

# Comparaison des modèles de Darcy et de Brinkman pour la prise en compte des effets capillaires locaux dans la simulation des écoulements macroscopiques en milieux poreux.

K. Andriamananjara<sup>1</sup>, N. Moulin<sup>1</sup>, J. Bruchon<sup>1</sup>, S. Drapier<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Chaire Hexcel - Mines Saint-Etienne*  
*Centre SMS & LGF UMR CNRS 5307 Mines Saint-Etienne - Université de Lyon*  
*158, Cours Fauriel, CS 62362 F-42023 Saint-Etienne cedex 2,*  
*(andriamananjara,nmoulin,bruchon,drapier)@emse.fr*

**Résumé** — Cette étude vise à établir une stratégie numérique permettant de prendre en compte la pression capillaire, considérée à l'échelle macroscopique comme une discontinuité appliquée sur le front de fluide, lors de la modélisation d'un écoulement dans un milieu poreux vu comme un milieu homogène équivalent. Cette modélisation peut s'appuyer sur le modèle de Brinkman ou de Darcy, une comparaison des deux modèles sera entreprise. Cependant, le modèle de Brinkman offre intrinsèquement une régularisation numérique de cette discontinuité. Les équations sont résolues par une méthode éléments finis stabilisée. Une comparaison avec un cas expérimental de montée capillaire permet de valider le modèle numérique développé.

**Mots clés** — Pression capillaire, discontinuités, milieu poreux, Darcy, Brinkman, stabilisation sous-grille, procédé par infusion (LRI).

## 1 Introduction

La capillarité résulte de l'équilibre des tensions de surface de trois phases en présence (gaz-liquide-solide). Dans un milieu poreux, elle traduit la capacité d'un fluide à se déplacer sans l'assistance d'autres forces extérieures. Ainsi, les phénomènes capillaires doivent être pris en compte car en compétition avec les phénomènes visqueux, ils peuvent influencer la vitesse de l'écoulement dans un milieu poreux, par exemple une préforme fibreuse. Ils conditionnent aussi l'apparition et le transport des porosités à l'échelle microscopique. Ces mécanismes font l'objet du travail de L. Chevalier présentés dans cette même conférence [6].

Dans le cadre de la Chaire industrielle entre Hexcel et Mines Saint-Etienne, le but de ce travail est justement d'étudier les effets de ces phénomènes dans la fabrication des pièces en composite par les procédés d'infusion de résine liquide (LRI : Liquid Resin Infusion), à l'échelle macroscopique de la préforme. Ces procédés de fabrication consistent à imprégner un empilement de préformes fibreuses à travers son épaisseur, sous l'effet d'une dépression imposée en tirant le vide dans le système, comme schématisé sur la Figure 1 [4]. Ce type de procédés est développé pour les pièces structurales minces, en particulier dans l'aéronautique, et constitue une réelle alternative aux pré-imprégnés utilisés jusqu'ici et nécessitant des infrastructures de stockage onéreuse. Le principe de l'infusion, s'il paraît simple au premier abord, repose sur des mécanismes assez complexes à modéliser. En effet, en mettant sous vide l'empilement de préformes, un lit de résine est créé dans un drainant afin d'alimenter l'écoulement à travers l'épaisseur des préformes - l'infusion -, tout en assurant leur compaction sous l'effet de la pression atmosphérique (Figure 1). La modélisation de tels procédés est par nature multi-physique et multi-échelle [5, 7, 4].

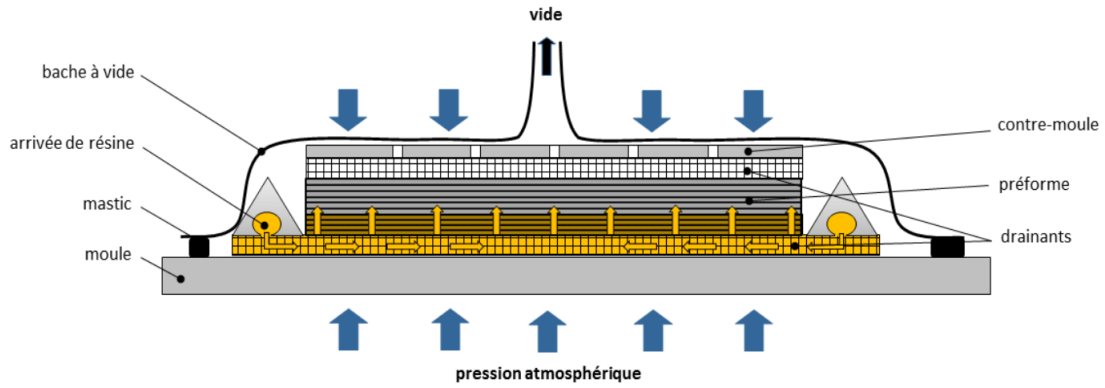


FIGURE 1 – Procédé d'infusion de résine liquide [4]

Dans ce travail, nous nous concentrons sur l'écoulement intervenant dans les préformes. Classiquement, l'infusion de la résine dans les préformes fibreuses, considérées comme des milieux poreux orthotropes, est décrit par des modèles de Darcy ou de Brinkman. Le front de fluide est représenté, quant à lui, par une fonction *level-set* [9] qui va être transportée par la vitesse du fluide. Nous cherchons ici à travailler avec un milieu homogène équivalent, à une échelle macroscopique, mais qui permet de prendre en compte les phénomènes intervenant à l'échelle des fibres, notamment la capillarité.

Le contexte de l'étude étant présenté, nous comparerons dans la deuxième partie de ce travail les modèles utilisés pour décrire l'écoulement dans le milieu poreux, à savoir le modèle de Darcy et de Brinkman, et décrire ainsi les avantages du modèle Brinkman. Ensuite, nous étudierons la stratégie numérique utilisée pour résoudre les équations de Brinkman et prendre en compte la pression capillaire dans ce modèle. Finalement, le modèle développé est validé dans la quatrième et dernière partie.

## 2 Stratégie numérique de modélisation

### 2.1 La stabilisation du modèle éléments finis par une méthode sous-grille

Ce travail se focalise sur un modèle numérique de l'écoulement dans la préforme basé sur les équations de Brinkman ou de Darcy résolues avec une méthode éléments finis, stabilisée par une technique sous-grille de type Variational MultiScale (VMS) [2].

L'équation de Brinkman exprime l'équilibre entre la force motrice induite par un gradient de la pression  $p$  et les dissipations visqueuses dues aux écoulements du fluide qui s'expriment en fonction de la viscosité effective  $\mu_{eff}$  (prise égale à la viscosité du fluide), et du rapport entre la viscosité du fluide  $\mu$  et la perméabilité du milieu poreux traversé,  $\underline{K}$ . Un autre paramètre caractéristique des écoulements en milieu poreux à prendre en compte est la porosité  $\phi$ , reliée à la fraction volumique des fibres  $t_{vf}$  ( $\phi = 1 - t_{vf}$ ). Dans ce travail, la porosité sera intégrée au calcul de la vitesse réelle de l'écoulement en considérant, par conservation de la masse, que la vitesse réelle est égale à la vitesse du modèle de Brinkman divisée par la porosité.

Finalement, en l'absence de forces extérieures, négligeables dans un premier temps, et pour des propriétés homogènes dans le domaine d'étude, les équations de Brinkman s'écrivent :

$$\frac{\mu}{\underline{K}}(\phi \underline{v}) + \nabla p - \mu_{eff} \Delta(\phi \underline{v}) = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \cdot (\phi \underline{v}) = 0 \quad (2)$$

L'équation de Darcy s'obtient en prenant une viscosité effective  $\mu_{eff}$  nulle dans l'équation (1). Dans notre cas, la méthode des éléments finis peut être décrite comme l'approximation de la solution par des fonctions polynomiales continues et linéaires : on utilise un élément mixte (en vitesse, pression) P1/P1, c'est-à-dire linéaire en vitesse et pression. L'élément fini P1/P1 n'est pas stable pour le système de Brinkman au sens où il ne satisfait pas les conditions de Brezzi - Babuska. Le système discret est alors

ici stabilisé en utilisant une méthode de type VMS. Les champs vitesse et pression sont donc décomposés en la somme d'une composante dite *calculable*, la solution éléments finis, et une composante dite *sous-grille* :  $\underline{v} = \underline{v}_h + \underline{v}'$  et  $p = p_h + p'$ . La méthode ASGS [2] utilisée permet d'approcher les effets des termes sous-grille ( $\underline{v}'$ ,  $p'$ ) sur la solution éléments finis ( $\underline{v}_h$ ,  $p_h$ ) et fournit ainsi les termes nécessaires à la stabilisation du système.

## 2.2 Imposition de la pression capillaire à l'interface du milieu homogène équivalent

La pression capillaire sera imposée comme étant une force extérieure de type condition de Neumann, c'est-à-dire résultant de la formulation variationnelle des équations (1, 2). Elle sera appliquée à l'interface formée par deux fluides non miscibles (ici, l'air et le liquide) qui est représentée par une *level-set* [9].

La difficulté numérique dans l'imposition d'une pression capillaire est que celle-ci se traduit par une discontinuité de la pression au front de fluide. Or, dans la résolution éléments finis standard, la pression est approchée par un champ discret continu. Cette approximation ne peut donc pas capter correctement le saut de pression, ce qui conduit à différents problèmes comme des vitesses parasites et donc des oscillations de l'interface [4]. Afin de rester dans un cadre Galerkin continu, et de ne pas rajouter de degrés de liberté comme avec une technique éléments finis étendus par exemple, nous proposons d'enrichir uniquement l'approximation du champ de pression dans les éléments traversés par l'interface, par deux degrés de liberté supplémentaires qui seront condensés. Cette technique a été proposée par Ausas dans [1] pour le système de Navier-Stokes.

Les deux fonctions de forme associées aux deux degrés de liberté supplémentaires sont linéaires de part et d'autre de l'interface et discontinues à l'interface (Figure 2), ce qui permet de capter la discontinuité de pression sur le front de fluide. L'approximation de la pression s'écrit alors :

$$p_h = \sum_{i \in \tau} N_i(\mathbf{x}) p_i + \sum_{j=1}^2 M_j(\mathbf{x}) c_j$$

où,  $M_j$  sont les nouvelles fonctions de formes décrites précédemment,  $c_j$  les degrés de liberté associés à ces fonctions.  $N_i$  et  $p_i$  étant respectivement les fonctions de forme et les valeurs nodales de la pression associées aux degrés de liberté classiques.

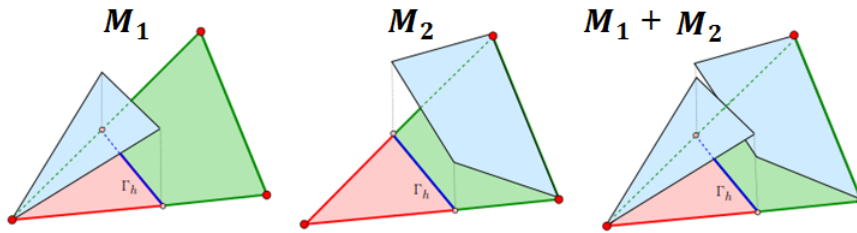


FIGURE 2 – Rajout de 2 degrés de liberté en pression à l'interface  $\Gamma_h$  des éléments coupés par le front fluide [1]

Le modèle numérique décrit ci-dessus a été implémenté et testé dans le code par éléments finis Zset [3].

## 3 Validation du modèle numérique

Soit  $\Omega$  le domaine de calcul composé de deux domaines fluides newtoniens  $\Omega_1$  (le fluide le plus visqueux, le liquide de viscosité  $\mu_1$ ) et  $\Omega_2$  (le fluide environnant, ici l'air de viscosité  $\mu_2$ ). Le front fluide séparant les deux domaines est représenté par  $\Gamma_{int}$ .

### 3.1 Comparaison des modèles de Darcy et de Brinkman sur un cas test

Dans cette partie, nous comparerons le modèle de Brinkman et celui de Darcy sur un cas test simple décrit sur la Figure 3, qui représente un écoulement dans un domaine rectangulaire  $\{2 \times 1\}$  de perméabilité unitaire, piloté par un gradient de pression valant  $1Pa$  et par une pression capillaire de  $1Pa$  appliquée sur le front fluide. Nous considérons premièrement le modèle de Darcy. Nous étudierons ses limites et justifierons l'utilisation du modèle de Brinkman mais aussi l'enrichissement décrit en (2.2).

Les paramètres matériaux sont présentés sur la Figure 3. Ces paramètres ne sont évidemment pas représentatifs d'un cas réel.

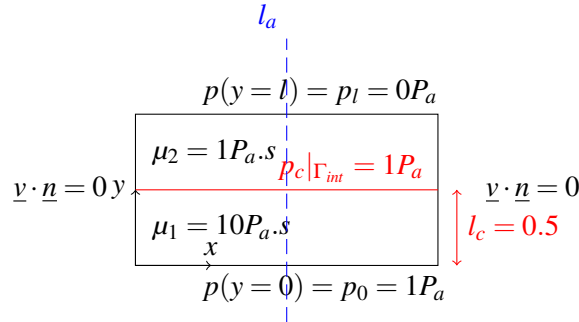


FIGURE 3 – Conditions limites - cas test 1D

En considérant les conditions aux limites en pression, la continuité de la vitesse à l'interface, le saut de pression  $p_c$  à l'interface et l'incompressibilité de l'écoulement, on obtient les solutions analytiques du modèle de Darcy suivantes :

$$p_1(y) = \frac{\mu_1 \Delta P}{\Delta(\mu l)} y + p_0 \text{ et } p_2(y) = \frac{\mu_2 \Delta P}{\Delta(\mu l)} (y - l) + p_l \quad (3)$$

$$v_1(y) = -\frac{K \Delta P}{\Delta(\mu l)} = v_2(y) \quad (4)$$

avec  $\Delta P = p_l - p_0 - p_c$  et  $\Delta(\mu l) = l_c \mu_1 + (l - l_c) \mu_2$ .

Analytiquement, le modèle de Darcy définit donc une vitesse constante dans tout le domaine qui vaut environ  $0,41 m \cdot s^{-1}$ , une pression linéaire de part et d'autre de l'interface et bien évidemment discontinue à l'interface avec le saut de pression valant la pression capillaire imposée ( $1Pa$ ).

Le modèle numérique de Darcy quant à lui, donne un champ de vitesse non constante, surtout au niveau de l'interface. On remarque également des problèmes de bord aux extrémités de l'interface (Figure 4a). C'est la raison pour laquelle, nous avons décidé d'utiliser le modèle de Brinkman qui permet d'homogénéiser la vitesse dans le domaine (Figure 4b) par le terme de diffusion  $\mu_{eff} \Delta \underline{v}$ .

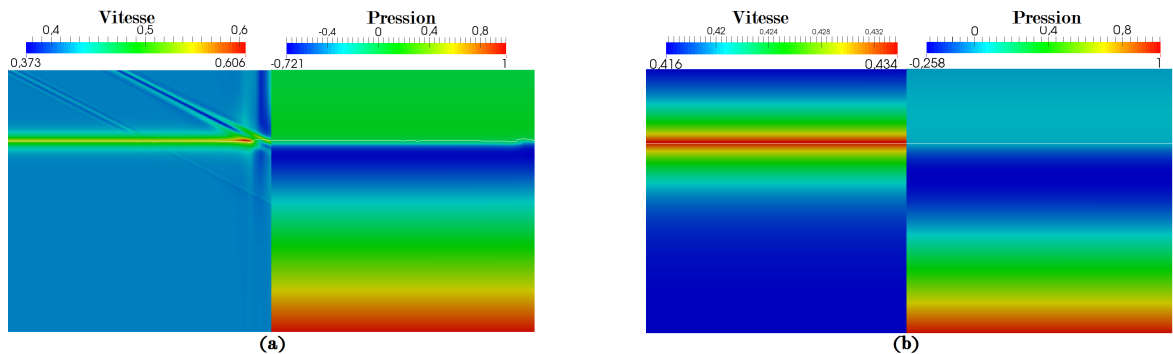


FIGURE 4 – Solutions (vitesse et pression) obtenues par le modèle de Darcy (a) et le modèle de Brinkman (b), sans enrichissement.

Une analyse approfondie selon une ligne  $l_a$  (3) perpendiculaire à l'interface permet de mieux observer et quantifier la variation des champs de vitesse et pression. On peut constater sur la Figure 5b que la vitesse numérique à l'interface est d'environ 20 % supérieure (Figure 5b ) à la vitesse analytique (Équations (4)) de  $0,41m.s^{-1}$ . Aussi, une perte du saut de pression à l'interface d'environ 30% par rapport au saut imposé ( $1Pa$ ), est observée pour le modèle de Darcy. On en conclut donc que la formulation faible utilisée du problème de Darcy et sa discrétisation par éléments finis ne permettent pas de retrouver la solution analytique de ce problème. Le modèle éléments finis stabilisé ASGS de Brinkman permet de réduire l'erreur en vitesse à l'interface, on passe de 20% avec le modèle de Darcy à 3% avec celui de Brinkman (Figure 5b, 6b). Le modèle de Brinkman crée en effet, une régularisation numérique de la discontinuité de pression en créant une dissipation numérique (Equation 1).

Nous constatons par ailleurs, que le saut de pression à l'interface est très mal capté tant bien par la solution éléments finis de Darcy que par celle de Brinkman. (Figure 5a). Une relaxation d'environ 82% est observée pour le modèle de Brinkman (en prenant  $\mu_{eff} = \mu_{fluide}$  évalué de part et d'autre de l'interface). C'est la raison pour laquelle le champ de pression doit être enrichi à l'interface [1]. L'enrichissement permet en effet de réduire la perte du saut de pression à environ 5% et permet aussi d'atténuer complètement la variation de la vitesse à l'interface (Figures 5b, 6b).

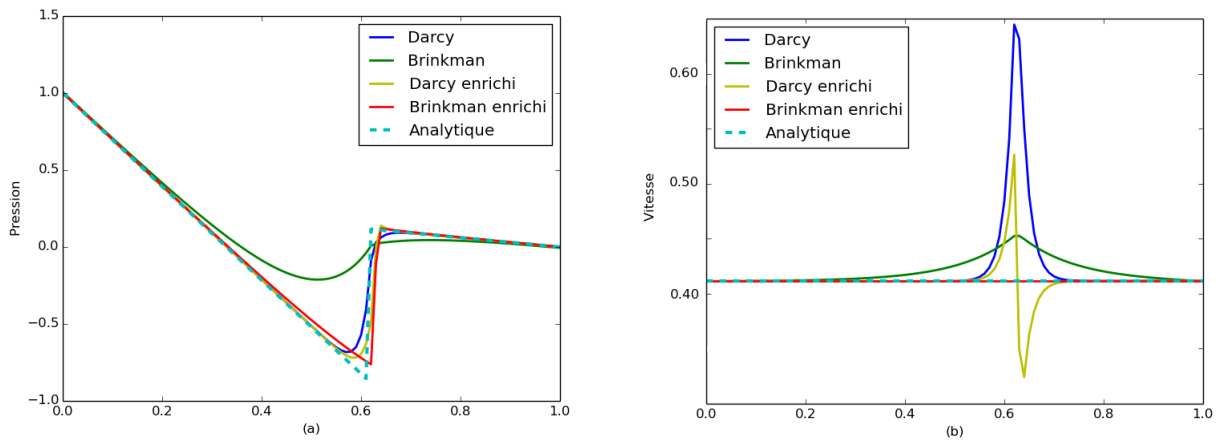


FIGURE 5 – Comparaison du modèle de Darcy et Brinkman enrichi en pression, (a) en pression et (b) en vitesse.

D'autre part, nous avons considéré le modèle de Darcy enrichi en pression à l'interface par la même méthode décrite dans [1]. Cette dernière dégrade encore plus la solution en vitesse, comme on peut le voir sur les Figures 5b et 6a.

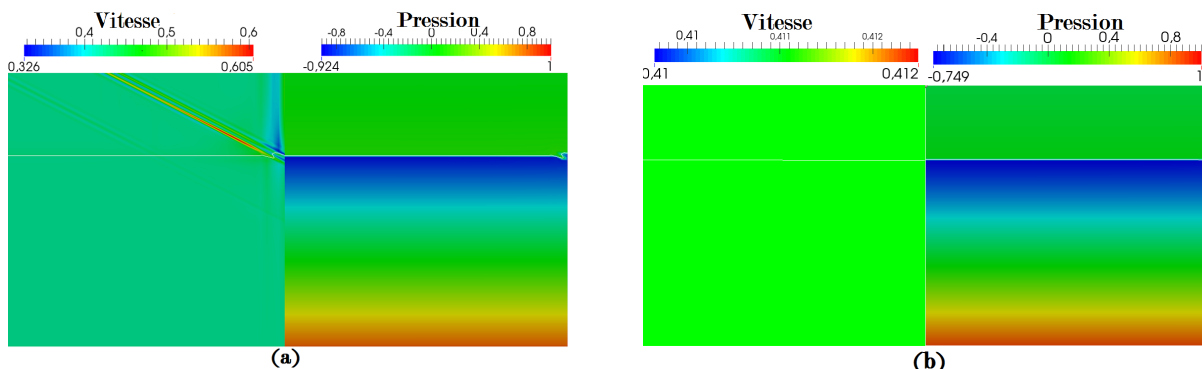


FIGURE 6 – Solutions (vitesse et pression) obtenues par le modèle de Darcy (a) et le modèle de Brinkman (b), avec enrichissement à l'interface.

Dans la suite du problème, nous nous concentrerons uniquement sur le modèle de Brinkman stabilisé et enrichi en pression à l'interface. En effet, ce modèle permet bien de retrouver les solutions coïncidant

avec celles du modèle analytique de Darcy.

### 3.2 Validation du modèle numérique dans le cas d'une montée capillaire

Dans l'objectif de valider la méthode décrite précédemment, nous étudions le cas de montée capillaire détaillé dans les travaux de Monica Pucci [8]. De ces travaux, ont été mis en évidence, l'expression du carré de la masse et le carré de la hauteur d'eau imprégnée dans un préforme cylindrique en carbone en fonction du temps. Ces travaux se focalisent sur la mesure de la pression capillaire, d'après une équivalence entre la loi de Darcy et de Washburn [8]. A l'inverse, en connaissant la pression capillaire, nous allons chercher à calculer numériquement la masse à partir de la hauteur obtenue numériquement, ensuite comparer cette masse à celle obtenue expérimentalement.

#### 3.2.1 Description du problème

Nous considérons trois simulations 2D d'écoulements unidirectionnels dans un milieu homogène isotrope. Ces simulations correspondent à l'étude de l'écoulement de l'eau dans un renfort en carbone, suivant les directions successives  $x$ ,  $y$  et  $z$  décrit dans [8]. On impose une pression de  $1bar$  sur les deux parois inférieur et supérieur afin de modéliser la pression de l'eau sur la surface inférieure et la pression de l'air sur la surface supérieure. La seule force motrice considérée dans cet exemple est la force capillaire résultant de la pression capillaire imposée à l'interface. Les paramètres matériau et les propriétés des fluides sont décrits dans le Tableau 1.

Les solutions analytiques mises en évidence dans ces travaux, s'écrivent :

$$h_i^2(t) = \frac{2K_i p_{cap}^i}{\mu \phi} t \quad i \in \{x, y, z\} \quad (5)$$

$$m_i^2(t) = h_i^2(t) \phi \rho^2 (\pi r^2)^2 \quad (6)$$

où  $h_i$  et  $m_i$  sont respectivement la hauteur et la masse de fluide infiltré dans la préforme selon la direction  $i$ ,  $p_{cap}^i$  et  $K_i$  la pression capillaire et perméabilité dans la direction  $i$ ,  $t$  le temps,  $\rho$  la masse volumique du fluide et  $r$  le rayon du domaine.

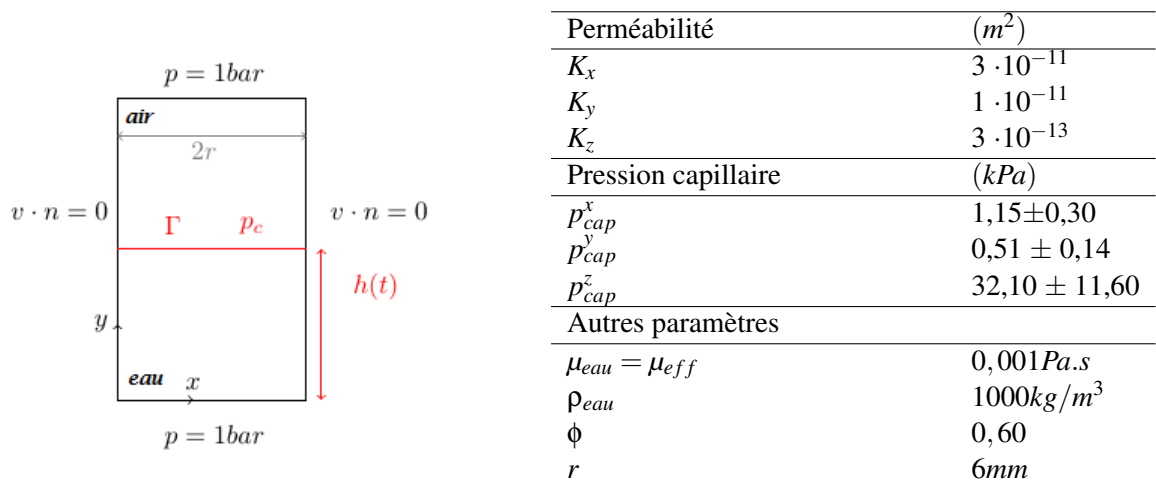


FIGURE 7 – Conditions limites - Montée capillaire

TABLE 1 – Paramètres

#### 3.2.2 Résultats

Dans cette partie, le modèle numérique élaboré précédemment est confronté au modèle analytique développé par M. Pucci [8]. Nous comparons la hauteur ainsi que la masse de la colonne de fluide imprégnant la préforme en fonction du temps. Par ailleurs, la masse obtenue avec le modèle numérique est comparée avec la masse expérimentale extraite du même article [8].

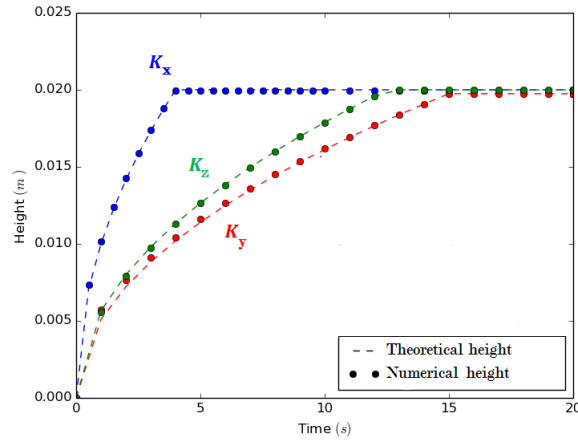


FIGURE 8 – Comparaison de la hauteur analytique et numérique selon les différentes directions  $x$ ,  $y$  et  $z$ .

Connaissant la hauteur numérique, on en déduit le carré de la masse du liquide en fonction du temps, d'après (Eq. 6) :

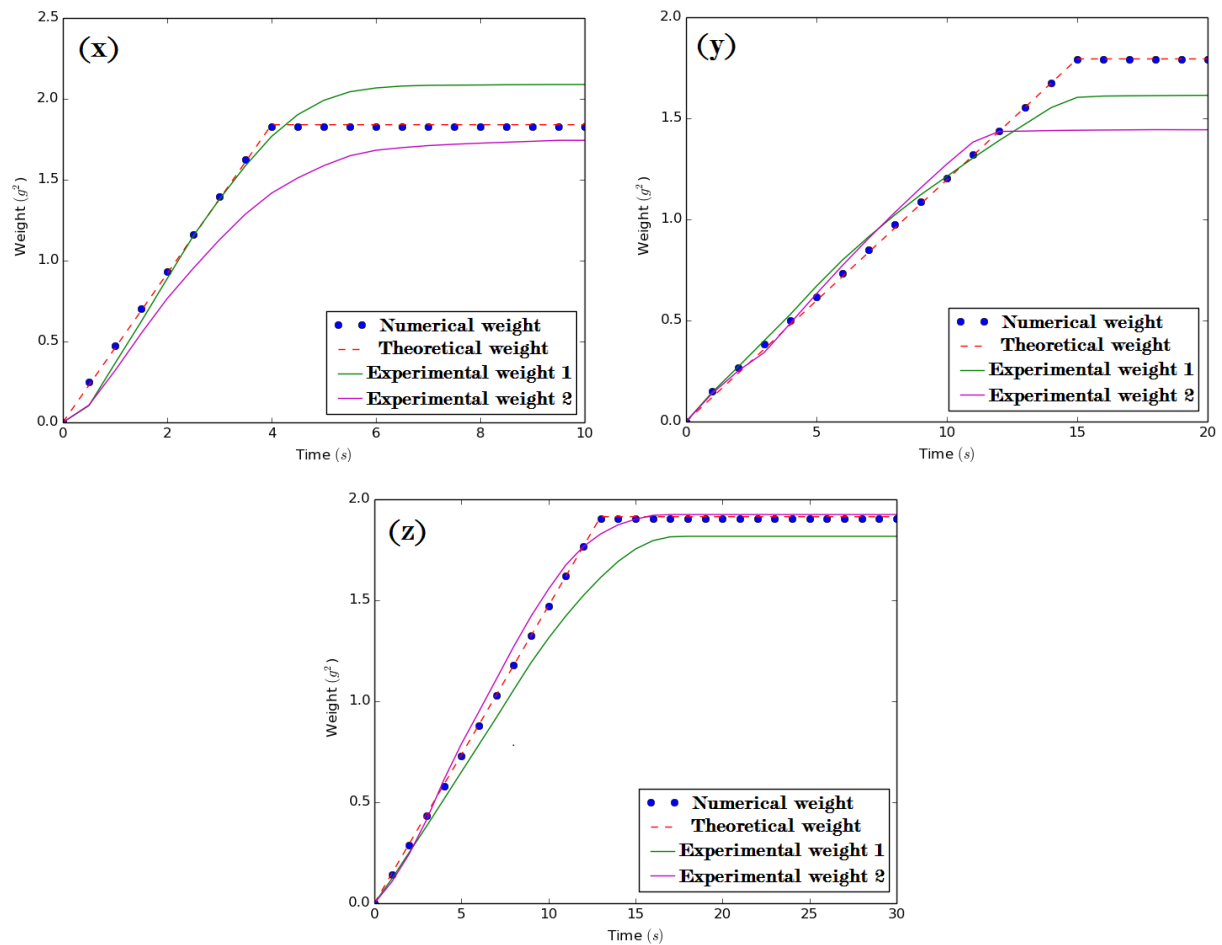


FIGURE 9 – Le carré de la masse ( $g^2$ ) en fonction du temps ( $s$ ), selon les différentes axes  $x$ ,  $y$  et  $z$ .

Les figures (Fig. 8, Fig. 9) montrent une parfaite corrélation entre les résultats numériques et analytiques du calcul de la masse et de la hauteur. La comparaison avec les données expérimentales issues des travaux de M. Pucci - avec lesquelles elle a élaboré le modèle analytique (Eq. 5, 6) repris dans ce travail, renforce la validité de notre modèle numérique. Le décalage entre les résultats numériques et expérimentaux pourraient s'expliquer par plusieurs facteurs, tels que les incertitudes et erreurs de mesure. Aussi le modèle numérique ne prend pas en compte ni la gravité, ni la déformation mécanique du renfort qui modifient probablement la cinétique de l'écoulement. Le modèle numérique nécessite bien évidemment d'être enrichi pour mieux représenter la totalité des phénomènes physiques intervenant lors des écoulements en

milieux poreux. L'objectif à long terme est de pouvoir simuler des écoulements en trois dimensions dans un milieu de perméabilité orthotrope et prenant aussi en compte le caractère orthotrope des phénomènes capillaires.

## 4 Conclusion

Nous nous sommes intéressés à l'imposition d'une pression capillaire dans un écoulement dans un milieu poreux, qui se traduit par une discontinuité de la pression au travers de l'interface liquide/air. Une comparaison des modèles de Darcy et de Brinkman a été entreprise. Le modèle de Brinkman a été choisi afin de palier aux problèmes du modèle de Darcy, qui n'est pas adapté pour les problèmes de discontinuités, faisant ainsi apparaître des vitesses parasites à l'interface mais aussi des effets de bord. Les équations de Brinkman ont été résolues avec une méthode éléments finis dont le champ de pression est enrichi par deux degrés de liberté condensés au niveau des éléments coupés par l'interface, pour mieux capter le saut de pression imposé dessus. La méthode éléments finis nécessite également d'être stabilisée par une méthode sous-grille de type Variational MultiScale appelée ASGS (Algebraic SubGrid Scale).

Notre modèle a été ensuite confronté à un modèle analytique de montée capillaire basé sur les équations de Darcy et Washburn, ainsi qu'à des données expérimentales détaillées dans [8]. Nous avons constaté une très bonne corrélation avec le modèle analytique mais aussi avec les résultats expérimentaux.

D'autre part, nous constatons que l'effet capillaire constitue à lui-seul, une force motrice qui permet à l'eau d'imprégner le renfort en carbone. La prochaine étape consiste à étudier des cas d'infusion de pièces de plus grandes dimensions avec des géométries plus complexes, afin de mesurer si la pression capillaire influence le temps de remplissage à l'échelle d'une pièce industrielle, dans le cas du procédé d'infusion de résine liquide.

## Références

- [1] R. Ausas, G. Buscaglia and S. Idelsohn. *A new enrichment space for the treatment of discontinuous pressures in multi-fluid flows*, International Journal For Numerical Methods in Fluids, John Wiley & Sons, 70 :829-850, 2011.
- [2] S. Badia, R. Codina *Unified stabilized finite element formulations for the Stokes and the Darcy problems*, SIAM Journal on Numerical Analysis, Volume 47(3) :1971-2000, 2009.
- [3] J. Besson, R. Foerch *Large scale object-oriented finite element code design*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 142(1-2) :165-187, 1997
- [4] M. Blais, N. Moulin, P.-J. Liotier, and S. Drapier *Resin infusion-based processes simulation : coupled Stokes-Darcy flows in orthotropic preforms undergoing finite strain*, International Journal of Material Forming, 1-15, 2015.
- [5] P. Celle, S. Drapier, and J.-M. Bergheau. *Numerical modelling of liquid infusion into fibrous media undergoing compaction*, European Journal of Mechanics - A/Solids, 27(4) :647-661, 2008.
- [6] L. Chevalier, P.-J. Liotier, J. Bruchon and S. Drapier. *Approche numérique d'un écoulement local et effets capillaires dans une préforme pour la modélisation des procédés d'infusion*, Actes du 13<sup>ème</sup> Colloque National en Calcul des Structures, O. Allix, P. Le Tallec, et L. Rota, actes électroniques, 2017.
- [7] A. Dereims, S. Drapier, J.-M. Bergheau, and P. de Luca *3D robust iterative coupling of Stokes, Darcy and solid mechanics for low permeability media undergoing finite strains*, Finite Elements in Analysis and Design, 94, 1-12, 2015.
- [8] M. F. Pucci, P.-J. Liotier, and S. Drapier *Capillary wicking in a fibrous reinforcement - Orthotropic issues to determine the capillary pressure components*, Composites/A, 77 :133-141, 2015.
- [9] M. Touré, *Stabilized finite element methods for solving the level set equation without reinitialization*, Journal Computers & Mathematics with Applications, Volume 71 (8) :1602-1623, 2016.