

## Mise en équation simplifiée de deux rotors aubagés couplés

C. Dumartineix<sup>1,2</sup>, B. Chouvion<sup>1</sup>, F. Thouverez<sup>1</sup>, M.O. Parent<sup>2</sup>

<sup>1</sup> LTDS, Ecole Centrale Lyon, *cecile.dumartineix@doctorant.ec-lyon.fr; {benjamin.chouvion, fabrice.thouverez}@ec-lyon.fr*

<sup>2</sup> Safran Aircraft Engines, *marie-oceane.parent@safrangroup.com*

**Résumé** — L'optimisation des turboréacteurs nécessite l'étude des interactions des rotors au travers des roulements. Compte tenu de leurs propriétés de symétrie cyclique, les roues aubagées sont généralement étudiées dans leur repère mobile. Pour un système couplé bi-rotor, l'association de deux repères mobiles distincts introduit dans l'équation du mouvement des coefficients périodiques temporels, complexifiant l'étude du problème. Une méthode de projection dans un repère commun assurant la suppression de ces termes temporels est proposée.

**Mots clés** — roue aubagée, système bi-rotor, équation différentielle à coefficients périodiques

### 1 Introduction

Les turboréacteurs sont des machines complexes composées d'une succession de roues aubagées. Ils doivent répondre à des impératifs de performances aérodynamique et acoustique, ainsi que de tenue mécanique à la rotation, à la température et aux chargements dynamiques. Lors de leur conception, les roues aubagées sont généralement étudiées séparément grâce à des modèles éléments finis fidèles à leur géométrie réelle et assurant ainsi un dimensionnement précis de la structure. Leur comportement dynamique peut toutefois être fortement impacté par les interactions avec les autres organes de la machine. Une étude de la dynamique d'ensemble est alors nécessaire, d'autant plus dans le contexte actuel d'optimisation des turboréacteurs.

Un modèle éléments finis de l'ensemble du moteur n'étant pas envisageable pour des raisons de coût numérique, les phénomènes de couplage sont étudiés séparément et progressivement intégrés dans des modèles de complexité croissante. Parmi ces phénomènes, on relève aussi bien des interactions accidentelles comme des contacts sommet d'aube/carter, que des interactions architecturales liées notamment aux assemblages inter-étages ou aux structures bi-rotor. La difficulté des assemblages inter-étages réside dans la perte des propriétés de symétrie cyclique. En tant que structure périodique, une roue aubagée peut être modélisée grâce à un unique secteur [11], limitant ainsi le nombre de degrés de liberté à traiter tout en conservant un comportement dynamique fiable. Lorsqu'on associe deux roues possédant un nombre d'aubages différent et donc des secteurs non-concomitants, une étude directe en symétrie cyclique n'est plus possible et la méthode doit être adaptée [8, 1].

Le phénomène de couplage qui nous intéresse ici concerne les systèmes bi-rotor. Comme représenté Figure 1, les turboréacteurs possèdent couramment deux rotors coaxiaux tournant à des vitesses différentes. La présence d'un roulement entre ces deux rotors entraîne un transfert d'énergie et crée un couplage dynamique entre les deux structures. Comprendre l'influence de ce couplage sur le comportement dynamique des aubages est essentiel pour la conception des lignes d'arbre.

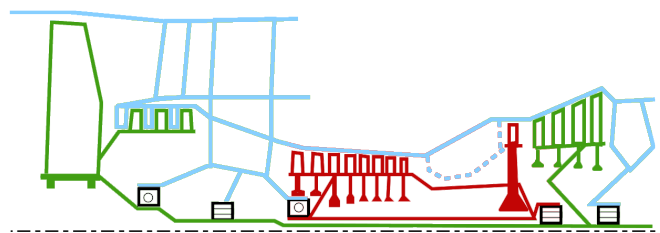


FIGURE 1 – Coupe d'un turboréacteur double corps.  
Rotor basse pression (—), rotor haute pression (—), stator (—)

Le choix du repère d'étude est une problématique importante pour un système bi-rotor. Si on écrit l'équation du mouvement d'une structure tournante dans un repère fixe, on introduit dans les matrices des coefficients périodiques temporels de période égale à la vitesse de rotation [2]. Cette forme d'équation, appelée équation de Mathieu, ne correspond pas à une équation standard aux valeurs propres théoriquement indépendantes du temps. Il est malgré tout possible de traiter ce type d'équation dans le cas d'un système linéaire [10]. Mais pour reproduire fidèlement le comportement dynamique des roues aubagées, certaines non-linéarités comme les contacts frottants en pied d'aube doivent être prises en compte.

La solution généralement retenue est de décrire une roue aubagée dans son propre repère mobile tournant à la même vitesse qu'elle. Dans ce cas les termes temporels se simplifient et on retrouve une formulation classique. La situation se complique lorsqu'on couple une deuxième roue aubagée tournant à une vitesse différente. Les deux repères mobiles étant distincts, il faudra tenir compte du passage de l'un à l'autre dans l'expression de la matrice de couplage, introduisant de nouveau des termes périodiques temporels, dépendant cette fois de la différence de vitesse entre les deux rotors.

Pour des études de ligne d'arbre et de dynamique d'ensemble, cette difficulté est souvent contournée en modélisant les roues aubagées par de simples disques, donnant alors aux rotors des propriétés d'axi-symétrie. Dans ce cas l'équation du mouvement n'est plus dépendante du repère choisi ce qui facilite l'étude de deux rotors couplés [7]. Toutefois, cette modélisation simplifiée ne tient pas compte de la dynamique des aubages ce qui nous empêche d'étudier l'influence d'un couplage bi-rotor sur les aubes.

L'objectif de cette étude est donc de développer une méthode de pré-traitement de l'équation du mouvement d'un système bi-rotor, assurant la suppression des coefficients périodiques temporels tout en conservant la physique des aubages. On ne travaillera ici qu'en linéaire, le but étant d'étendre ultérieurement la méthode à un cadre non-linéaire. Les méthodes classiques de calculs des modes propres et de résolution pourront ainsi être appliquées.

Pour cela, on propose de s'inspirer de la méthode développée par Salvat et *al.* [9]. Dans cet article, les auteurs introduisent un couplage rotor/stator au travers d'un roulement. En se limitant au premier mode propre de chacune des deux structures, ils mettent en place une projection de l'équation du mouvement dans un repère tournant à la vitesse moitié, supprimant ainsi les termes temporels. Nous proposons ici une adaptation de la méthode dans le cas de deux rotors et en tenant compte d'un plus grand nombre de modes propres. Avec ces modifications, un certain nombre d'hypothèses ne seront plus vérifiées et devront être adaptées.

## 2 Méthode proposée

### 2.1 Système d'étude

Le système étudié, représenté Figure 2, est constitué de deux roues aubagées tournant aux vitesses  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  distinctes et couplées par un roulement. Ce roulement est modélisé par un continuum de raideurs dans les trois directions de densité de raideur  $\kappa$ . Les deux roues aubagées sont décrites par la méthode des éléments finis. Ces structures étant à symétrie cyclique en raison de la présence des aubages, elles sont modélisées dans leur repère mobile respectif. L'amortissement est négligé mais les effets gyroscopiques et d'assouplissement centrifuge sont pris en compte. Pour une roue aubagée, on notera respectivement  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{N}$  ses matrices de masse, raideur, gyroscopique et assouplissement centrifuge exprimées dans son repère mobile, et  $\mathbf{u}$  ses déplacements physiques. Les efforts extérieurs qui lui sont appliqués sont notés  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ . L'équation du mouvement associée à la structure couplée s'exprime :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_1 \\ \ddot{\mathbf{u}}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}}_1 \\ \dot{\mathbf{u}}_2 \end{pmatrix} + \left( \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 + \mathbf{N}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_2 + \mathbf{N}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{c1,1} & \mathbf{K}_{c1,2} \\ \mathbf{K}_{c2,1} & \mathbf{K}_{c2,2} \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{\text{ext},1} \\ \mathbf{F}_{\text{ext},2} \end{pmatrix} \quad (1)$$

où les indices 1 et 2 désignent respectivement les rotors  $R_1$  et  $R_2$ . La matrice  $\mathbf{K}_c$  découle de l'énergie de déformation du roulement et assure mathématiquement le couplage dynamique des deux structures au travers des termes extra-diagonaux  $\mathbf{K}_{c1,2}$  et  $\mathbf{K}_{c2,1}$ . De plus, les deux roues aubagées étant décrites dans des repères mobiles différents, ces termes extra-diagonaux possèdent des coefficients périodiques temporels provenant du passage d'un repère mobile à l'autre. Notre objectif est de déterminer une projection de cette équation annulant les termes temporels de la matrice  $\mathbf{K}_c$  sans en créer par ailleurs dans les autres matrices.

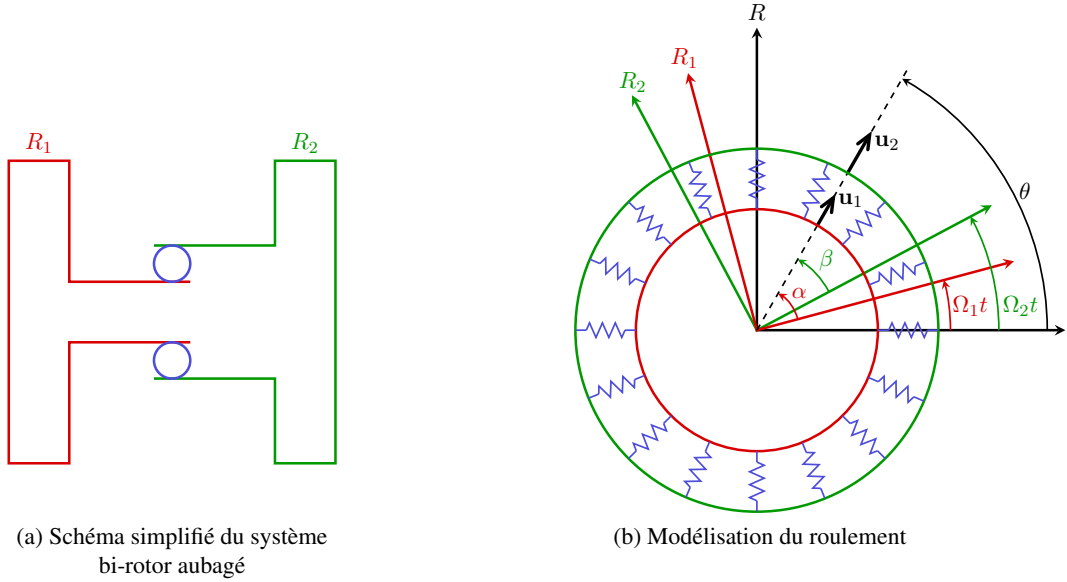


FIGURE 2 – Système bi-rotor étudié

## 2.2 Expression des termes de couplage et choix de la base de projection

On choisit de travailler en base modale. En effet, les expressions connues et simples des matrices structurelles dans cette base faciliteront l'étape de projection en permettant notamment de s'assurer qu'aucun nouveau terme temporel n'est introduit. On note  $\mathbf{V}$  la matrice des vecteurs propres d'un rotor et  $\mathbf{Q}$  les coordonnées modales associées telles que  $\mathbf{u} = \mathbf{V}\mathbf{Q}$ . Pour déterminer cette base modale en présence d'effets gyroscopiques, on utilise une notation en système d'état avec comme nouvelle inconnue :

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, si on note  $\mathbf{\Omega}$  la matrice pseudo-spectrale contenant les valeurs propres du rotor, la matrice pseudo-modale  $\mathbf{W}$  des vecteurs propres en système d'état se construit à partir de la matrice  $\mathbf{V}$  :

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{V}\mathbf{\Omega} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{W}\mathbf{Q}$$

Puisqu'on souhaite travailler en base modale, il est préférable d'exprimer la matrice de couplage directement dans cette base. Cette matrice découle de l'énergie de déformation des raideurs de couplage d'expression :

$$E_p = \frac{1}{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} (\mathbf{u}_1^F - \mathbf{u}_2^F)^T \boldsymbol{\kappa} (\mathbf{u}_1^F - \mathbf{u}_2^F) d\theta$$

L'exposant  $\mathbf{F}$  indique que les déplacements impliqués dans ce calcul se limitent à la frontière de fixation des raideurs, de forme circulaire sur chaque rotor. Ces déplacements sont décomposés sur les vecteurs propres des deux rotors  $\mathbf{V}_{i=1,2}$ . Il est ainsi possible d'exprimer la matrice de couplage en base modale, notée  $\tilde{\mathbf{K}}_c$  :

$$E_p = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \end{pmatrix}^T \underbrace{\int_{\theta=0}^{2\pi} [\mathbf{V}_1^F \quad -\mathbf{V}_2^F]^T \boldsymbol{\kappa} [\mathbf{V}_1^F \quad -\mathbf{V}_2^F] d\theta}_{\tilde{\mathbf{K}}_c} \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \end{pmatrix}$$

L'objectif étant d'étudier l'organisation des termes temporels dans la matrice  $\tilde{\mathbf{K}}_c$  pour ensuite les supprimer par projection, il est nécessaire de calculer analytiquement l'intégrale.

### 2.2.1 Décomposition des vecteurs propres au niveau du roulement sur une base trigonométrique

La première étape consiste à projeter les vecteurs propres au niveau des frontières de fixation des raideurs sur une base trigonométrique :

$$\mathbf{v}^F = \sum_{H=0}^{H_{\max}} \mathbf{a}^H \cos(H\theta) + \mathbf{b}^H \sin(H\theta) \quad (2)$$

Le nombre maximal d'harmoniques spatiales  $H$  qui pourront être déterminées dépend de la discrétisation de la frontière de fixation des raideurs et des fonctions de forme choisies. Cette base est particulièrement adaptée pour ses propriétés d'orthogonalité qui annuleront un certain nombre de termes de  $\tilde{\mathbf{K}}_c$ .

De plus, puisque les deux structures sont à symétrie cyclique, elles admettent des modes à diamètres. Cette propriété conditionne la liste des harmoniques qui seront contenues dans les vecteurs propres. Ainsi, pour une roue aubagée à  $N$  secteurs, les harmoniques spatiales composant les vecteurs propres à  $k$  diamètres vérifieront  $H = \pm k + pN$  avec  $p \in \mathbb{N}$ . La Figure 3 permet d'illustrer cette propriété. Le cercle

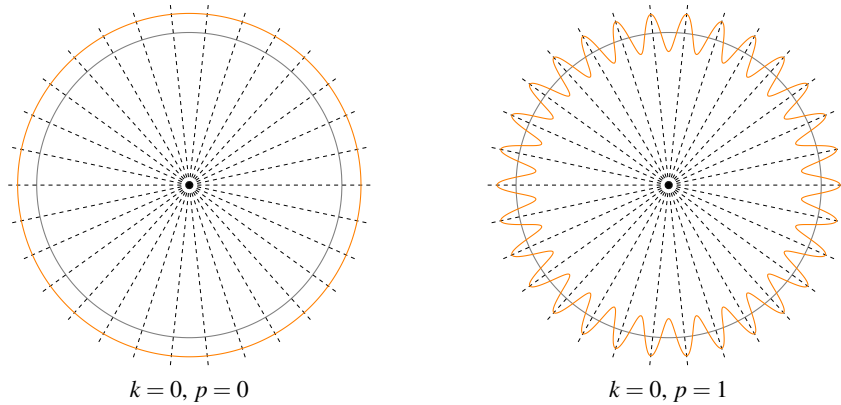


FIGURE 3 – Deux premières harmoniques spatiales pour un mode à 0 diamètre. Configuration initiale (—), configuration déformée (—), délimitation des secteurs (- - -)

gris représente la frontière de fixation des raideurs sur l'une des roues aubagées dans sa configuration non-déformée. Les pointillés délimitent les secteurs de la structure. En orange sont tracées les configurations déformées selon les deux premières harmoniques ( $p = 0$  et  $p = 1$ ) pouvant être présentes dans un mode à 0 diamètre ( $k = 0$ ).

L'intérêt physique de cette décomposition spatiale est de déterminer les modes propres des deux structures qui pourront communiquer au travers du roulement : si un mode propre d'une roue possède dans sa décomposition trigonométrique une harmonique en commun avec un mode propre de la deuxième roue, alors il y aura couplage entre ces deux modes. Mathématiquement, cette propriété est visible après calcul de l'intégrale dans la matrice  $\tilde{\mathbf{K}}_c$ , les termes non nuls correspondant aux harmoniques égales.

### 2.2.2 Choix d'une projection permettant de supprimer les termes périodiques

Après calcul de  $\tilde{\mathbf{K}}_c$ , on remarque que les termes périodiques s'organisent dans la matrice en sous-blocs correspondant à des matrices de rotation, d'angle  $\gamma$  dépendant de la différence de vitesse des deux rotors et de l'harmonique  $H$  concernée :  $\gamma = H(\Omega_2 - \Omega_1)t$ . Il sera donc possible de déterminer pour chaque harmonique une rotation d'angle opposé annulant le terme périodique associé dans  $\tilde{\mathbf{K}}_c$ . Cette rotation correspond comme prévu à la projection des deux rotors dans un repère commun. Toutefois, puisque l'angle de rotation est dépendant de l'harmonique et qu'on ne peut pas dissocier les harmoniques d'un même vecteur lors de la projection, il est nécessaire que chaque vecteur soit décrit par une unique harmonique pour assurer la suppression des termes temporels. Cette propriété correspond au comportement modal d'un anneau, c'est-à-dire une structure circulaire axi-symétrique. Nous devons donc faire l'hypothèse que la zone de fixation du roulement d'une roue aubagée se comporte comme un anneau. Cette hypothèse est acceptable si on considère que le roulement est placé suffisamment loin des aubages, à l'origine du caractère périodique des roues aubagées.

De plus, en raison de la prise en compte des effets gyroscopiques, les vecteurs propres sont complexes. Leurs parties réelles et imaginaires seront étudiées séparément et projetées selon l'équation (2). Pour effectivement supprimer les termes périodiques de la matrice  $\tilde{\mathbf{K}}_c$ , une relation particulière entre les coefficients  $\mathbf{a}^H$  et  $\mathbf{b}^H$  des parties réelle et imaginaire d'un vecteur propre est nécessaire :

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{\text{réel}}^H &= \pm \mathbf{b}_{\text{imag}}^H \\ \mathbf{b}_{\text{réel}}^H &= \mp \mathbf{a}_{\text{imag}}^H\end{aligned}$$

Cette relation est bien vérifiée pour la plupart des modes propres, sauf ceux dont l'harmonique spatiale détectée correspond à une harmonique « simple » du point de vue du maillage, c'est-à-dire pour laquelle on ne peut pas trouver de déformée de même harmonique simplement déphasée. Un exemple d'harmoniques spatiales double et simple est représenté Figure 4. Si on note  $N$  le nombre de secteurs

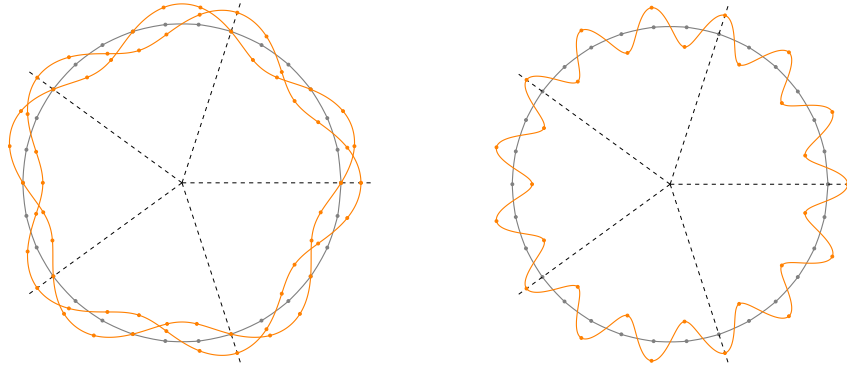


FIGURE 4 – Exemple d'une harmonique double à gauche et simple à droite.  
Configuration initiale (—), configuration déformée (—), délimitation des secteurs (---)

de la structure et  $n_s$  le nombre de nœuds par secteur à la frontière de fixation du roulement, il s'agit des harmoniques  $H$  multiples de  $\frac{Nn_s}{2}$  si  $Nn_s$  est pair ou  $Nn_s$  si  $Nn_s$  est impair. Dans ces cas particuliers, la rotation ne pourra pas être appliquée sans générer de nouveaux termes temporels. Seul le premier mode à 0 diamètre ne posera pas problème puisque pour  $H = 0$ ,  $\mathbf{V}^F = \mathbf{a}^0$  est indépendant du temps et ne nécessite donc pas de projection.

Cette limitation est simplement une contrainte de maillage puisqu'il suffit d'affiner la discrétisation d'un secteur pour augmenter le numéro de la première harmonique problématique. D'autre part, elle concerne des harmoniques d'ordre relativement élevé. Compte tenu de la géométrie du roulement, on s'attend plutôt à un mouvement piloté en priorité par des harmoniques d'ordre faible. Ainsi, mis à part pour les modes d'harmonique nulle, il est probable que ces harmoniques problématiques n'apparaîtront pas dans le couplage des rotors ce qui nous permet de les négliger lors du calcul de  $\tilde{\mathbf{K}}_c$ . On s'affranchit en même temps des problèmes de projection associés. Ces modes sont malgré tout conservés pour les calculs dynamiques sur le reste des deux roues aubagées.

En respectant ces deux hypothèses, on est alors capable de construire une matrice de projection  $\mathbf{P}$  supprimant les termes temporels dans  $\tilde{\mathbf{K}}_c$ . Cette matrice est constituée de matrices de rotation d'angles  $\gamma = H\Omega_{1,2}t$  dépendant des harmoniques  $H$  présentes dans les bases modales des deux rotors.

### 2.3 Projection de l'équation du mouvement

La projection du reste de l'équation du mouvement ne pose pas de problème particulier grâce à sa forme modale simple. Ainsi, les différentes étapes de transformation de l'équation du mouvement peuvent se résumer sous la forme :

Système d'état	Base modale	Projection
$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}$	$\mathbf{U} = \mathbf{W}\mathbf{Q}$	$\mathbf{Q} = \mathbf{P}\hat{\mathbf{Q}}$
$\mathbf{u} \longrightarrow \mathbf{U}$	$\longrightarrow \mathbf{Q}$	$\longrightarrow \hat{\mathbf{Q}}$

On obtient finalement une équation dont toutes les matrices de la partie gauche sont indépendantes du temps :

$$\begin{pmatrix} \dot{\widehat{\mathbf{Q}}}_1 \\ \dot{\widehat{\mathbf{Q}}}_2 \end{pmatrix} + \left( \mathbf{P}^T \dot{\mathbf{P}} - \begin{bmatrix} \Omega_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Omega_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Omega_1^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Omega_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{K}}_{c1,1} & \widehat{\mathbf{K}}_{c1,2} \\ \widehat{\mathbf{K}}_{c2,1} & \widehat{\mathbf{K}}_{c2,2} \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{Q}}_1 \\ \widehat{\mathbf{Q}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1^T \Omega_1^T \mathbf{V}_1^T \mathbf{F}_{\text{ext},1} \\ \mathbf{P}_2^T \Omega_2^T \mathbf{V}_2^T \mathbf{F}_{\text{ext},2} \end{pmatrix} \quad (3)$$

avec  $\mathbf{P}^T \dot{\mathbf{P}}$  une matrice diagonale par bloc indépendante du temps contenant la liste des harmoniques  $H$  des vecteurs propres.

## 2.4 Prise en compte des efforts extérieurs

Nous avons choisi de travailler avec des efforts aérodynamiques générés par les sillages des stators en amont des deux roues aubagées. Bien que l'évolution temporelle de ce type d'excitation s'approche généralement d'une forme de créneau, on fera ici l'approximation d'une excitation sinusoïdale. Ainsi, pour des stators possédant respectivement  $n_1$  et  $n_2$  aubages, les fréquences d'excitation vues par les rotors seront  $n_1 \Omega_1$  et  $n_2 \Omega_2$  et les efforts associés dans les repères mobiles des deux rotors s'écriront sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{ext},1}(r_1, \alpha, x_1, t) &= \mathbf{A}_1(r_1, x_1) \cos n_1(\Omega_1 t + \alpha) + \mathbf{B}_1(r_1, x_1) \sin n_1(\Omega_1 t + \alpha) \\ \mathbf{F}_{\text{ext},2}(r_2, \beta, x_2, t) &= \mathbf{A}_2(r_2, x_2) \cos n_2(\Omega_2 t + \beta) + \mathbf{B}_2(r_2, x_2) \sin n_2(\Omega_2 t + \beta) \end{aligned}$$

avec  $r_{i=1,2}$  et  $x_{i=1,2}$  les positions radiales et axiales, et  $\alpha$  et  $\beta$  les positions angulaires comme représenté Figure 2. L'application aux efforts extérieurs des mêmes transformations que le reste de l'équation du mouvement a pour conséquence d'enrichir leur spectre. On trouvera ainsi, pour chaque harmonique  $H$  présente dans la base modale du rotor  $R_1$ , les harmoniques  $(H + n_1)\Omega_1 t$  et  $(H - n_1)\Omega_1 t$  dans le spectre des efforts appliqués à ce rotor. Les vitesses  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  étant en général incommensurables, une résolution multi-fréquentielle sera nécessaire. Dans un contexte linéaire comme c'est le cas pour cette étude, il est possible d'appliquer le principe de superposition en résolvant l'équation du mouvement séparément pour chaque harmonique  $(H \pm n_{1,2})\Omega_{1,2} t$  présente dans le spectre des efforts extérieurs, puis en sommant les réponses obtenues. En présence de non-linéarités, des méthodes de résolution non-linéaire multi-fréquentielle de type HBM généralisée en hypertemps [5], VCHBM [12] ou encore HBM associée à une transformée de Fourier quasi-périodique [6, 4] pourront être mises en place.

## 2.5 Étude numérique

Une première étude numérique a été réalisée à partir d'anneaux, structures de géométrie simple facilitant la compréhension des phénomènes. Discrétisés en éléments poutre courbe, ces anneaux présentent l'intérêt de conserver les propriétés d'axi-symétrie de la zone de fixation du roulement nécessaires au bon déroulement de la projection. Pour cette étude numérique, nous avons pris en compte un amortissement modal.

Deux simulations sont comparées pour étudier la précision de la méthode : d'une part la résolution dans le domaine fréquentiel de l'équation projetée (3) et d'autre part celle par intégration temporelle de l'équation complète de départ (1) qui sert de référence.

La résolution de l'équation (1) nécessite dans un premier temps d'établir l'expression de la matrice de couplage en base physique  $\mathbf{K}_c$  en fonction du temps. Cette matrice est réévaluée à chaque pas de temps du schéma de résolution. Pour éviter des calculs d'intégrales numériques relativement coûteux, on considère deux anneaux possédant le même nombre total d'éléments. Les paramètres utilisés pour ces simulations sont les suivants :

Paramètres communs :	Anneau 1 :	Anneau 2 :
$R = 0,5 \text{ m}$	$N = 4$	$N = 5$
$b = 0,2 \text{ m}$	$n_s = 5$	$n_s = 4$
$h = 0,05 \text{ m}$	$\Omega = 1 \text{ rad.s}^{-1}$	$\Omega = -5 \text{ rad.s}^{-1}$
$\rho = 7800 \text{ kg.m}^{-3}$	$n = 5$ sillages	
$E = 210 \text{ GPa}$		
$\kappa = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 300 \end{bmatrix} \text{ N.m}^{-1}.\text{rad}^{-1}$		

On choisit de n'exciter que l'anneau 1 pour bien visualiser l'influence du couplage sur l'anneau 2. L'excitation appliquée à l'anneau 1 est purement radiale et a pour expression :

$$\mathbf{F}_{\text{ext},1} = \mathbf{A} \cos n(\Omega_1 t + \alpha_1) + \mathbf{B} \sin n(\Omega_1 t + \alpha_1) \quad \text{avec} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \cdot 10^5 \text{ N} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \cdot 10^5 \text{ N} \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'évolution temporelle des déplacements  $u$  et  $v$  d'un nœud de chaque anneau est représentée Figure 5 en superposant les résultats des deux méthodes de calcul. Des courbes similaires sont obtenues pour les autres nœuds des anneaux. On remarque que les courbes des deux méthodes de résolution se superposent

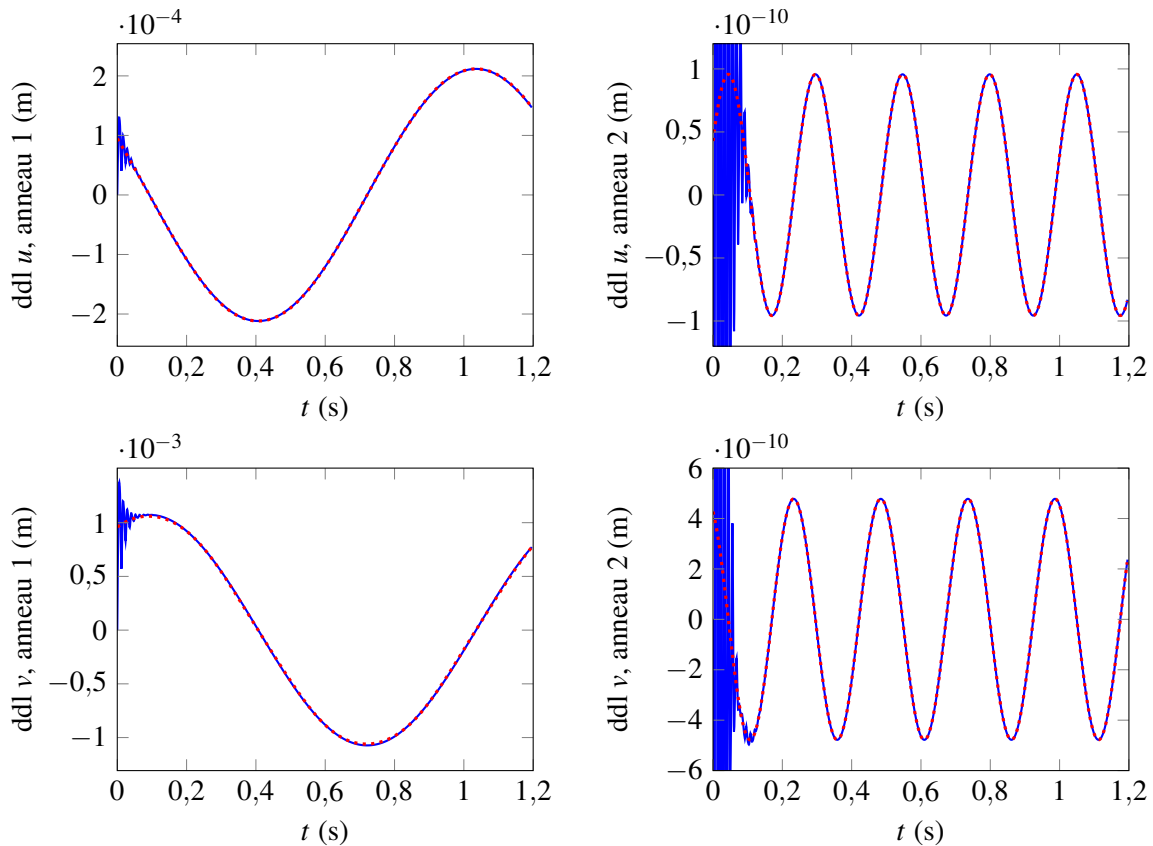


FIGURE 5 – Déplacements des ddl  $u$  (en haut) ou  $v$  (en bas) d'un nœud de l'anneau 1 (à gauche) et 2 (à droite). Résultats de l'intégration temporelle (—) et de la résolution fréquentielle (.....).

bien une fois le régime stationnaire atteint. Les amplitudes des déplacements sont plus faibles pour l'anneau 2, ce qui est cohérent puisqu'il n'est excité que par l'anneau 1 au travers du roulement. Ces résultats sont encourageants concernant la validation de la méthode mise en place. D'autres simulations sont en cours pour mieux en appréhender les limites.

### 3 Conclusion et perspectives

La méthode proposée dans cette étude permet de s'affranchir des coefficients périodiques temporels apparaissant dans l'équation du mouvement de deux roues aubagées couplées par un roulement et tournant à des vitesses différentes. Après calcul des deux bases modales, les vecteurs propres susceptibles de communiquer par l'intermédiaire du roulement sont appariés en fonction de la concordance de leurs harmoniques spatiales. Une projection propre à chaque harmonique est appliquée aux deux structures, assurant la simplification des termes temporels à condition que les zones de fixation du roulement puissent être considérées comme axi-symétriques. On obtient finalement une équation à coefficients constants avec un enrichissement du spectre des efforts extérieurs. Ainsi, l'étude modale du système couplé est

de nouveau possible, les difficultés liées aux coefficients périodiques ayant été rejetées dans les efforts extérieurs.

Les simulations numériques effectuées sur un système simple de deux anneaux couplés par des raideurs donnent des résultats satisfaisants quant à la validation de la méthode développée. L'ajout d'aubages aux anneaux permettrait de complexifier le modèle géométrique afin de tester également la validité de la méthode pour une structure périodique.

Cette approche pourra être complétée en introduisant des efforts non-linéaires. Puisque les efforts appliqués à un rotor se transmettent au deuxième rotor par l'intermédiaire du roulement, on obtiendra un modèle non-linéaire soumis à des excitations multi-fréquentielles nécessitant de développer de nouvelles méthodes de résolution adaptées à ce type de problème.

Enfin, de futurs développements intégreront des notions de dynamique de ligne d'arbre, avec par exemple des déplacements d'ensemble des roues aubagées modélisant les déformations en flexion de l'arbre, afin d'obtenir un modèle plus réaliste utilisable dans un cadre industriel de conception.

## Références

- [1] G. Battiato, C.M. Firrone, T.M. Berruti, B.I. Epureanu. *Reduced order modeling for multi-stage coupling symmetric structures*, Proceedings of ISMA, pages 3447-3462, 2016
- [2] D.J. Ewins. *Modal testing : theory, practice and application*, second edition, Research Studies Press Wiley, 2000.
- [3] T. Gmür. *Dynamique des structures - Analyse modale numérique*, Presses polytechniques et universitaires romandes, 1997.
- [4] T. Guédeney, A. Gomar, F. Gallard, F. Sicot, G. Dufour, G. Puigt. *Non-uniform time sampling for multiple-frequency harmonic balance computations*, Journal of Computational Physics, pages 317-345, 2013.
- [5] M. Guskov, J.J. Sinou, F. Thouverez. *Multi-dimensional harmonic balance applied to rotor dynamics*, Mechanics Research Communications, pages 537-545, 2008.
- [6] K.S. Kundert, G.B. Sorkin, A. Sangiovanni-Vincentelli. *Applying Harmonic Balance to Almost-Periodic Circuits*, IEEE transactions on microwave theory and techniques, pages 366-378, 1988.
- [7] M. Lalanne, G. Ferraris. *Rotordynamics Prediction in Engineering*, second edition, Wiley, 1997.
- [8] D. Laxalde, F. Thouverez, J.P. Lombard. *Dynamical analysis of multi-stage cyclic structures*, Mechanics Research Communications, pages 379-384, 2007.
- [9] N. Salvat, A. Batailly, M. Legrand. *Two-dimensional modeling of unilateral contact-induced shaft precessional motions in bladed-disk/casing systems*, International Journal of Non-Linear Mechanics, pages 90-104, 2015.
- [10] V.E. Shapiro. *Rotating class of parametric resonance processes in coupled oscillators*, Physics Letters A, pages 288-296, 2001.
- [11] D.L. Thomas. *Dynamics of rotationally periodic structures*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, pages 81-102, 1979.
- [12] B. Zhou, F. Thouverez, D. Lenoir. *A variable-coefficient harmonic balance method for the prediction of quasi-periodic response*, Mechanical Systems and Signal Processing, pages 233-244, 2015.