol{\mu}) = 0$ pour $m = 1 \dots M$. Il convient de noter que le modèle réduit (8) est *online efficient* [6] : les coefficients (9) ne dépendent pas des paramètres et peuvent être précalculés. La complexité numérique pour résoudre le MOR en ligne est donc indépendante de la taille N du modèle complet.



Niveaux de déplacement (moyennés sur le carlingage)

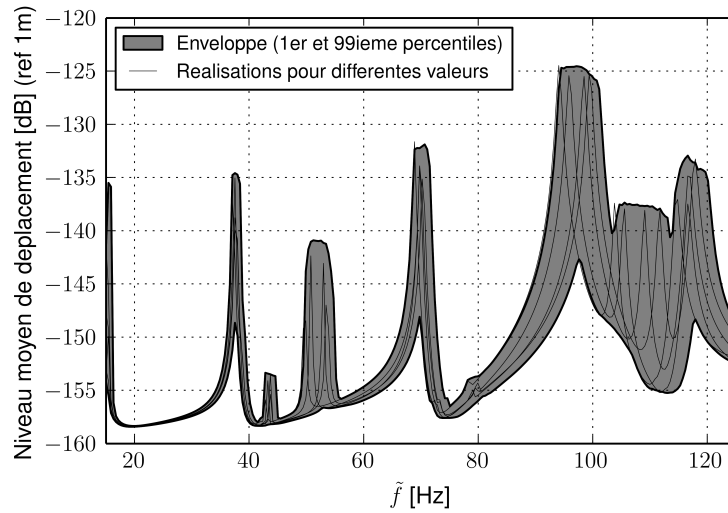


Niveaux de pression rayonnée (moyennés sur la sphère de rayon R_∞)

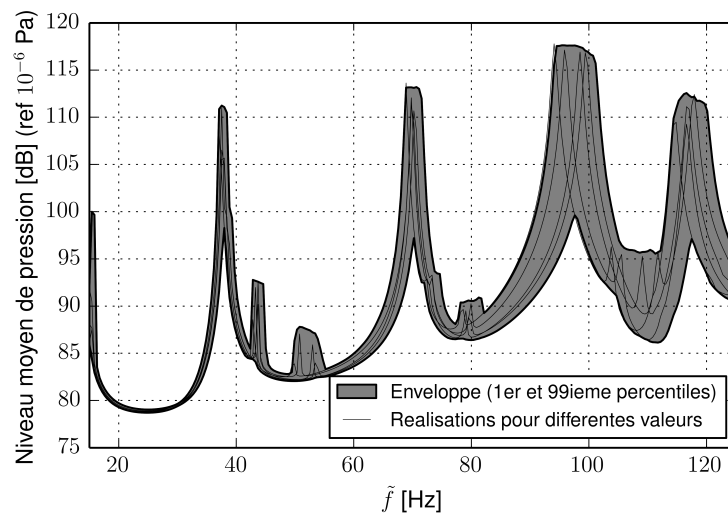
FIGURE 3 – Comparaison des niveaux de déplacement et de pression obtenus par le modèle complet et par le MOR avec 100 fonctions d’espace.

3.3 Construction de la base spatiale

La construction de la base spatiale est effectuée selon l’approche de Base Réduite, associée à l’utilisation d’un algorithme glouton [13, 5, 17]. Plus précisément, pour chaque nouvelle fonction d’espace, nous calculons l’erreur exacte (6) où le paramètre $\mu \in \mathcal{D}$ maximise la norme du résidu $\|\mathbf{R}_M(\mu)\|$, sur un ensemble discret prédéterminé de l’espace des paramètres. Cette nouvelle information est ensuite utilisée pour enrichir la base et former un MOR amélioré. L’utilisation de la norme du résidu comme un estimateur d’erreur *a posteriori* n’est bien sûr pas optimale, mais elle demeure une quantité peu coûteuse et facile à implémenter. Un échantillonnage aléatoire dans \mathcal{D}^I est choisi pour créer l’ensemble discret des paramètres pour chaque nouvelle fonction. I est choisi suffisamment large pour éviter de trop grandes régions sans point dans l’espace des paramètres. De plus, un nouvel échantillonnage est réalisé dans \mathcal{D}^I pour chaque nouvelle fonction d’espace, limitant les risques qu’une région importante dans l’espace des paramètres ne soit oubliée.



Niveaux de déplacement (moyennés sur le carlingage)



Niveaux de pression rayonnée (moyennés sur la sphère de rayon R_∞)

FIGURE 4 – Enveloppes des réponses fréquentielles obtenues avec le MOR. La fréquence est régulièrement discrétisée avec 250 points entre 15 Hz et 125 Hz. Les masses volumiques des trois sous-structures sont considérées comme des variables aléatoires uniformes, avec une variabilité de 10 % pour la coque raidie et le carlingage, et 25 % pour la plaque sur le carlingage. Les enveloppes de la réponse sont calculées sur un échantillonnage de $I = 2000$ valeurs des paramètres, pour chaque fréquence. $5 \cdot 10^5$ appels au MOR ont donc été nécessaires pour la construction de ces courbes.

4 Illustrations sur un cas d'étude industriel

L'algorithme de construction de la base réduite a été implémenté dans le code industriel *open source* `code_aster` [11] en langage Python et des macro-commandes sont maintenant disponibles pour faciliter la mise en données de l'approche. La géométrie et le maillage ont été générés par le logiciel de pré-traitement *open source* Salome [21]. Le cas d'étude, illustré sur la Figure 1, est constitué d'un tronçon de coque avec des raidisseurs en T et un carlingage générique. Un effort ponctuel est appliqué verticalement au milieu de la plaque du carlingage. La structure est décomposée en 3 sous-structures (la coque raidie, le carlingage et la plaque sur le carlingage) et est modélisée par des éléments coques quadratiques triangulaires à 7 points. Le maillage fluide est quant à lui composé d'éléments quadratiques tétraédriques à 10 points. Une impédance $Z(\omega) = 1/(1 + L/(i\omega R_\infty))$ est appliquée sur la surface sphérique de rayon R_∞ , afin de mimer l'impact d'un domaine fluide infini [3]. L'approche est illustrée ici sur un espace des paramètres de dimension 4, avec comme paramètres variables la fréquence et les 3 masses volumiques

des différentes sous-structures. Plus précisément, la fréquence est prise entre 15 Hz et 125 Hz, les masses volumiques de la coque raidie et du carlingage varient de 10 % autour de leur valeur nominale, et celle de la plaque de 25 %.

Lors de la construction hors-ligne de la Base Réduite et du MOR, 100 fonctions d'espace sont gardées. Pour illustration, les quatre premières sont portées sur la Figure 2. La précision du MOR résultant est évaluée par confrontation au modèle complet sur la gamme de fréquences d'intérêt et pour les valeurs nominales des masses volumiques. Plus précisément, les comparaisons des niveaux de déplacement (moyennés sur le carlingage) et des niveaux de pression rayonnée (moyennés sur la sphère de rayon R_∞) sont portées sur la Figure 3. Une bonne concordance est observée sur les déplacements ; quelques écarts, raisonnables d'un point de vue de l'ingénieur, sont néanmoins visibles sur la pression entre les raies.

Afin d'illustrer une application possible du MOR paramétrique, les enveloppes des réponses fréquentielles en déplacement et pression sont portées sur la Figure 4. Pour la construction de ces courbes, $5 \cdot 10^5$ appels au MOR ont été nécessaires. Ce dernier est construit avec 100 fonctions d'espace, il a donc nécessité 100 appels au modèle complet. Le *speed-up* apporté par le MOR sur ce type d'application est donc de l'ordre de 10^3 .

5 Calcul en temps réel sur tablette numérique

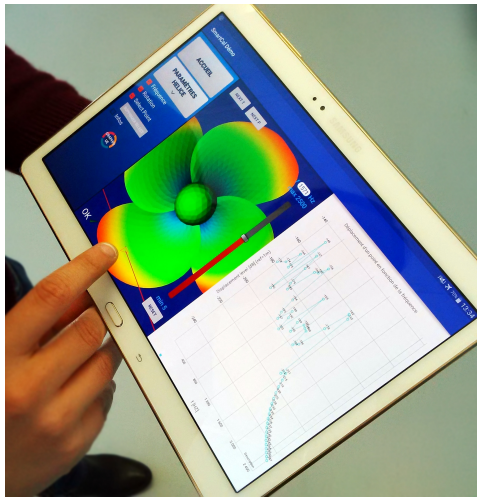


FIGURE 5 – Visualisation de l'application *SmartCal_DCNS*, dans laquelle est intégré un modèle d'ordre réduit paramétrique.

Afin de vérifier son caractère *online efficient*, le MOR paramétrique est implémenté au sein d'une tablette numérique. L'application résultante, de nature exploratoire et développée à des fins de recherche, est illustrée sur la Figure 5 pour une hélice immergée, dont le MOR paramétrique est détaillé dans [17]. L'architecture du programme est pensée de sorte à pouvoir afficher en temps réel la déformée de la structure, lorsque l'utilisateur fait varier les paramètres. Plus précisément, les matrices réduites (9) et la base spatiale, précalculées en amont sur station de travail, sont chargées au démarrage de l'application sur la tablette. L'utilisateur détermine les valeurs des paramètres via l'écran tactile ; le MOR paramétrique est ensuite résolu par le CPU de la tablette ; la déformée résultante est enfin transmise au GPU pour affichage et manipulations 3D en temps réel.

Références

- [1] A. Ammar, B. Mokdad, F. Chinesta, R. Keunings. *A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids*, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, vol. 139, 153-176, 2006.
- [2] A. Barbarulo, P. Ladeveze, H. Riou, L. Kovalevsky. *Proper generalized decomposition applied to linear acoustic : A new tool for broad band calculation*, Journal of Sound and Vibration, vol. 333, 2422-2431, 2014.

- [3] A. Bayliss, M. Gunzburger, E. Turkel. *Boundary conditions for the numerical solution of elliptic equations in exterior regions*, SIAM Journal on Applied Mathematics, vol. 42, 430-451, 1982.
- [4] S. Boyaval, C. LeBris, T. Lelièvre, Y. Maday, N. Nguyen, A. Patera. *Reduced basis techniques for stochastic problems*, Archives of Computational Methods in Engineering, vol. 17, 435-454, 2010.
- [5] T. Bui-Thanh, K. Willcox, O. Ghattas. *Model reduction for large-scale systems with high-dimensional parametric input space*, SIAM Journal on Scientific Computing, vol. 30, 3270-3288, 2008.
- [6] F. Casenave, A. Ern, T. Lelièvre. *A nonintrusive reduced basis method applied to aeroacoustic simulations*, Advances in Computational Mathematics, 1-26, 2014.
- [7] M. Chevreuil, A. Nouy. *Model order reduction based on proper generalized decomposition for the propagation of uncertainties in structural dynamics*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 89, 241-268, 2012.
- [8] M. Chevreuil, C. Leblond, A. Nouy, Y. Tampango, J.-F. Sigrist. *Une méthode de réduction de modèle basée sur l'échantillonnage pour le calcul d'une réponse vibro-acoustique aléatoire en basse fréquence*, CSMA 2015, 12e Colloque National en Calcul des Structures, Giens, 2015.
- [9] M. Chevreuil, Y. Tampango, C. Leblond, A. Nouy, J.-F. Sigrist. *Sampling-based model reduction method for the computation of low-frequency random vibro-acoustic response*, International Conference on Uncertainty Quantification in Computational Sciences and Engineering, Crete Island, 2015.
- [10] F. Chinesta, A. Leygue, F. Bordeu, J. Aguado, E. Cueto, D. Gonzalez, I. Alfaro, A. Ammar, A. Huerta. *PGD-based computational vademecum for efficient design, optimization and control*, Archives of Computational Methods in Engineering, vol. 20, 31-59, 2013.
- [11] Code_Aster Open Source - *General FEA software*, EDF R&D, www.code-aster.org.
- [12] EDF. *Elements vibro-acoustiques*, Documentation de code_aster V12, R4.02.02, 2013.
- [13] M. A. Grepl, A. T. Patera. *A posteriori error bounds for reduced-basis approximations of parametrized parabolic partial differential equations*, ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis, vol. 39, 157-181, 2005.
- [14] P. Holmes, J.L. Lumley, G. Berkooz, C.W. Rowley. *Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry, 2nd Edition*, Cambridge University Press, 2012.
- [15] C. Leblond, J.-F. Sigrist. *A versatile approach to the study of the transient response of a submerged thin shell*, Journal of Sound and Vibration, vol. 329, 56-71, 2010.
- [16] C. Leblond, C. Allery. *A priori space-time separated representation for the reduced order modeling of low Reynolds number flows*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 274, 264-288, 2014.
- [17] C. Leblond, J.-F. Sigrist. *A reduced basis approach for the parametric low frequency response of submerged viscoelastic structures*, Finite Elements in Analysis and Design, vol. 119, 15-29, 2016.
- [18] R. Ohayon. *Reduced symmetric models for modal analysis of internal structural-acoustic and hydroelastic-sloshing systems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 190, 3009-3019, 2001.
- [19] R. Ohayon, C. Soize. *Advanced computational dissipative structural acoustics and fluid-structure interaction in low- and medium-frequency domains. Reduced-order models and uncertainty quantification*, International Journal of Aeronautical and Space Sciences, vol. 13, 14-40, 2012.
- [20] D. Ryckelynck. *A priori hyperreduction method : an adaptive approach*, Journal of Computational Physics, vol. 202, 346-366, 2005.
- [21] Salome - *The Open Source Integration Platform for Numerical Simulation*, www.salome-platform.org.
- [22] J.-F. Sigrist. *Fluid-Structure Interaction : An Introduction to Finite Element Coupling*, Wiley, 2015.