

# Modèle hyper-réduit directionnel pour la prévision simplifiée des contraintes résiduelles de soudage

T. Dinh Trong<sup>1,2</sup>, D. Ryckelynck<sup>2</sup>, S. Hendili<sup>1</sup>, M. Abbas<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup> EDF-R&D, {tuan.dinh-trong, sofiane.hendili, mickael.abbas}@edf.fr

<sup>2</sup> MINES ParisTech, PSL Research University, MAT-Centre des matériaux, CNRS UMR 7633, BP 87 91003 Evry, France

<sup>3</sup> IMSIA, UMR 9219 EDF-CNRS-CEA-ENSTA, Université Paris-Saclay

**Résumé** — Les simulations par éléments finis du soudage sont trop longues pour permettre des études paramétriques suffisamment fouillées. Nous proposons une méthode d'hyper-réduction qui associe un domaine réduit d'intégration à des approximations par base réduite. Nous souhaitons tenir compte du caractère directionnel des cordons de soudage. En effet, le long d'un cordon de soudage un ensemble de transformations est activé successivement en chaque point du cordon et dans un voisinage. Il en résulte que le domaine réduit proposé a une forme extrudée le long de la ligne de soudage.

**Mots clés** — réduction de modèle, plasticité, POD, DEIM, simulation numérique du soudage.

## 1 Introduction générale

### 1.1 Contexte de l'étude

Le soudage est un moyen d'assemblage permanent qui a pour objet d'assurer la continuité des matériaux, habituellement des métaux ou des matières thermoplastiques. En général, la soudure produit des déformations et des contraintes résiduelles, ce qui influe sur sa qualité et sa résistance mécanique. Il est nécessaire de simuler le soudage (par méthode des éléments finis) pour prévoir les défauts engendrés. Cependant, il existe plusieurs paramètres du procédé, des matériaux et des conditions limites mal connus. Il est alors nécessaire de mener des études paramétriques.

Dans le cadre du projet R&D d'EDF, "*Simuler Pour Anticiper les Réparation*", les méthodes de réparation par soudage sont étudiées en faisant appel à la simulation. Une des applications de ce projet concerne les tuyauteries du circuit secondaire des centrales nucléaires. Ces tuyauteries peuvent présenter localement une sous-épaisseur à cause d'un défaut de fabrication. L'étude numérique de ce procédé de rechargement revient à simuler une opération de soudage multipasses sur une structure de grande taille, d'où un réel problème de temps de calcul. Afin de réduire le coût du calcul, la simulation du rechargement de type Overlay (*Figure 1*) a été réalisée en considérant la méthode dite, de "macro-dépôt" [1]. Cette méthode consiste à regrouper quelques passes de soudage dans un bloc, puis à faire une seule simulation sur ce bloc. Il existe également d'autres méthodes simplifiées mais ces méthodes ont l'inconvénient de changer les modèles physiques utilisés.

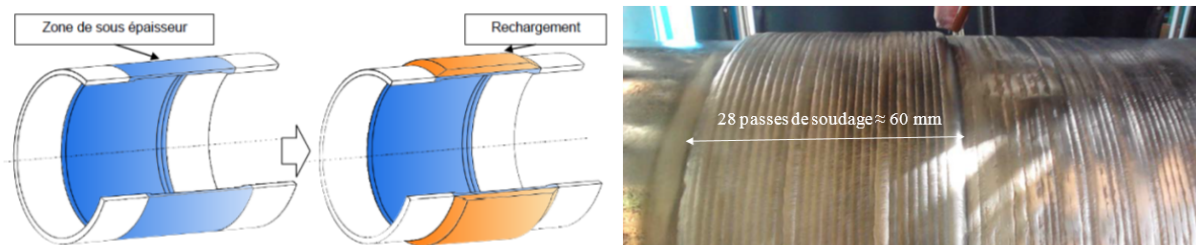


FIGURE 1 – Rechargement de type Overlay par l'extérieur sur la zone sous-épaisseur [2].

Dans ce contexte, nous proposons de développer la méthode hyper-réduction [3] du soudage multipasse pour réduire la complexité du modèle en conservant tous les paramètres physiques de celui-ci. Un domaine réduit d'intégration est associé à des approximations par bases réduites pour la formulation des

équations de la chaleur et des équations d'équilibre mécanique. Nous souhaitons tenir compte du caractère directionnel des cordons de soudage. En effet, lorsque la source de chaleur se déplace le long d'une ligne directrice pour former le cordon de soudure, un ensemble de transformations est activé successivement en chaque point de cette ligne et dans un voisinage. Il en résulte que le domaine réduit proposé a une forme extrudée le long de la ligne de soudage.

## 1.2 Principes de base pour la réduction de modèle

Pour un système mécanique industriel, la discrétisation utilisée dans la méthode des éléments finis est telle qu'elle peut générer des modèles de grande taille. Dans ce contexte la réduction de modèle a pour objectifs : (i) réduire le nombre de paramètres permettant de représenter les solutions, et (ii) donner une expression des modèles non-linéaires en fonction seulement de ces paramètres. Les méthodes de réduction de modèle se compose deux étapes : une étape hors ligne (offline) et une étape en ligne (online). La première consiste à réaliser les simulations d'un plan d'expérience numérique et à construire les bases réduites. Ces bases sont utilisées dans l'étape en ligne pour chercher une solution approchée du problème paramétrique pour différentes valeurs de paramètre.

La méthode des éléments finis est très générique, en considérant dans le domaine  $\Omega$  la solution d'un champ recherché  $\mathbf{u}$  est exprimée sous la forme :  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^D + \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \varphi_i(\mathbf{x}) q_i(t), \forall \mathbf{x} \in \Omega, t \in [t_0, t_n]$ , avec  $(\varphi_i)_{i=1}^{\mathcal{N}}$  les fonctions de forme par éléments finis. Les résultats sont les variables  $(q_i)_{i=1}^{\mathcal{N}}$  à chaque instant ; nous pouvons les stocker dans une matrice de *snapshots*  $\mathbf{Q}(\mathcal{N} \times N_t)$  qui vérifie que  $\mathbf{Q}_{ij} = q_i(t_j)$ . Soit  $\mathbf{r}(\mathbf{q})$  le résidu des équations de bilan thermique ou mécanique par la méthode des éléments finis. La formulation des équations de bilan s'écrit alors : trouver  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$  tel que :

$$\mathbf{r}(\mathbf{q}) = 0 \quad (1)$$

Dans la réduction de modèle, les variables  $\mathbf{q}$  sont présentée par  $\mathbf{q} = \mathbf{V}\boldsymbol{\gamma}$ , où  $\mathbf{V}$  est la matrice de base réduite. Alors, les inconnues sont les variables réduites  $(\gamma_k)_{k=1}^N$  associées aux fonctions des modes empiriques  $(\psi_k)_{k=1}^N, N \ll \mathcal{N}$ . Le champ inconnu est défini par :  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^D + \sum_{k=1}^N \psi_k(\mathbf{x}) \gamma_k(t), \forall \mathbf{x} \in \Omega, t \in [t_0, t_n]$ . Il faut rappeler que l'on peut représenter les modes empiriques par les fonctions de forme :  $\psi_k = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \varphi_i V_{ik}$ . La projection des équations par la méthode Galerkin donne : trouver  $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^N$  tel que :

$$\mathbf{V}^T \mathbf{r}(\mathbf{V}\boldsymbol{\gamma}) = 0, \quad \mathbf{q} = \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\gamma} \quad (2)$$

Cette approche a été mise en œuvre dans [4] pour la simulation de transformations martensitiques.

## 2 Hyper-réduction et son modèle directionnel

### 2.1 Modèle hyper-réduit

Un modèle hyper-réduit est un modèle éléments finis pour lequel on contraint les champs inconnus à évoluer dans un espace réduit dont les équations de bilan sont restreintes à un sous-domaine appelé domaine réduit d'intégration (*RID*). Cette méthode a été proposée en thermique non-linéaire dans [5] puis étendue à la mécanique des matériaux dans [3] et aux études paramétriques en grande dimension dans [6]. Une première étude de l'hyper-réduction de problèmes thermoplastiques a été proposée dans [7], sans tenir compte de sources de chaleurs mobiles.

L'espace réduit des champs recherchés est défini par les bases réduites construites par la méthode de décomposition orthogonale aux valeurs propres (*POD*) [8, 9]. En pratique, on effectue une décomposition de la matrice des snapshots  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times N_t}$  par la Décomposition aux Valeurs Singulières (*SVD*). Puis on sélectionne les valeurs singulières les plus significatives, et les modes propres à gauche associés que l'on stocke dans la matrice de base réduite  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N} \times N}$ . On obtient ainsi des bases réduites pour les températures et les déplacements, mais aussi pour bien d'autres grandeurs physiques.

Le RID, noté  $\Omega_Z$ , est construit en tenant compte de la forme des modes empiriques de la base réduite, mais aussi de la forme de l'équation aux dérivées partielles à résoudre. Le domaine réduit est constitué d'éléments attachés à des points d'interpolation de différentes bases réduites. Comme proposé dans [10] ces points sont obtenus par la méthode d'interpolation empirique discrète (*DEIM*). Pour le cas

du soudage, le domaine réduit reçoit la contribution de bases réduites en température, en déplacement, en gradient de température et en contrainte. Dans cette communication, seule la base réduite en température est modifiée pour obtenir un modèle hyper-réduit directionnel.

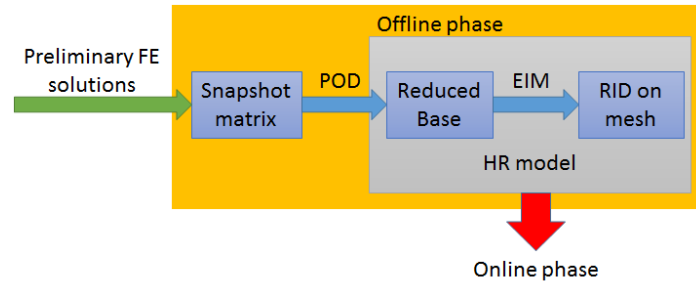


FIGURE 2 – Etape hors ligne de la méthode d’hyper-réduction.

La construction des bases réduites et du domaine réduit d’intégration est effectuée en étape hors ligne de la méthode d’hyper-réduction. Le modèle hyper-réduit est utilisé pour la résolution dans l’étape en ligne (cf. Figure 2). On note  $\mathcal{L}_Z$  liste des degrés de liberté qui ne sont pas connectés aux éléments en dehors du RID. On peut séparer les modes en deux parties : les modes internes du RID  $\psi_k^Z = \sum_{i \in \mathcal{L}_Z} \phi_i v_{ik}$  et les modes externes  $\psi_k^\delta$ . Par construction de  $\Omega_Z$ , il existe une interface notée  $I$  entre  $\Omega_Z$  et le reste du domaine. Il n’y pas de conditions aux limites connues pour écrire des équations de bilan restreintes à  $\Omega_Z$ . Pour résoudre ce problème, nous imposons des conditions de type Dirichlet (Figure 3), décrites par une combinaison linéaire des modes  $\psi_k^\delta$ .

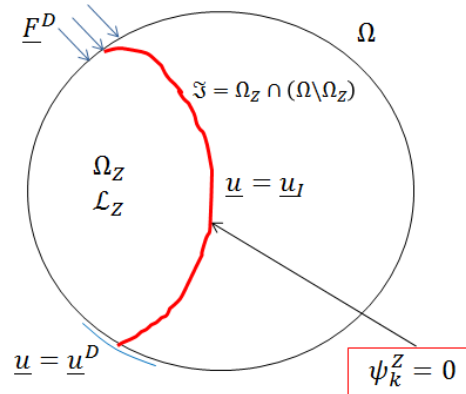


FIGURE 3 – Représentation du modèle hyper-réduit pour la résolution en ligne des équations.

Alors, la formulation de l’hyper-réduction s’écrit : dans  $\Omega_Z$ , trouver  $\gamma \in \mathbb{R}^N$  tel que :

$$\sum_{i \in \mathcal{L}_Z} v_{ik} r_i(\mathbf{V} \cdot \gamma) = 0, \quad k = 1, \dots, N \quad (3)$$

où  $v_{ik}$  est le terme en ligne  $i$  et colonne  $k$  de  $\mathbf{V}$ .

## 2.2 Modèle directionnel

Lorsque la source de chaleur se déplace sur une direction rectiligne pour former le cordon de soudage, nous voyons que sur tous les plans perpendiculaires à la direction du soudage, les évolutions du champ de température se ressemblent en se décalant dans le temps. Supposons qu’ici, la source de chaleur se déplace le long de l’axe  $Ox$ , en considérant le domaine  $\Omega = [0, L_X] \times S$  il est possible de séparer les variables  $(x, t)$  et les variables  $(y, z)$  pour l’approximation des températures :

$$\hat{u}_{ROM}(x, y, z, t; \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{u}^D + \sum_{k=1}^{N_S} \hat{\Psi}_k(y, z) \hat{\gamma}_k(x, t; \boldsymbol{\mu}) \quad (4)$$

Cette décomposition s'obtient par la méthode SVD appliquée à une matrice de snapshot où chaque colonne correspond à un champ défini dans  $(y, z)$ . En pratique chaque plan  $(y, z)$  du maillage a une fonction de forme directionnelle éléments finis associée notée  $(\xi_j(x))_{j=1}^{N_X}$ . On en déduit une représentation unidirectionnelle des  $\hat{\gamma}_k$  :

$$\hat{\gamma}_k(x, t; \boldsymbol{\mu}) = \sum_{j=1}^{N_X} \xi_j(x) \gamma_p(t; \boldsymbol{\mu}), \quad k = 1, \dots, N_S, \quad p = (j-1)N_S + k \quad (5)$$

On en déduit des modes directionnels 3D pour la température qui ne sont plus des modes POD :

$$\mathbf{u}_{ROM}(x, y, z, t; \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{u}^D + \sum_{p=1}^{N_S \times N_X} \Psi_p(x, y, z) \gamma_p(t; \boldsymbol{\mu}) \quad (6)$$

avec

$$\Psi_p(x, y, z) = \hat{\Psi}_k(y, z) \xi_j(x), \quad p = (j-1)N_S + k \quad (7)$$

En procédant ainsi, le domaine réduit proposé conserve la séparation des variables tel que  $\Omega_Z = [0, L_X] \times S_Z$ , avec  $S_Z \subset S$ . Ce domaine réduit est ensuite complété par les contributions 3D des bases réduites en déplacement et en contrainte dans le calcul mécanique (ou par les bases réduites en température et en gradient thermique).

### 3 Validation sur un cas-test de soudage

La méthode d'hyper-réduction directionnelle a été développée dans *code\_aster*, pour la valider sur des cas proches de cas industriels.

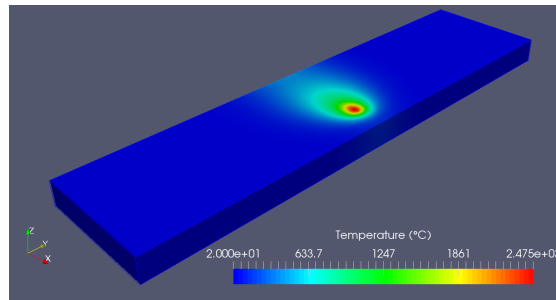


FIGURE 4 – Champ de température issu du calcul éléments finis.

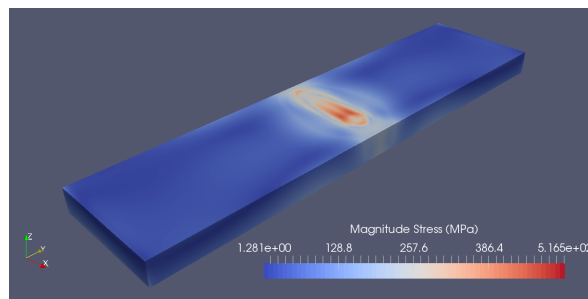


FIGURE 5 – Champ de contrainte issu du calcul éléments finis.

Une ligne de fusion est simulée sur une plaque de 200 mm de large, de 50 mm de longueur et de 10 mm d'épaisseur. La ligne de fusion est réalisée au milieu de la surface haute, dans la longueur de la plaque. Des éléments hexaédriques sont considérés pour la construction d'un maillage régulier de la plaque, avec un pas de discrétisation de 1 mm. On obtient un maillage de 112761 nœuds qui engendre un temps de calcul "élevé" lors de la résolution du problème par la méthode des éléments finis "classique".

Les données de matériaux et de conditions limites sont disponibles dans [11]. La Figure 4 montre le champ de température du cas-test tandis que la Figure 5 présente la contrainte équivalente de von Mises.

La durée du cas-test est 50 secondes avec un pas de discrétisation de 0,5 secondes. C'est-à-dire 101 pas de temps pour enregistrer dans la matrice de snapshots du calcul thermique et mécanique. Ces matrices nous permettent de construire la matrice de base réduite séparément pour chaque physique.

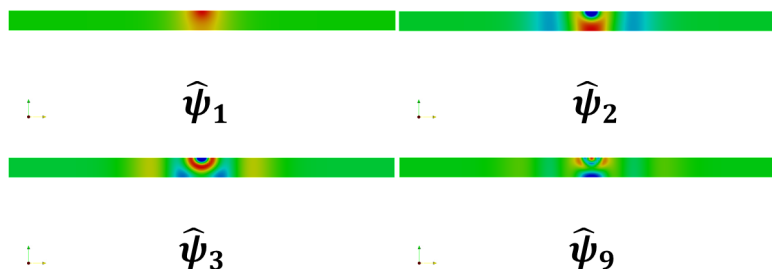


FIGURE 6 – Modes empiriques d’une tranche dans le modèle directionnel.

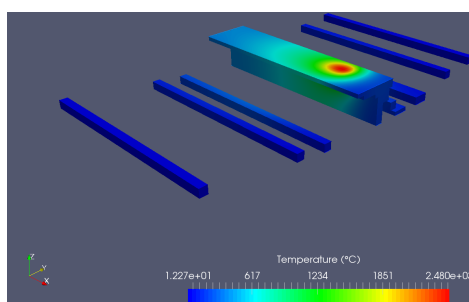


FIGURE 7 – Champ de température sur le domaine réduit d’intégration issu du calcul d’hyper-réduction du modèle directionnel.

Les modes POD de champs de température dans les plans transverses à la ligne de soudage sont montrés sur la Figure 6. Nous obtenons 9 modes  $\hat{\psi}_k$  pour 51 tranches dans la direction  $x$ . Il y a donc  $459 = 9 \times 51$  modes directionnels pour les champs de température. Le domaine réduit est présenté sur la Figure 7.

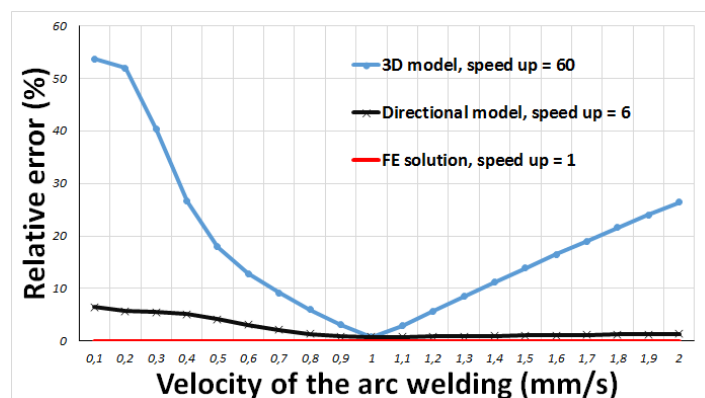


FIGURE 8 – Etude paramétrique : Erreur relatives pour différentes vitesses.

Sur la Figure 8, on présente le domaine de validité du modèle hyper-réduit lorsqu’on fait varier la vitesse d’avance de la source de chaleur est montré. La vitesse de référence est de 1 mm/s avec laquelle on a construit le modèle hyper-réduit 3D et directionnel. On constate que les modes directionnels ont un domaine de validité plus grand que les modes POD en thermique.

Les gains en temps de calcul sont présentés dans le Tableau 1 et le Tableau 2.

Les modes POD de champs de déplacements sont au nombre de 11 ; quelques uns sont présentés sur la Figure 9. Il y en a 11. A la vue de ce résultat la mécanique semble moins complexe que la thermique

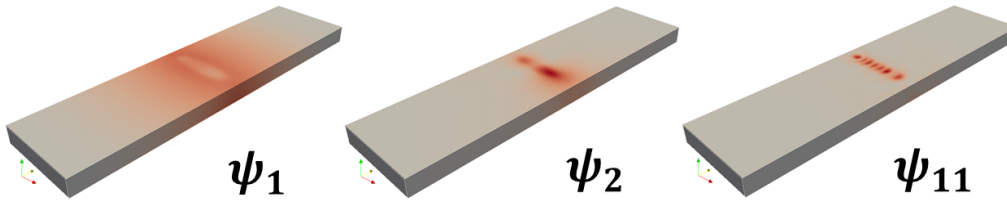


FIGURE 9 – Modes empiriques de champ de déplacement

du soudage. Les gains en temps de calcul sont plus élevés comme indiqué dans le [Tableau 3](#).

TABLE 1 – Gains de calcul du modèle 3D en thermique

Number of modes	Galerkin-POD		Hyper-réduction	
	Relative Error	Speed Up	Relative Error	Speed Up
22	1.8E-3	2.6	2.7E-2	70
50	2.5E-4	2.3	2.2E-3	67
72	1.4E-5	2.1	7.5E-5	62
80	2E-6	2	8.5E-6	60

TABLE 2 – Gains de calcul du modèle directionnel en thermique

Number of modes	Relative Error	Speed Up
459	1%	6.5

TABLE 3 – Gains de calcul du modèle 3D en mécanique

Number of modes	Relative error	Speed up
11	5%	120

## 4 Conclusion

L'hyper-réduction directionnelle offre des gains en temps de calcul importants, d'un facteur de 10. Du fait d'un domaine réduit extrudé dans la direction de soudage, ce domaine est plus grand que celui obtenu classiquement par hyper-réduction. Mais le domaine de validité de l'hyper-réduction directionnelle est bien plus grand quand on fait varier des paramètres de soudage. Comme le problème mécanique est moins complexe que le problème thermique, des modes POD classiques suffisent à le réduire. Le domaine réduit est commun aux simulations thermique et mécanique, afin de faciliter le couplage faible des problèmes.

## Références

- [1] Lionel Depradeux and Frédérique Rossillon. A time saving method to compute multi-pass weld residual stresses. In *ASME 2013 Pressure Vessels and Piping Conference*, pages V06BT06A063–V06BT06A063. American Society of Mechanical Engineers, 2013. 1
- [2] David Albrecht. Calcul des déformations induites par un rechargement de type overlay. Technical report, EDF-R&D Chatou, 2013. 1
- [3] David Ryckelynck. Hyper-reduction of mechanical models involving internal variables. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 77(1) :75–89, 2009. 1, 2
- [4] L.X. Wang and Roderick V.N. Melnik. Model reduction applied to square to rectangular martensitic transformations using proper orthogonal decomposition. *Applied Numerical Mathematics*, 57(5) :510 – 520, 2007. 2
- [5] D Ryckelynck. A priori hyperreduction method : an adaptive approach. *Journal of computational physics*, 202(1) :346–366, 2005. 2
- [6] David Ryckelynck, Florence Vincent, and Sabine Cantournet. Multidimensional a priori hyper-reduction of mechanical models involving internal variables. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 225 :28–43, 2012. 2
- [7] Yancheng Zhang, Alain Combescure, and Anthony Gravouil. Efficient hyper reduced-order model (hrom) for parametric studies of the 3d thermo-elasto-plastic calculation. *Finite Elements in Analysis and Design*, 102-103 :37 – 51, 2015. 2
- [8] Richard Everson and Lawrence Sirovich. Karhunen–loeve procedure for gappy data. *JOSA A*, 12(8) :1657–1664, 1995. 2
- [9] John Lumley and Bérengère Podvin. Dynamical systems theory and extra rates of strain in turbulent flows. *Experimental thermal and fluid science*, 13(3) :180–189, 1996. 2
- [10] David Ryckelynck, Komlanvi Lampoh, and Stéphane Quilicy. Hyper-reduced predictions for lifetime assessment of elasto-plastic structures. *Meccanica*, 51(2) :309–317, 2016. 2
- [11] Lionel Depradeux. *Simulation numérique du soudage-acier 316L : validation sur cas tests de complexité croissante*. PhD thesis, Villeurbanne, INSA, 2004. 5