

# Analyse de stabilité des systèmes frottants : Exploitation d'une technique de perturbation pour des études multi-paramétriques

F. Massa<sup>1</sup>, I. Turpin<sup>2</sup>, T. Tison<sup>1</sup>

<sup>1</sup> LAMIH UMR CNRS/UVHC 8201, Université de Valenciennes, {franck.massa,thierry.tison}@univ-valenciennes.fr

<sup>2</sup> LAMAV EA 4015, Université de Valenciennes, isabelle.turpin@univ-valenciennes.fr

**Résumé** — Cet article porte sur l'analyse de la stabilité des systèmes mécaniques frottants dans un contexte d'étude multi-paramétrique. Tout d'abord, l'objectif est de discuter de l'intégration d'une technique de perturbation pour enrichir la base de projection utilisée lors de la résolution du problème quadratique aux valeurs propres. Ensuite nous proposons d'étendre cette proposition pour des cas intégrant des modifications structurelles. Finalement une application numérique, dédiée à l'analyse du crissement, est proposée pour illustrer les premiers résultats.

**Mots clés** — Analyse de stabilité, problème quadratique aux valeurs propres, technique de perturbation.

## 1 Introduction

La prédiction des instabilités induites par le frottement est un enjeu majeur pour les acteurs du secteur du transport. On peut citer, par exemple, les problématiques liées au crissement des systèmes de freinage [5], où l'on souhaite garantir des prestations de confort acoustique et éviter ainsi des retours clients négatifs. Pour y parvenir, la simulation numérique est un outil incontournable pour investiguer cette catégorie de problèmes dynamiques non linéaires. Toutefois, de par la nature fugace de ce type de phénomène, la tendance actuelle est d'avoir recours, en parallèle, à des stratégies d'étude multi-paramétriques (plans d'expérience [5], approches non déterministes [6], optimisation [3] ou analyse de sensibilité [2, 4]) afin de garantir une plus grande robustesse du système étudié.

Dans un cadre déterministe, la voie la plus utilisée pour étudier la stabilité de systèmes mécaniques frottants repose sur une analyse fréquentielle. Cette approche est en effet moins coûteuse en temps de calcul qu'une solution temporelle non linéaire. L'approche fréquentielle apparaît donc plus adaptée en phase de conception de produits faisant appel à des modèles numériques de plus en plus complexes. En contrepartie, la qualité des résultats obtenus dépend clairement de la position d'équilibre statique utilisée pour déterminer les solutions propres complexes, qui sont utilisées pour détecter l'instabilité.

Pour résoudre un problème aux valeurs propres complexes, on a généralement recours à une phase de projection sur les modes propres du système conservatif associé afin de réduire la taille du système, puis on utilise des algorithmes de résolution de type QZ. Dans cet article, on propose d'étendre la matrice de projection en intégrant des contributions relatives au couplage à l'interface de contact et à l'amortissement en utilisant une technique de perturbation, puis d'utiliser cette méthode dans un contexte multi-paramétrique en réanalysant les solutions modifiées à partir de données nominales et de perturbations en terme de masse, d'amortissement et de rigidité. L'objectif est d'une part d'améliorer la précision des solutions notamment lorsque l'amortissement est important et, d'autre part, de diminuer le coût numérique des analyses paramétriques.

## 2 Analyse de stabilité et problème aux valeurs propres complexes

Considérons un problème quadratique aux valeurs propres, défini par l'équation (1), permettant d'investiguer la stabilité d'un système mécanique frottant, modélisé par la méthode des éléments finis :

$$(\mathbf{K} + s_i \mathbf{C} + s_i^2 \mathbf{M}) \psi_i = 0 \quad \text{avec } i = 1, \dots, n_{mod, \mathbb{C}}. \quad (1)$$

où  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{K}$  sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité de la structure étudiée. La taille de ces matrices est  $[n_{dof} \times n_{dof}]$  avec  $n_{dof}$  le nombre de degré de liberté du modèle numérique.  $\psi_i$  représente, quant à lui, le  $i^{ième}$  vecteur propre associé à la  $i^{ième}$  valeur propre  $s_i$ .  $n_{mod, \mathbb{C}}$  est le nombre de solutions propres complexes étudiées. Dans le cas présent, les matrices sont non symétriques par le fait qu'elles intègrent une contribution spécifique relative au couplage avec frottement à l'interface de contact.

Pour résoudre cette catégorie de problèmes dans le cas de matrices de grande taille, la méthode classique, implémentée dans les codes industriels, repose, d'une part, sur la réécriture de l'équation (1) comme un problème linéaire aux valeurs propres (Equation 2) de taille  $[2n_{mod, \mathbb{R}} \times 2n_{mod, \mathbb{R}}]$ , où chaque matrice éléments finis a été réduite en considérant une projection sur une famille de vecteurs (Equations 3 et 4) composés des premiers modes propres du système conservatif associé (Equation 5).  $n_{mod, \mathbb{R}}$  est le nombre de modes propres réels retenus pour la projection. D'autre part, le système réduit, ainsi construit, est résolu grâce un algorithme de type QZ.

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{B}\mathbf{u}_i, \quad (2)$$

où

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^T \mathbf{C} \mathbf{T} & \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T} \\ \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{u}_i = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_i \\ s_i \tilde{\psi}_i \end{pmatrix}, \quad (3)$$

et

$$\psi_i = \mathbf{T} \tilde{\psi}_i \text{ avec } \mathbf{T} = [\phi_1 \dots \phi_{n_{mod, \mathbb{R}}}], \quad (4)$$

$$\mathbf{K}_S \phi_i - \omega_i^2 \mathbf{M}_S \phi_i = \mathbf{0} \text{ avec } i = 1, \dots, n_{mod, \mathbb{R}}, \quad (5)$$

avec  $\omega_i$  et  $\phi_i$  respectivement les  $i^{ième}$  pulsations et vecteurs propres réels.  $\mathbf{M}_S$  et  $\mathbf{K}_S$  les contributions symétriques des matrices de masse  $\mathbf{M}$  et de rigidité  $\mathbf{K}$ .

### 3 Technique de perturbations pour le problème nominal

Dans ce paragraphe, on propose de revoir la composition de la matrice de projection  $\mathbf{T}$  afin d'améliorer l'erreur commise lors du calcul des solutions propres complexes en présence d'un amortissement élevé.

Tout d'abord, nous décomposons les matrices de masse et de rigidité [1] en deux contributions symétriques et non symétriques, désignées respectivement par les indices  $S$  et  $A$  (Equations 6 et 7) :

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_S + \varepsilon \mathbf{M}_A, \quad (6)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_S + \varepsilon \mathbf{K}_A, \quad (7)$$

où  $\varepsilon$  est une variable additionnelle associée à la contribution non symétrique, qui peut être assimilée dans le cas présent à une perturbation de l'état couplé sans frottement.

L'amortissement est traité différemment dans le but de le faire apparaître comme une perturbation du problème conservatif. De cette manière, les algorithmes standard de type Lanczos sont applicables à l'ordre zéro. La matrice d'amortissement est alors uniquement définie comme une contribution non symétrique (Equation 8) telle que :

$$\mathbf{C} = \varepsilon \mathbf{C}_A \quad (8)$$

Chaque solution propre complexe est ensuite développée en série [1] en définissant une contribution nominale et des contributions d'ordre élevées, respectivement représentées par les exposants  $(0)$  et  $(j)$ , telle que :

$$s_i = s_i^{(0)} + \varepsilon^1 s_i^{(1)} + \dots + \varepsilon^j s_i^{(j)} + \dots + \varepsilon^{n_1} s_i^{(n_1)}, \quad (9)$$

$$\psi_i = \psi_i^{(0)} + \varepsilon^1 \psi_i^{(1)} + \dots + \varepsilon^j \psi_i^{(j)} + \dots + \varepsilon^{n_1} \psi_i^{(n_1)}, \quad (10)$$

où  $n_1$  est l'ordre de troncature de la série.

Après avoir intégré les équations (6) à (10) dans l'équation (1), les différents ordres des vecteurs propres peuvent être identifiés à partir du paramètre  $\varepsilon$ .

Pour l'ordre 0, nous obtenons un problème linéaire aux valeurs propres correspondant au cas conservatif et dépendant des matrices symétriques du problème définies par les équations 11 et 12 :

$$\left( \mathbf{K}_S + \mathbf{s}_i^{(0)2} \mathbf{M}_S \right) \boldsymbol{\Psi}_i^{(0)} = 0, \quad (11)$$

$$s_i^{(0)} = jw_i^{(0)}. \quad (12)$$

Les solutions propres  $w_i^{(0)}$  et  $\boldsymbol{\Psi}_i^{(0)}$  sont à valeurs réelles et sont déterminées en utilisant un solveur de type Lanczos. Une normalisation en masse est classiquement ajoutée (Equation 13) :

$$\boldsymbol{\Psi}_i^{(0)T} \mathbf{M}_S \boldsymbol{\Psi}_i^{(0)} = \mathbf{1}. \quad (13)$$

Concernant les termes d'ordre élevé, les vecteurs perturbés pour un  $j^{\text{ème}}$  ordre sont déterminés grâce aux équations développées ci-dessous :

$$\left( \mathbf{K}_S + \mathbf{s}_i^{(0)2} \mathbf{M}_S \right) \boldsymbol{\Psi}_i^{(j)} + \left( 2\mathbf{s}_i^{(0)} \mathbf{M}_S \boldsymbol{\Psi}_i^{(0)} \right) s_i^{(j)} + \mathbf{G}_i^{(j)} = \mathbf{0}, \quad (14)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_i^{(j)} = & \mathbf{K}_A \boldsymbol{\Psi}_i^{(j-1)} + \mathbf{C}_A \left( \sum_{k=0}^{m=j-1} \boldsymbol{\Psi}_i^{(k)} s_i^{(m-k)} \right) + \mathbf{M}_A \left( \sum_{k=0}^{m=j-1} \left( \sum_{l=0}^{p=m-k} s_i^{(l)} s_i^{(p-1)} \right) \boldsymbol{\Psi}_i^{(k)} \right) \\ & + \mathbf{M}_S \left( \sum_{k=0}^{m=j-2} \left( \sum_{l=1}^{p=m-k+1} s_i^{(l)} s_i^{(p-1+1)} \right) \boldsymbol{\Psi}_i^{(k)} \right), \end{aligned} \quad (15)$$

et

$$\mathbf{F}_i^{(j)} = - \left( 2\mathbf{s}_i^{(0)} \mathbf{M}_S \boldsymbol{\Psi}_i^{(0)} \right) s_i^{(j)} - \mathbf{G}_i^{(j)}, \quad (16)$$

$$\left( \mathbf{K}_S + \mathbf{s}_i^{(0)2} \mathbf{M}_S \right) \boldsymbol{\Psi}_i^{(j)} = \mathbf{F}_i^{(j)}, \quad (17)$$

$$s_i^{(j)} = \frac{-\boldsymbol{\Psi}_i^{(0)T} \mathbf{G}_i^{(j)}}{2s_i^{(0)}}, \quad (18)$$

$$\boldsymbol{\Psi}_i^{(j)} = \sum_{z=1}^{n_{\text{mod}}} c_z^{(j)} \boldsymbol{\Psi}_z^{(0)} + \mathbf{K}_S^{-1} \mathbf{F}_i^{(j)} - \sum_{z=1}^{n_{\text{mod}}} \frac{\boldsymbol{\Psi}_z^{(0)T} \mathbf{F}_i^{(j)}}{\mathbf{w}_z^{(0)2}} \boldsymbol{\Psi}_i^{(0)}. \quad (19)$$

Enfin

$$c_z^{(j)} = \frac{(\boldsymbol{\Psi}_z^{(0)})^T \mathbf{F}_i^{(j)}}{(w_z^{(0)})^2 - (w_i^{(0)})^2}, \quad \text{for } i \neq z, \quad (20)$$

$$c_z^{(j)} = H_i^{(j)}, \quad \text{for } i = z, \quad (21)$$

$$H_i^{(j)} = -\boldsymbol{\Psi}_i^{(0)T} \mathbf{M}_A \boldsymbol{\Psi}_i^{(j-1)}. \quad (22)$$

En considérant les développements établis précédemment, il est alors possible de construire la matrice de projection T à partir des vecteurs propres nominaux du système conservatif et des premiers vecteurs propres d'ordre élevé.

Comme ces derniers sont à valeurs complexes, les contributions réelles et imaginaires sont intégrées séparément au sein de la matrice de projection selon l'expression 23 :

$$T = \begin{bmatrix} \Psi_1^{(0)} & \dots & \Psi_{n_{mod},\mathbb{C}}^{(0)} & \Re(\Psi_1^{(1)}) & \dots & \Re(\Psi_{n_{mod},\mathbb{C}}^{(1)}) & \Im(\Psi_1^{(1)}) & \dots & \Im(\Psi_{n_{mod},\mathbb{C}}^{(1)}) \end{bmatrix}. \quad (23)$$

La matrice de projection, dont la taille est  $[n_{dof} \times ((2 \times n_1 + 1) \times n_{mod,\mathbb{C}})]$ , doit être orthonormalisée pour garantir une bonne approximation des solutions étudiées. La taille du problème final à résoudre est donc  $(((2 \times n_1 + 1) \times n_{mod,\mathbb{C}}) \times ((2 \times n_1 + 1) \times n_{mod,\mathbb{C}}))$

## 4 Technique de perturbations pour le problème perturbé

Considérons maintenant un contexte d'étude multi-paramétriques, où le problème aux valeurs propres complexes doit être résolu à plusieurs reprises en considérant des variations matérielles, géométriques ou relatives à l'interface de contact du modèle. Ces variations engendrent une modification des matrices de masse, d'amortissement et de rigidité et donc la définition de problèmes modifiés.

Définissons le problème modifié en utilisant les exposants  $^{(m)}$  :

$$\left( s_i^{(m)2} \mathbf{M}^{(m)} + \mathbf{s}_i^{(m)} \mathbf{C}^{(m)} + \mathbf{K}^{(m)} \right) \Psi_i^{(m)} = 0. \quad (24)$$

Pour résoudre l'équation (24), nous proposons de gérer la modification observée sur les matrices éléments finis comme une perturbation du problème nominal.

Dans le cas de la masse, la matrice modifiée est tout d'abord décomposée en fonction d'une contribution symétrique et non symétrique modifiée (Equation 25) :

$$\mathbf{M}^{(m)} = \mathbf{M}_S^{(m)} + \varepsilon \mathbf{M}_A^{(m)}. \quad (25)$$

En introduisant la matrice nominale, repérée par l'exposant (0), ainsi qu'une perturbation associée (Equation 26), nous obtenons l'équation 27 :

$$\mathbf{M}_S^{(m)} = \mathbf{M}_S^{(0)} + \varepsilon \delta \mathbf{M}_S, \quad (26)$$

$$\mathbf{M}^{(m)} = \mathbf{M}_S^{(0)} + \varepsilon \left( \mathbf{M}_A^{(m)} + \delta \mathbf{M}_S \right). \quad (27)$$

En considérant les notations définies dans le paragraphe précédent, nous pouvons définir les contributions symétriques et non symétriques de la matrice de masse comme suit :

$$\begin{cases} \mathbf{M}_S &= \mathbf{M}_S^{(0)}, \\ \mathbf{M}_A &= \mathbf{M}_A^{(m)} + \delta \mathbf{M}_S. \end{cases} \quad (28)$$

En adoptant la même démarche pour la matrice de rigidité, nous obtenons :

$$\begin{cases} \mathbf{K}_S &= \mathbf{K}_S^{(0)}, \\ \mathbf{K}_A &= \mathbf{K}_A^{(m)} + \delta \mathbf{K}_S. \end{cases} \quad (29)$$

Pour la matrice d'amortissement, nous conservons la stratégie effectuée précédemment, qui consiste à définir intégralement cette contribution comme une perturbation du système conservatif (Equation 30).

$$\mathbf{C}_A = \mathbf{C}_A^{(m)}. \quad (30)$$

## 5 Application numérique

La Figure 1 présente le modèle numérique simplifié d'un système de freinage [2], composé d'un disque et de deux plaquettes. Chaque plaquette est constituée d'un support et d'une garniture. Le modèle comporte 25596 degrés de liberté. Un noeud de contrôle supplémentaire, au centre du disque, permet

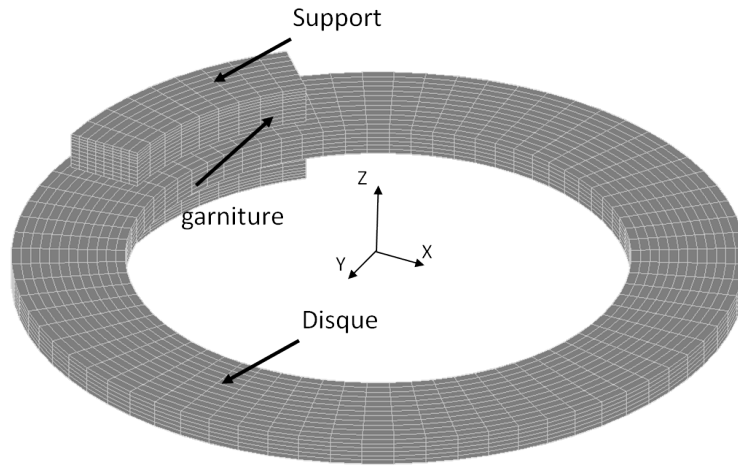


FIGURE 1 – Présentation du modèle éléments finis du système de freinage

TABLE 1 – Propriétés géométriques et chargements associés au disque et à la plaquette

	Disque	Plaquette
Rayon intérieur (m)	0.1	0.11
Rayon extérieur (m)	0.145	0.140
Epaisseur (m)	0.011	0.005 (Backplate) 0.01 (Zone frittée)
Angle de la plaquette (radian)		$\pi/6$
Pression uniforme ( $N/m^2$ )		$2.5 \cdot 10^6$

de bloquer le modèle en translation et rotation. Une pression extérieure est appliquée sur les plaquettes, lesquelles sont bloquées dans un plan parallèle au disque sur les faces arrières. Les caractéristiques géométriques et matérielles du disque et des plaquettes sont résumées respectivement Tables 1 et 2. Un modèle orthotrope est choisi pour la représentation de la garniture de la plaquette.

On se focalise, dans un premier temps, sur le résidu en déplacement de l'équation (1) et on étudie son évolution en fonction du coefficient de frottement, élément significatif de la contribution non symétrique, et en fonction de l'ordre de troncature des vecteurs perturbés intégrés dans la matrice de projection (Figure 2).

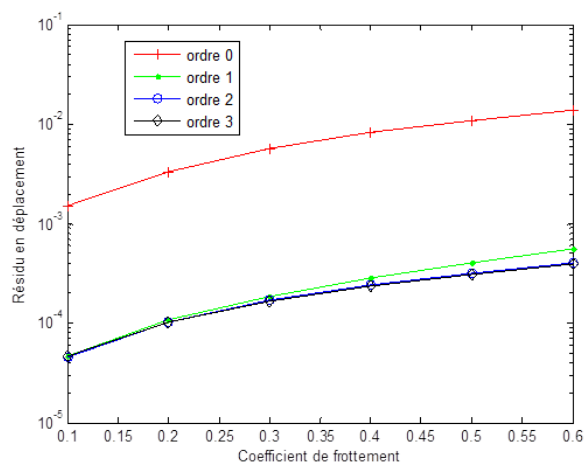


FIGURE 2 – Evolution du résidu en fonction du coefficient de frottement et de l'ordre de troncature des vecteurs perturbés

TABLE 2 – Propriétés matérielles associées au disque et à la plaquette

	Disque	Backplate	Zone frittée
Masse volumique ( $\text{kg}/\text{m}^3$ )	7200	7300	2600
Module Young (GPa)	130	170	6.5 (Ex)
			3.5 (Ez)
Amortissement ( $\text{s}^{-1}$ )	20	20	20

Tout d’abord, on observe que le résidu, calculé avec une méthode classique reposant sur un ordre 0, augmente avec l’augmentation du coefficient de frottement (de  $10^{-3}$  à  $10^{-2}$ ). Ceci est lié au fait que l’espace composé des modes propres du système conservatif n’est pas suffisant pour représenter la solution complexe si la contribution matricielle non symétrique est importante. L’ajout des vecteurs perturbés permet de diminuer le résidu d’environ deux ordres ( $10^{-2}$  à  $10^{-4}$ ) sur tout l’intervalle d’étude. De plus, on observe qu’un ordre 1 suffit à améliorer de manière significative le résidu. L’écart entre les différents ordres supérieurs est très faible, surtout pour des faibles valeurs de frottement. Pour des valeurs de frottement proche de 0.6, l’ordre 2 permet d’améliorer sensiblement la solution. Même si elle est relativement faible ici, on constate également, Figure 3, une modification du graphe de coalescence avec l’amélioration du résidu.

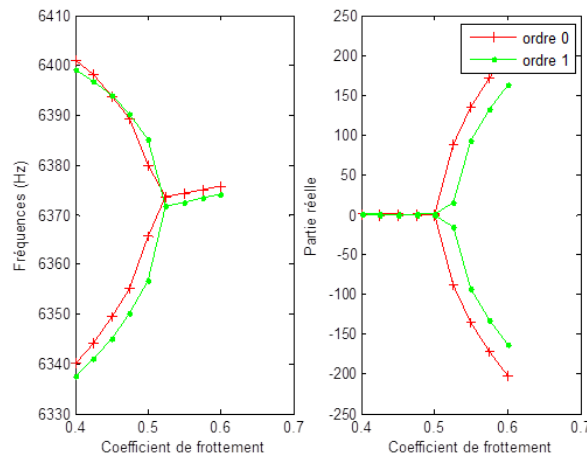


FIGURE 3 – Evolution de la fréquence et de la partie réelle des solutions complexes en fonction du coefficient de frottement

Dans un second temps, on considère une perturbation de plus ou moins 10% des propriétés mécaniques telles que le module d’Young et des coefficients d’amortissement proportionnel relatif à la masse pour les différents composants. Un plan d’expériences complet est défini en considérant 5 niveaux par facteur. La Figure 4 présente les évolutions adimensionnalisées des fréquences et des taux de croissance pour le mode détecté instable près des 6.3kHz. Cette étude permet d’évaluer la sensibilité de la solution complexe vis-à-vis des paramètres de définition du modèle. On compare les résultats obtenus par calcul direct (méthode présentée dans le paragraphe 2 en considérant les paramètres modifiés), à ceux obtenus par réanalyse (développements du paragraphe 3). En suivant les observations précédentes, une approximation d’ordre 1 est choisie pour cette étude paramétrique.

On remarque, d’une part, que les écarts associés entre les deux voies, directes et réanalysées, ne sont pas significatifs puisque l’écart maximal est de 2%. Cette réanalyse présente l’avantage d’éviter le calcul de la base modale perturbée, associée au modèle conservatif modifié utile pour la projection. D’autre part, cette procédure utilise une seule décomposition de la matrice de rigidité nominale pour le calcul des vecteurs perturbés (Equation 19). Pour cette étude, malgré l’augmentation de la taille de la matrice de projection et le calcul des vecteurs perturbés, nous notons une diminution des temps de calcul d’un facteur 3.

D'autre part, on observe que le module d'Young du disque et le coefficient de frottement sont les 2 paramètres les plus sensibles concernant cette instabilité. Dans la présente étude, les coefficients d'amortissement ne sont pas prépondérants.

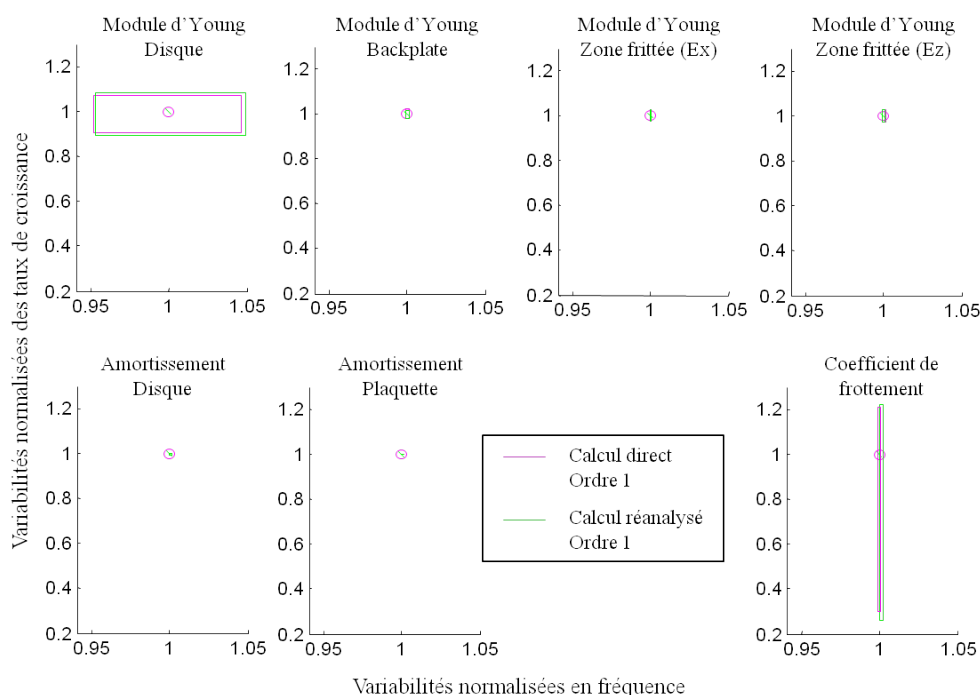


FIGURE 4 – Evolution de la fréquence et du taux de croissance en fonction des perturbations introduites

## 6 Conclusion

Dans cet article, des investigations concernant l'analyse de la stabilité des systèmes mécaniques frottants ont été proposées. Tout d'abord, nous nous sommes attachés à évaluer l'effet du choix des vecteurs constitutifs de la base de projection sur le calcul des modes complexes. D'autre part, nous avons exploité la méthode proposée pour le calcul de solution complexes perturbées sous l'effet de variabilités matérielles ou relatives à l'interface de contact d'un modèle de frein. Une application dédiée à l'analyse du crissement a permis d'illustrer les premiers résultats.

## Références

- [1] J.-M. Cadou, N. Moustaghfir, El H. Mallil, N. Damil, M. Potier-Ferry. *Linear iterative solvers based on perturbation techniques*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics,329(6),457-462,2001.
- [2] H.Q. Do, F. Massa, T. Tison, B. Lallemand. *A global strategy for the stability analysis of friction induced vibration problem with parameter variations*, Mechanical Systems and Signal Processing,84,346–364,2017.
- [3] F. Massa, H.Q. Do, T. Tison, O. Cazier. *Uncertain friction induced vibration study : coupling of fuzzy logic, fuzzy sets and interval theories*, ASCE-ASME Journal of Risk and Uncertainty in Engineering Systems, Part B : Mechanical Engineering,2(1),011008/1-011008/12,2016.
- [4] L. Nechak, F. Gillot, S. Besset, J.-J. Sinou. *Sensitivity analysis and Kriging based models for robust stability analysis of brake systems*, Mechanics Research Communications,69,136-145,2015.
- [5] A. Renault, F. Massa, B. Lallemand, T. Tison. *Experimental investigations for uncertainty quantification in brake squeal analysis*, Journal of Sound and Vibration,332(3),577-594,2016.
- [6] E. Sarrouy, O. Dessombz, J.-J. Sinou. *Piecewise polynomial chaos expansion with an application to brake squeal of a linear brake system*, Journal of Sound and Vibration,367,37-55,2016.