

Approximation non biaisée par une méthode de type Nitsche pour le contact en petites et grandes déformations

Rabii MLIKA¹, Yves RENARD², Franz CHOULY³

¹ Université de Lyon, CNRS, INSA-Lyon, LaMCoS UMR5259, F-69621, Villeurbanne, France. email: rabii.mlika@insa-lyon.fr

² Université de Lyon, CNRS, INSA-Lyon, ICJ UMR5208, LaMCoS UMR5259, F-69621, Villeurbanne, France. email: Yves.Renard@insa-lyon.fr.

³ Laboratoire de Mathématiques de Besançon - UMR CNRS 6623, Université de Franche Comté, France. email: franz.chouly@univ-fcomte.fr

Résumé — Dans ce résumé, nous présentons une nouvelle formulation non biaisée du problème de contact frottant entre deux corps élastiques qui se base sur la méthode de Nitsche. Nous présentons, d'abord, l'étude faite en petites déformations pour la méthode non biaisée. Ensuite, nous introduisons une extension de la méthode de Nitsche pour les grandes déformations en hyper-élasticité pour les deux versions : biaisée ou non. La méthode est testée à travers plusieurs cas tests classiques.

Mots clés — contact en petites et grande déformations, méthode de Nitsche, formulation non biaisée.

Introduction

La plupart des méthodes numériques pour le problème de contact entre deux corps élastiques sont basées sur le paradigme maître/esclave. Celui-ci consiste à imposer les conditions de contact sur une seule surface. Il en résulte ainsi des difficultés de détection dans les cas de l'auto-contact et du contact multi-corps, où il peut être difficile, voire impossible, de définir a priori une surface maître et une esclave. Nous construisons alors une formulation non-biaisée du contact qui ne fait pas la différence entre ces deux surfaces.

Notre formulation est basée sur la méthode de Nitsche qui a été récemment étendue pour traiter le contact unilatéral en petites déformations. Cette méthode a l'avantage d'être consistante sans pour autant avoir recours à des multiplicateurs de Lagrange. Elle a été proposée par J. Nitsche dans [7] pour traiter les conditions de Dirichlet de manière faible puis adaptée au contact bilatéral dans [5]. Elle a ensuite été étendue pour traiter le contact unilatéral dans [9, 3] et le frottement de Tresca en [1].

Dans ce travail, nous présentons une version non biaisée de la méthode pour l'approximation du contact frottant entre deux corps élastiques. Cette version est d'abord formulée et testée en petites déformations dans le cadre de l'élasticité linéaire. Ce cadre restrictif nous permet d'obtenir des résultats théoriques sur la stabilité et la convergence de la méthode. Cette méthode de Nitsche est ensuite étendue au cadre des transformations élastiques, d'avantage pertinent pour les applications et les situations d'auto-contact. Cette méthode de Nitsche est formulée dans le cadre d'un matériau hyperélastique et avec frottement de Coulomb, et se décline en deux versions : biaisée et non-biaisée. Comme dans [3], nous décrivons une famille de méthodes (symétrique, non-symétrique, anti-symétrique) à l'aide d'un paramètre θ et chaque variante particulière a des propriétés différentes du point de vue numérique, en termes de précision et de robustesse. Trois cas-tests différents (contact de Hertz, demi-anneau élastique, tubes croisés) permettent de nous assurer des performances numériques de la méthode dans le cadre des grandes transformations.

1 Méthode non biaisée de Nitsche pour le contact et le frottement de Tresca dans le cadre des petites déformations

Nous considérons deux corps Ω^i pouvant entrer en contact via leurs surfaces Γ_C^i . Afin d'obtenir une formulation non biaisée du problème de contact nous prescrivons les conditions de contact déduites du problème de Signorini et les conditions de frottement de Tresca sur les deux surfaces Γ_C^i d'une manière symétrique et nous allons intégrer sur chacune d'elles. La dérivation d'une méthode de type Nitsche provient d'une reformulation des conditions de contact sous forme d'une seule équation (voir par exemple

[2] et [3]). De même, une simple adaptation au frottement de Tresca est proposé dans [1]. Si on note $\sigma_n^i(\mathbf{u}^i)$ la contrainte normale sur le bord de contact du corps (i) et $[[u]]_n^i$ le saut normal de déplacement entre les deux surfaces calculé sur le bord Γ_C^i , on démontre que les conditions de contact et de frottement inscrites sur les deux surfaces de contact sont équivalentes aux deux équations (1) et (2).

$$\sigma_n^i(\mathbf{u}^i) = [\sigma_n^i(\mathbf{u}^i) - \gamma^i [[u]]_n^i]_{\mathbb{R}_-}, \quad (1)$$

où, γ est réel positif (on l'appellera paramètre de Nitsche) et $[a]_{\mathbb{R}_-}$ indique la partie négative d'un réel $a \in \mathbb{R}$.

De même, dans [1], en notant $\sigma_t(\mathbf{u}^i)$ la contrainte tangentielle et $[[\mathbf{u}]]_t^i$ le saut tangentiel de déplacement sur le bord de contact, la condition de frottement de Tresca est équivalente à l'équation :

$$\sigma_t(\mathbf{u}^i) = [\sigma_t(\mathbf{u}^i) - \gamma^i [[\mathbf{u}]]_t^i]_{s^i}, \quad (2)$$

où s^i est le seuil de frottement de Tresca. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^+$, la notation $[\cdot]_\alpha$ fait référence à la projection orthogonale sur la boule fermée $\mathcal{B}(0, \alpha) \subset \mathbb{R}^{d-1}$, centrée à l'origine et de rayon α .

L'utilisation de la méthode de Nitsche nous permet de diviser l'effort de contact équitablement sur les deux surfaces de contact en utilisant la loi d'action-réaction. Ensuite, nous utilisons la formule de Green et toutes les équations d'équilibre et les conditions aux limites pour avoir la formulation éléments finis non biaisée (3) dans laquelle le contact et le frottement sont imposés faiblement sur les deux surfaces de contact Γ_C^i d'une manière symétrique.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u}^h \in \mathbf{V}^h \text{ tel que,} \\ A_{\theta\gamma}^{1,2}(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_C^i} \frac{1}{\gamma^i} [P_{n,1\gamma^i}^i(\mathbf{u}^h)]_{\mathbb{R}_-} P_{n,\theta\gamma^i}^i(\mathbf{v}^h) d\Gamma \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_C^i} \frac{1}{\gamma^i} [\mathbf{P}_{t,1\gamma^i}^i(\mathbf{u}^h)]_{s^i} \cdot \mathbf{P}_{t,\theta\gamma^i}^i(\mathbf{v}^h) d\Gamma = L(\mathbf{v}^h), \quad \forall \mathbf{v}^h \in \mathbf{V}^h, \end{array} \right. \quad (3)$$

avec :

$$P_{n,\theta\gamma}^i(\mathbf{v}) = \theta \sigma_n^i(\mathbf{v}^i) - \gamma^i [[v]]_n^i, \quad \text{et} \quad \mathbf{P}_{t,\theta\gamma}^i(\mathbf{v}) = \theta \sigma_t^i(\mathbf{v}^i) - \gamma^i [[\mathbf{v}]]_t^i,$$

et

$$A_{\theta\gamma}^{1,2}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^2 \left(\int_{\Omega^i} \sigma(\mathbf{u}^i) : \varepsilon(\mathbf{v}^i) d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_C^i} \frac{\theta}{\gamma^i} \sigma^i(\mathbf{u}^i) \mathbf{n}^i \cdot \sigma^i(\mathbf{v}^i) \mathbf{n}^i d\Gamma \right).$$

Le paramètre θ permet de retrouver des variantes qui possèdent des propriétés théoriques et numériques différentes (voir [3]). Par exemple, quand $\theta = 1$ la méthode est symétrique. Pour $\theta = 0$ la méthode est stable et assez simple, mais elle n'est pas symétrique. Et quand $\theta = -1$, on obtient une méthode plus robuste qui converge indépendamment du paramètre de Nitsche γ .

Pour prouver l'efficacité de la méthode, quelques analyses mathématiques ont été faites. Nous montrons, dans un premier temps, l'équivalence formelle entre les formulations forte et variationnelle pour le problème continu. Étant donné que la construction de la méthode consiste en particulier à séparer les conditions de contact en deux parties, cette étape est nécessaire pour assurer la cohérence de la formulation. Nous montrons également la consistance, qui provient de la consistance de la méthode de Nitsche, et aussi, l'existence et l'unicité d'une solution et la convergence optimale de la méthode pour la norme H^1 pour γ suffisamment grand. Si $\theta = -1$, aucune condition sur γ n'est requise pour assurer l'existence et l'unicité d'une solution et la convergence optimale.

Pour tester la méthode, une validation numérique a été faite à travers le test de Hertz en deux et trois dimensions. Les tests comportent une étude de convergence pour les différentes valeurs du paramètre de généralisation θ et du paramètre de Nitsche γ . À titre d'exemple, nous présentons dans la Figure.1 la courbe de convergence pour la méthode avec $\theta = 0$ et $\gamma = 100E$.

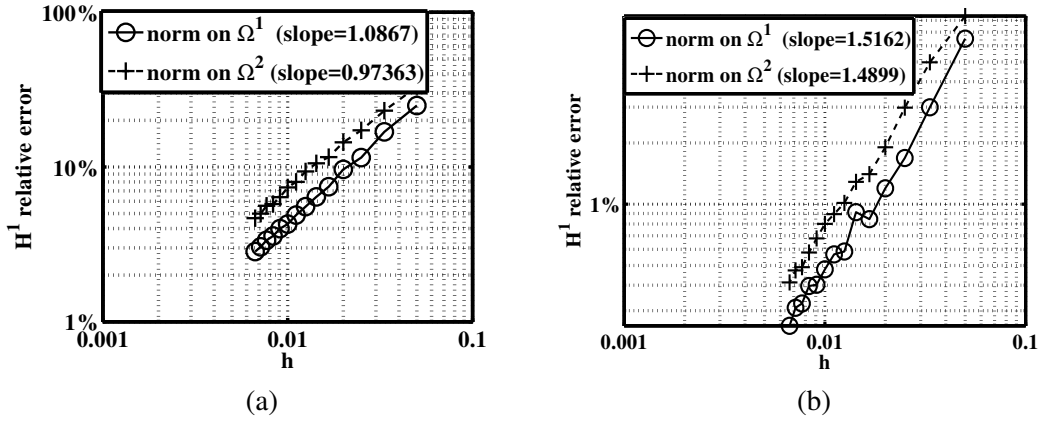


FIGURE 1 – Courbe de convergence en 2D pour la méthode $\theta = 0$ et la norme H^1 de l'erreur relative, avec $\gamma_0 = 100$ et des éléments finis P_1 (a) et P_2 (b).

Comme prévu par l'analyse mathématique la convergence est obtenue avec des taux optimaux. L'environnement open source Getfem ++¹ a été utilisé pour effectuer les tests. Tous les détails de la construction et des analyses de la méthode ainsi que les résultats numériques sont donnés dans l'article [4].

2 Méthode de Nitsche en grandes déformations

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble ouvert borné qui présente la configuration de référence. Ω représente, cette fois, tout les corps susceptibles d'entrer en contact (un seul pour l'auto-contact) et Γ_c est l'union de toutes les surfaces de contact dans la configuration de référence

. La configuration déformée Ω^t est définie à travers la transformation ϕ qui relie tout point X de la configuration de référence au point $x \in \Omega^t$. On définit ainsi le déplacement u par rapport à la configuration de référence par : $u(X) = \phi(X) - X$.

Pour étendre notre méthode au frottement de Coulomb, on considère un processus quasi-statique et le cas statique sera traité comme un cas particulier.

Étant donné que le choix d'une loi de comportement n'est pas central dans l'approximation proposée du contact, nous allons considérer une énergie potentielle globale $J(u)$ dépendante du potentiel hyperélastique $W(\mathbf{F})$. Notons, par ailleurs, le premier tenseur de Piola-Kirchhoff

$$\hat{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{F}),$$

qui sert à définir la contrainte de contact : $\hat{\sigma}_N = \hat{\sigma}(u)N_x$ en $\partial\Omega$. En définissant une fonction de mapping qui relie un point x d'une surface de contact à son projeté $y \in \Gamma_c^t$, on peut définir la fonction de gap $g(u)$. Cette fonction va dépendre du choix du mapping et ainsi ce choix influence naturellement notre méthode. Dans l'article [8] deux stratégies de mapping sont introduites : la projection et le lancé de rayon puis une comparaison entre les deux est donnée.

Dans ce formalisme les conditions de contact sont :

$$g(u) \geq 0 \tag{4a}$$

$$\hat{\sigma}_n(u) \leq 0 \quad \text{sur } \Gamma_c. \tag{4b}$$

$$\hat{\sigma}_n(u)g(u) = 0 \tag{4c}$$

Et celle de frottement de Coulomb sont :

$$\begin{cases} \|\hat{\sigma}_t(u)\| \leq -\mathcal{F}\hat{\sigma}_n(u) & \text{si } v = 0, \\ \hat{\sigma}_t(u) = \mathcal{F}\hat{\sigma}_n(u) \frac{v}{\|v\|} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{5}$$

1. <http://download.gna.org/getfem/html/homepage/index.html>

avec v une vitesse définie de façon objective. En considérant le cadre quasi-statique, v peut s'écrire :

$$v(X) = -\frac{1}{\Delta t}(\varphi_0(X) - \varphi_0(Y) + gn_0).$$

Comme en petites déformations, les conditions de contact et de frottement (4) et (5) sont équivalentes à l'équation (6) qui intègre les conditions de contact dans sa composante normale et les conditions de frottement dans la composante tangentielle :

$$C_{\gamma, \mathcal{F}}(\hat{\sigma}_N, g, v, n_x) = \hat{\sigma}_N, \quad (6)$$

où $C_{\gamma, \mathcal{F}}$ est un opérateur non linéaire défini par :

$$C_{\gamma, \mathcal{F}}(\sigma, g, v, n) = -[\sigma \cdot n + \gamma g]_{\mathbb{R}^-} n + \mathcal{P}_{B(n, \mathcal{F}[\sigma \cdot n + \gamma g]_{\mathbb{R}^-})}(\sigma - \gamma v).$$

$\mathcal{P}_{B(n, \tau)}$ est la composition d'une projection sur le plan tangent correspondant à la normale n et la projection sur la boule de rayon τ , i.e. :

$$\mathcal{P}_{B(n, \tau)}(q) = \begin{cases} \mathbf{T}_n q & \text{si } \|\mathbf{T}_n q\| \leq \tau, \\ \tau \frac{\mathbf{T}_n q}{\|\mathbf{T}_n q\|} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (7)$$

En considérant l'équilibre et le pincipe d'action réaction en x et y , on obtient le problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{D}J(u)[\delta u] - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_c} \frac{\theta}{\gamma} \hat{\sigma}_N(u) \cdot \mathcal{D}\hat{\sigma}_N(u)[\delta u] d\Gamma \\ + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_c} \frac{1}{\gamma} C_{\gamma, \mathcal{F}}(\hat{\sigma}_N, g, v, n_x) \cdot \mathcal{D}\left(\theta \hat{\sigma}_N + \gamma(u(Y) - u(X))\right)[\delta u] d\Gamma = 0 \quad \forall \delta u \in V_0, \end{cases} \quad (8)$$

θ étant un paramètre réel qui, comme en petites déformation, sert à généraliser la méthode.

Ce problème correspond à une méthode non biaisé où on intègre sur toutes les surfaces de contact Γ_c .

Une formulation plus complète de la méthode ainsi qu'une preuve qu'elle dérive d'un potentiel d'énergie dans sa version symétrique ($\theta = 1$) sont données dans l'article [6]

Remark 2.1. Une version biaisée de notre méthode de Nitsche pourrait être directement déduite en divisant le domaine Ω en deux corps Ω^1 et Ω^2 et la surface de contact Γ_c en une surface maître Γ_c^M et une esclave Γ_c^S . Dans ce cas, le facteur $\frac{1}{2}$ va disparaître lors de l'application de la deuxième loi de Newton (action-réaction) parce que l'intégration va être appliquée seulement sur la surface esclave. Dans ce cas, la méthode s'écrit :

$$\begin{cases} \mathcal{D}J(u)[\delta u] - \int_{\Gamma_c^S} \frac{\theta}{\gamma} \hat{\sigma}_N(u) \cdot \mathcal{D}\hat{\sigma}_N(u)[\delta u] d\Gamma \\ + \int_{\Gamma_c^S} \frac{1}{\gamma} C_{\gamma, \mathcal{F}}(\hat{\sigma}_N, g, v, n_x) \cdot \mathcal{D}\left(\theta \hat{\sigma}_N + \gamma(u(Y) - u(X))\right)[\delta u] d\Gamma = 0 \quad \forall \delta u \in V_0. \end{cases} \quad (9)$$

Remark 2.2. L'avantage essentiel de la méthode proposée est qu'elle est consistante sans ajout de variables supplémentaires. Mais l'inconvénient le plus important de cette méthode est l'utilisation de la loi de comportement ainsi que sa dérivée. Le problème tangent fait alors intervenir la dérivée seconde de la loi de comportement, via le terme $\mathcal{D}^2 \hat{\sigma}_N(u)[\delta u, \Delta u]$. Ce terme peut être difficile à expliciter pour des lois de comportement complexes. Il n'apparaît cependant plus lorsque $\theta = 0$, ce qui rend cette variante plus attractive du point de vue de l'implémentation.

3 Validation numérique

La méthode proposée a été implémentée sous GetFEM++ et testée à travers quelques tests classique. Les différents tests et les résultats sont détaillés dans [6].

3.1 Contact de Hertz

Parmi ces tests, le test de contact de Hertz permet de vérifier la capacité de la méthode à approximer un profil de pression de contact connue avec un nombre limité de points de point d'intégration. Comme en petites déformations la convergence de la méthode est influencée par la valeur du paramètre de Nitsche γ et cette influence dépend de la valeur de θ (voir [3, 4]). On teste alors la méthode pour différentes valeurs de γ et θ pour vérifier son comportement et sa robustesse. Le tableau 1 résume les résultats de convergence pour un matériau de Saint-venant Kirchhoff et 3 points d'intégrations. Il est remarquable

TABLE 1 – Erreur moyenne de pression de contact et nombre moyen d'iterations de Newton sur les 10 étapes de chargement pour les différents cas.

Sans frottement				Coefficient de frottement= 0.3			
Valeur de θ	Paramètre de Nitsche	Iterations de Newton	Erreur moyenne de pression(en %)	Valeur de θ	Paramètre de Nitsche	Iterations de Newton	Erreur moyenne de pression(en %)
0	$\frac{E}{100}$	7.24	17	0	$\frac{E}{100}$	8.5	14.4
	E	3.5	2.4		E	4.6	2.4
	$100 \cdot E$	4.6	2.7		$100 \cdot E$	20.7	6.8
-1	$\frac{E}{100}$	4.8	3.7	-1	$\frac{E}{100}$	5.3	3.3
	E	4.3	3.0		E	4.3	3.1
	$100 \cdot E$	4.6	4.1		$100 \cdot E$	9.2	4
1	$\frac{E}{100}$	14.8	54.8	1	$\frac{E}{100}$	29.8	59
	E	26.8	52.2		E	30	64
	$100 \cdot E$	4	4.2		$100 \cdot E$	11.2	4.1

que la version $\theta = -1$ est plus robuste et converge avec toutes les valeurs de γ . Cette propriété démontrée théoriquement dans le cadre des petites déformations est alors vérifiée numériquement pour les grandes déformations. La version symétrique $\theta = 1$ est la plus sensible et ne converge que pour γ élevé. En comparant $\theta = 0$ à $\theta = 1$, on remarque que la version simple ($\theta = 0$) est plus robuste par rapport à γ même si on perd également la convergence quand γ est faible. Les mêmes observations sont conclues avec ou sans frottement. Nous mentionnons, aussi, que quand γ est très élevé la convergence est plus difficile à obtenir, surtout avec frottement. Cela est dû au fait que, quand γ est élevé, le problème devient raide et mal conditionné.

3.2 Demi-anneau élastique

Le deuxième test présenté est le test d'écrasement d'un demi-anneau élastique contre un bloc élastique. le demi-anneau est composé de deux couches d'une rigidité différente. Cet exemple nous permet de tester la précision de la méthode de Nitsche avec des matériaux hétérogènes et des forces de frottement élevées. On utilise une loi d'hyperélasticité Neo-Hookeène et un paramètre de Nitsche $\gamma = E$. Pour sa simplicité nous utilisons la version $\theta = 0$.

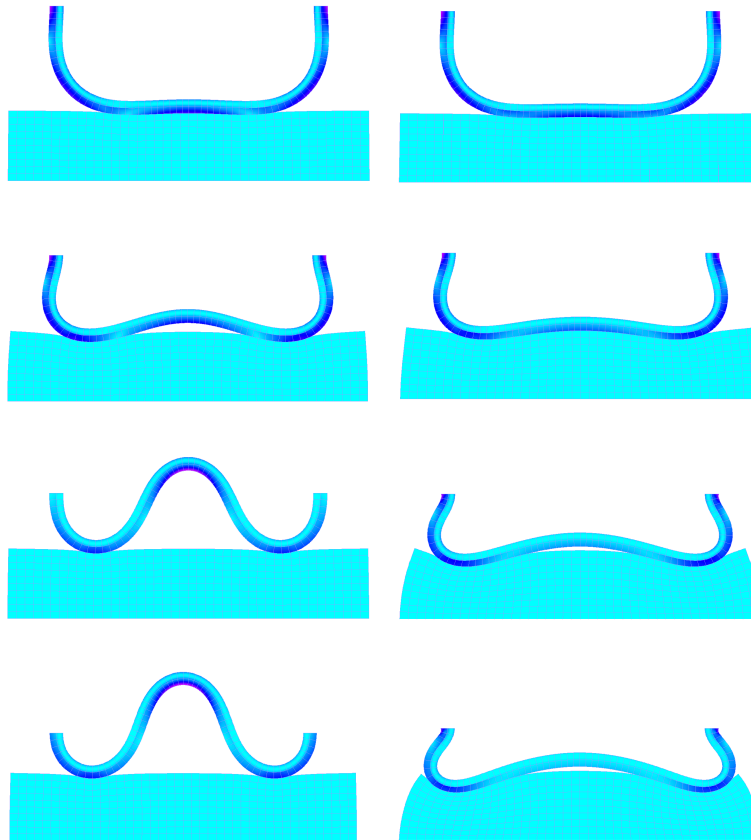
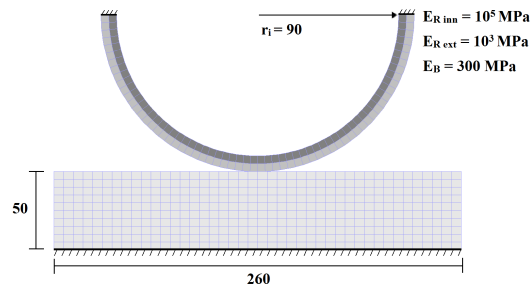


FIGURE 2 – Déformation du demi-anneau avec et sans frottement : $\mathcal{F} = 0$ (gauche) et $\mathcal{F} = 0.5$ (droite) avec des EF quadratiques pour un déplacement vertical imposé de 25, 45, 60 et 70 mm.

Pour comparer la déformation obtenue avec ce qui a été obtenu avec d'autres méthodes, nous mesurons le déplacement vertical du point médian de l'anneau. Ce déplacement est tracé sur la Fig. 3 le long des étapes de chargement avec et sans frottement.

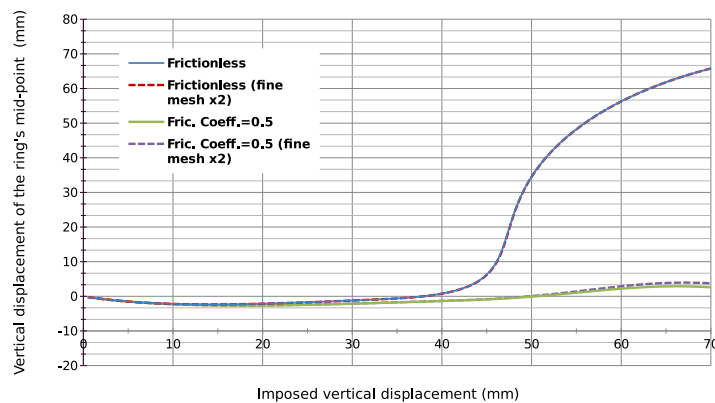


FIGURE 3 – Déplacement vertical du point milieu du demi-anneau avec des tailles de maillages différentes.

3.3 Tubes croisés

Le dernier exemple numérique présenté est le test des tubes croisés. Dans cet exemple, nous simulons le contact entre deux cylindres élastiques creux croisés. Étant donné que le déplacement imposé est grand, les déformations des tubes sont très importantes et on observe une configuration d'auto-contact dans le tube le moins rigide. Ce test nous permet donc de valider notre modèle pour le cas d'auto-contact.

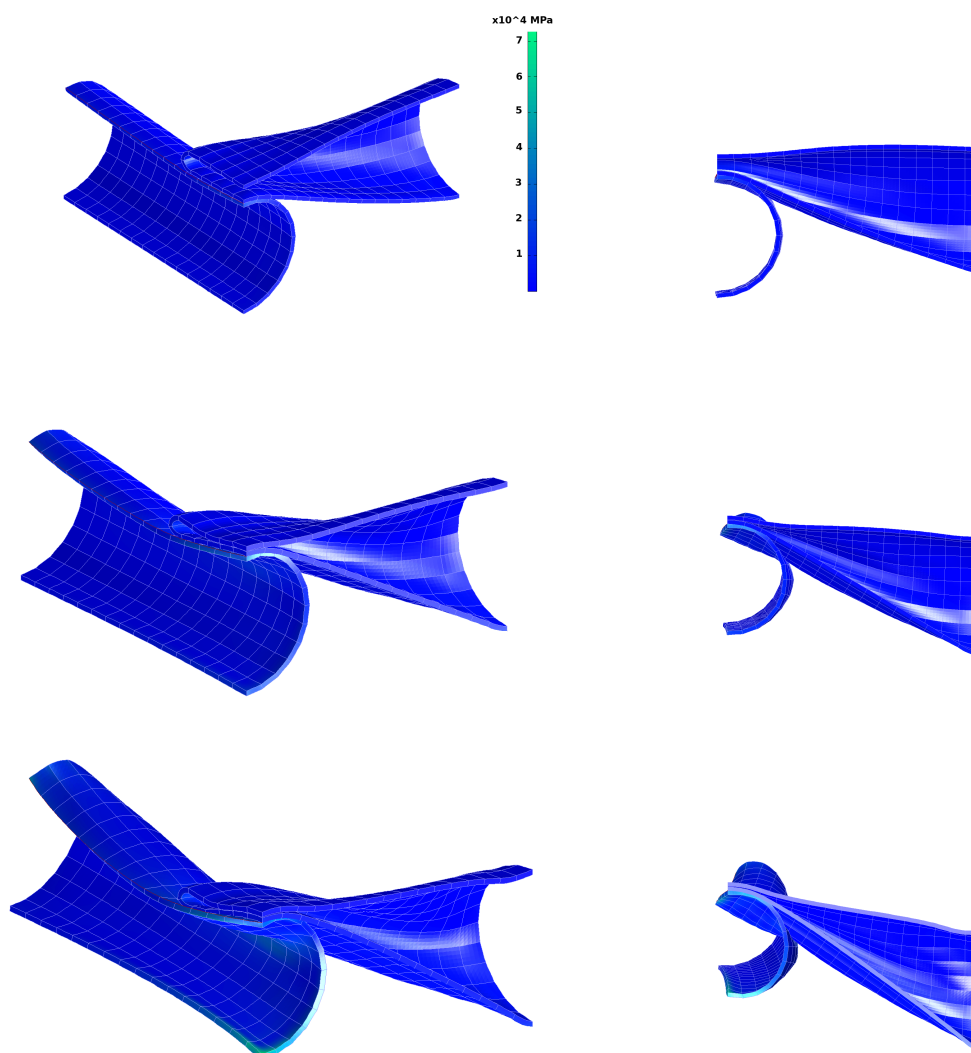


FIGURE 4 – Déformation et pression de Von-Mises des deux tubes sans frottement et pour un déplacement de 20, 30 et 40 mm avec $\gamma = E$ et $\theta = 0$.

Conclusion et perspectives

La méthode de Nitsche est une méthode prometteuse pour le traitement du contact et du frottement puisqu'elle est une méthode primale qui a l'avantage d'être consistante. Une étude complète de cette méthode a été faite pour le problème de Signorini. Dans ce résumé nous avons présenté une formulation de la méthode pour le problème de contact avec deux corps élastiques dans un formalisme non biaisé qui permet une adaptation directe au problème d'auto-contact. Après avoir formulé et testé cette méthode en petite déformations nous avons construit une adaptation de la méthode de Nitsche aux grandes déformations. La généralisation au cadre des grandes déformations et du frottement de coulomb permet la validation de la méthode pour des tests plus élaborés et sa valorisation dans un contexte industriel. L'application de la méthode non-biasée au problème d'auto-contact est alors testée. Les études à venir traiteront l'analyse numérique de la méthode dans certaines situations où les résultats manquent, comme le contact en élastodynamique, ou en plasticité. Nous envisageons aussi une extension de la méthode pour d'autres types de conditions aux limites non linéaires tel que l'adhésion.

Références

- [1] F. Chouly *An adaptation of Nitsche's method to the Tresca friction problem*, J. Math. Anal. App., 411, 329-339, 2014.
- [2] F. Chouly and P. Hild *Nitsche-based method for unilateral contact problems : numerical analysis*, SIAM J. Numer. Anal., 51, 1295-1307, 2013.
- [3] F. Chouly, P. Hild and Y. Renard *Symmetric and non-symmetric variants of Nitsche's method for contact problems in elasticity : theory and numerical experiments*, Math. Comp., 1089-1112, 2015.
- [4] F. Chouly, R. Mlika and Y. Renard *An unbiased Nitsche's approximation of the frictional contact between two elastic structures*, Submitted, Available on HAL as hal-01240068.
- [5] A. Hansbo and P. Hansbo, *A finite element method for the simulation of strong and weak discontinuities in solid mechanics*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 193, 3523-3540, 2004.
- [6] R. Mlika, Y. Renard and F. Chouly *An unbiased Nitsche's formulation of large deformation frictional contact and self-contact*, Submitted.
- [7] J. Nitsche, *Über ein Variationsprinzip zur Lösung von Dirichlet-Problemen bei Verwendung von Teilräumen, die keinen Randbedingungen unterworfen sind.*, Abh. Math. Semin. Univ. Hamb., 36, 9-15, 1971.
- [8] K. Poullos and Y. Renard, *An unconstrained integral approximation of large sliding frictional contact between deformable solids*, Computers and Structures, 153, 75-90, 2015.
- [9] P. Wriggers and G. Zavarise, *A formulation for frictionless contact problems using a weak form introduced by Nitsche*, Comput. Mech., 41, 2008.