

# Méthode des éléments finis sur maillage cartésien par définition implicite de la géométrie

M. Ballage<sup>1</sup>, J.D. Beley<sup>2</sup>, M. Masmoudi<sup>3</sup>, J.Fehrenbach<sup>4</sup>

<sup>1</sup> IMT, Université de Toulouse III, ANSYS France, marion.ballage@ansys.com

<sup>2</sup> ANSYS France, jean-daniel.beley@ansys.com

<sup>3</sup> Adagos, masmoudi@adagos.com

<sup>4</sup> IMT, Université de Toulouse III, jerome.fehrenbach@math.univ-toulouse.fr

**Résumé** — Générer un maillage sur des géométries complexes augmente de façon significative le temps total de simulation des méthodes des éléments finis. On présente ici une approche sans maillage du domaine, permettant d'obtenir de bons résultats en calcul de structures. Une grille régulière est directement utilisée comme base de calcul. Ce travail se distingue par une représentation du bord du modèle éléments finis par une fonction surfaces de niveau, permettant une meilleure approximation de la géométrie discrétisée et une meilleure prise en compte des conditions aux limites.

**Mots clés** — éléments finis, méthode des éléments finis étendus (XFEM), surfaces de niveau

## 1 Introduction

Dans le contexte de la simulation numérique en calcul de structures, la génération des maillages conformes sur des modèles à géométrie complexe conduit à des tailles de modèles importantes, et amène à imaginer de nouvelles approches éléments finis. Le temps de génération d'un maillage est directement lié à la complexité de la géométrie, augmentant ainsi considérablement le temps de calcul global.

La méthode des éléments finis étendus permet de prendre en compte la géométrie et les interfaces à travers un choix adéquat de fonctions d'enrichissement. Cette méthode discrétise par exemple sans mailler explicitement les fissures, et évite surtout de remailler au cours de leur propagation [3], [5]. Des adaptations de cette méthode sont faites afin de ne pas avoir besoin d'un maillage conforme à la géométrie [4], [6]. La méthode introduite dans ce papier s'inspire de cette littérature, avec une représentation implicite de la géométrie, ce qui permet une bonne approximation de la géométrie et des conditions aux limites sans pour autant s'appuyer sur un maillage conforme.

Après un bref rappel sur la méthode des éléments finis, nous décrivons la méthode objet de cet article. La géométrie est représentée par une fonction surfaces de niveau. Une méthode d'intégration adaptée à cette représentation géométrique est proposée. L'intégration peut s'avérer coûteuse en temps de calcul, c'est pour cette raison que nous proposons une technique d'apprentissage donnant la matrice élémentaire de rigidité en fonction des valeurs de la fonction surfaces de niveau aux sommets de l'élément considéré. Nous terminons ce papier par la présentation de quelques résultats numériques.

## 2 Méthodes des éléments finis

### 2.1 Méthode des éléments finis standard

On se place dans le cadre de structures élastiques en deux dimensions, sous l'hypothèse des petits déplacements et des petites perturbations en régime quasi-statique et d'un matériau linéaire, homogène, isotrope. Mais la méthode a été développée avec un souci d'adaptation à un contexte plus général, notamment aux problèmes tridimensionnels.

La méthode des éléments finis classique subdivise le domaine en éléments et se ramène à une équation matricielle à résoudre (1). Soit l'équation de l'équilibre discrétisée :

$$KU = F, \quad (1)$$

avec  $K$  la matrice de rigidité,  $U$  le vecteur des degrés de liberté du système et  $F$  le vecteur des forces externes au système. La matrice  $K$  est l'assemblage de matrices de raideur  $k_e$  calculées par une méthode de quadrature de Gauss sur chaque élément (2).

$$k_e = \sum_{i=1}^r w_i B_i^T D B_i \det(J_i), \quad (2)$$

avec  $r$  le nombre de points de quadrature envisagé,  $w_i$  les poids de la quadrature,  $B$  la matrice de passage des déplacements aux déformations,  $D$  l'opérateur linéaire des rigidités élastiques et  $J$  la matrice jacobienne liée à l'élément. La formulation de la matrice de raideur  $k_e$  (2) est directement liée à la forme de l'élément.

## 2.2 Méthode des éléments finis par intégration implicite de la géométrie

La géométrie est représentée par une fonction de niveau que l'on appelle la densité. Cette fonction est supérieure à 0.5 à l'intérieur du domaine de calcul et inférieure à 0.5 à l'extérieur. La fonction, définie par ses valeurs aux points nœuds du maillage, est interpolée à l'intérieur de chaque élément.

La méthode des éléments finis implémentée sur une grille régulière reprend la formulation écrite en (2). Cependant, certains éléments sont coupés par la fonction surfaces de niveau et l'intégration de la matrice de raideur ne doit se faire que sur la partie pleine de l'élément. La méthode de quadrature de Gauss qui permet d'intégrer des polynômes de manière exacte n'est plus adaptée. On propose d'utiliser une méthode de quadrature avec des points d'intégration répartis sur une grille régulière et dense.

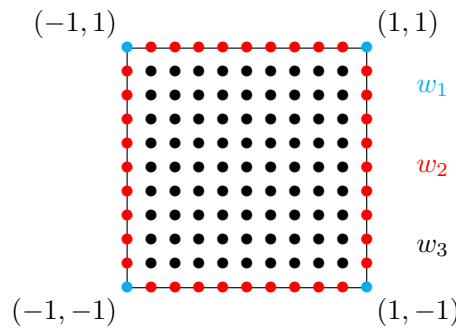


FIGURE 1 – Points et poids d'intégration associés sur un élément de référence quelconque

La somme des poids des points d'intégration doit être égale à l'aire de l'élément de référence en deux dimensions ou au volume en trois dimensions. Ainsi, l'intégration d'une fonction constante est exacte. Pour l'élément de la figure 1, on a :

$$\sum_{i=1}^{n_{pi}} w_i = 4,$$

avec  $n_{pi}$  le nombre de points d'intégration. On impose des conditions sur les poids d'intégration :

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{2} w_2 \\ w_2 &= \frac{1}{2} w_3. \end{aligned}$$

Cette méthode d'intégration peut être vue comme une méthode de définition de fonctions de forme discontinues qui s'annulent à l'extérieur de l'élément coupé. La figure 2 montre un exemple des fonctions de formes utilisées sur un élément du bord d'un domaine circulaire.

En prenant en compte ces fonctions de formes, l'équation (2) de la méthode standard devient :

$$k_e = \sum_{i_k=1}^s w_{i_k} B_{i_k}^T D B_{i_k} \det(J_{i_k}),$$

avec  $s$  le nombre de points d'intégration de l'élément à l'intérieur du domaine, dont les indices sont notés  $i_k$ .

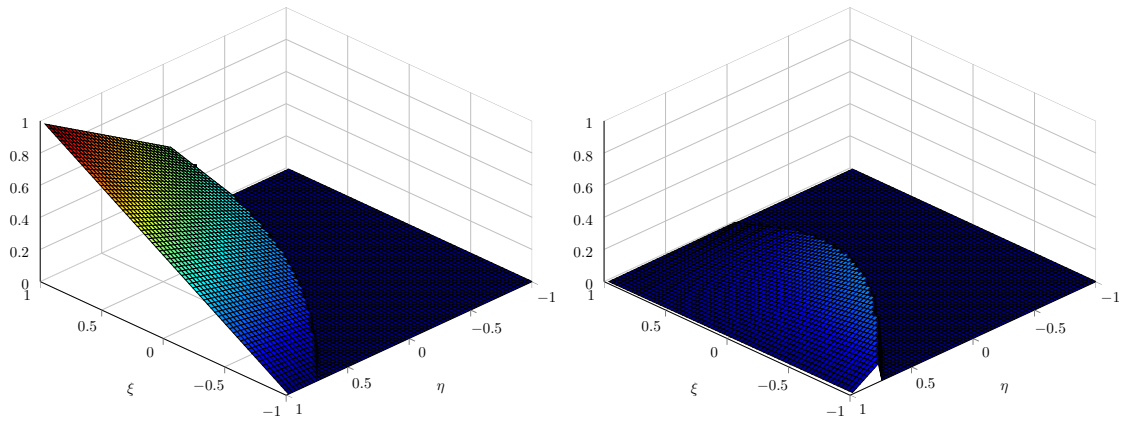


FIGURE 2 – Fonctions de forme discontinues

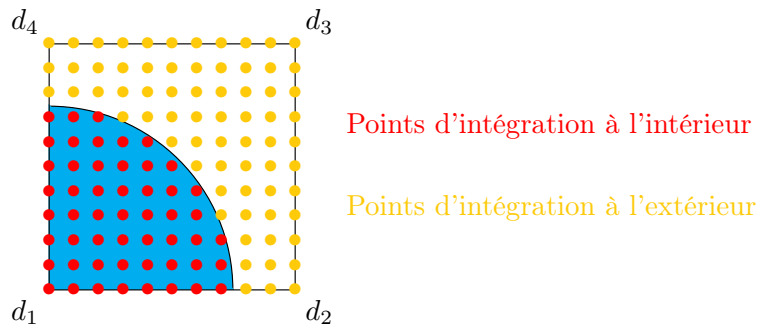


FIGURE 3 – Points d'intégration sur un élément à l'interface courbe

### 2.2.1 Couplage avec une fonction courbe de niveau

Pour permettre à la méthode d'être précise, l'important est d'arriver à une bonne approximation de la géométrie. La méthode des éléments finis étendus approxime usuellement par une découpe de l'élément en triangles [2]. Une technique classique consiste dans ce cas à adapter cette triangulation à la fonction représentant la géométrie, ce qui revient à remailler localement le domaine [1]. En général, le bord est approché par un segment de droite qui coupe l'élément. Cette approximation est pauvre en comparaison avec la géométrie, représentée par la surface de niveau :

$$\Gamma = \{(x, y) \mid \varphi(x, y) = 0.5\}.$$

On choisit d'approcher le bord du domaine par une fonction bilinéaire en  $x$  et  $y$  sur chaque élément (3), stockée seulement aux nœuds. Ainsi, un champ scalaire défini aux nœuds de la grille permet de reconstruire la fonction de niveau dans chaque cellule.

$$\Gamma(x, y) = a + bx + cy + dxy. \quad (3)$$

La figure 4 illustre l'approximation d'une frontière courbe par une fonction bilinéaire définie comme surface de niveau.

### 2.3 Apprentissage des matrices de raideur

Afin d'accélérer la méthode d'intégration précédemment proposée, on propose d'introduire une méthode d'apprentissage. On souhaite apprendre un nombre important de matrices de raideur d'éléments coupés afin de les calculer à partir de leurs densités.

En premier lieu, on génère aléatoirement un ensemble  $E$  d'éléments coupés. Pour créer ces éléments, on génère aléatoirement quatre densités par élément comprises entre 0 et 1. Ces densités, correspondant aux valeurs du champ scalaire défini aux nœuds cité dans la section précédente, permettent de construire des fonctions de niveau sur chaque élément. Les matrices de raideur de ces éléments sont calculées sur une grille de points d'intégration fine.

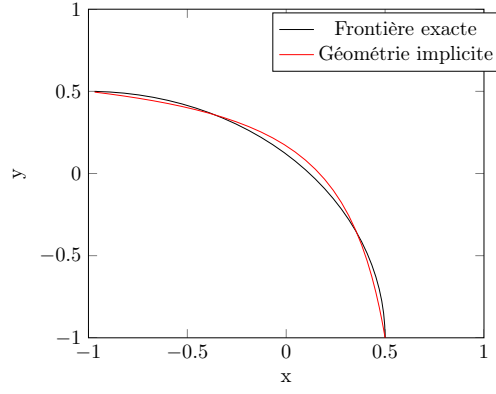


FIGURE 4 – Approximation du bord par une fonction surfaces de niveau

On applique ensuite une décomposition des matrices de raideur dans une base  $V_i$  :

$$k_e = \sum_i^{n_v} c_i V_i, \quad (4)$$

avec  $n_v$  le nombre de vecteurs de la base et  $c_i$  les coefficients de la décomposition. La base choisie correspond aux premiers vecteurs de la décomposition en valeurs singulières de l'ensemble des matrices de raideur. La base des vecteurs singuliers choisie est de taille six pour une grille de points d'intégration de taille  $100 \times 100$  et un ensemble  $E$  de taille 17000.

Puis, une régression quadratique est appliquée aux coefficients de la base afin de trouver une fonction les reliant aux densités des éléments. On cherche un polynôme  $p$  de degré deux tel que :

$$p(\{d_{1,e}, d_{2,e}, d_{3,e}, d_{4,e}\}) = \{c_{1,e}, \dots, c_{n_v,e}\}, \quad (5)$$

pour l'ensemble des éléments  $e \in E$ . On stocke les densités dans une matrice  $D_i$  (6) et les coefficients de la base dans une matrice  $C$  (7).

$$D_i = \begin{pmatrix} 1 & d_{1,1} & d_{2,1} & d_{3,1} & d_{4,1} & d_{1,1}^2 & \dots & d_{3,1}d_{4,1} \\ 1 & d_{1,2} & d_{2,2} & d_{3,2} & d_{4,2} & d_{1,2}^2 & \dots & d_{3,2}d_{4,2} \\ & & \vdots & & & & & \\ 1 & d_{1,n_e} & d_{2,n_e} & d_{3,n_e} & d_{4,n_e} & d_{1,n_e}^2 & \dots & d_{3,n_e}d_{4,n_e} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

avec  $n_e$  le nombre d'éléments appris.

$$C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{2,1} & \dots & c_{n_v,1} \\ c_{1,2} & c_{2,2} & \dots & c_{n_v,2} \\ & \vdots & & \\ c_{1,n_e} & c_{2,n_e} & \dots & c_{n_v,n_e} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

La régression quadratique (5) peut alors s'écrire sous forme matricielle :

$$D_i A = C, \quad (8)$$

avec  $A$  la matrice d'apprentissage.

Une fois toutes les matrices apprises, retrouver la matrice de raideur d'un élément coupé est très rapide, puisqu'il suffit de multiplier la matrice d'apprentissage par les densités de l'élément afin de récupérer les coefficients  $c_i$ , puis d'appliquer l'équation (4).

### 2.3.1 Résultats

Les résultats sont présentés sur un modèle plaque trouée en deux dimensions, ce modèle est représenté sur la figure 5.

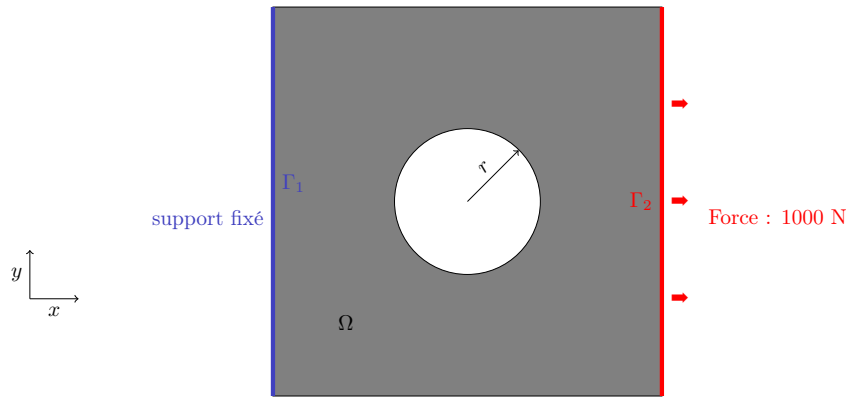


FIGURE 5 – Modèle de la plaque trouée avec conditions initiales

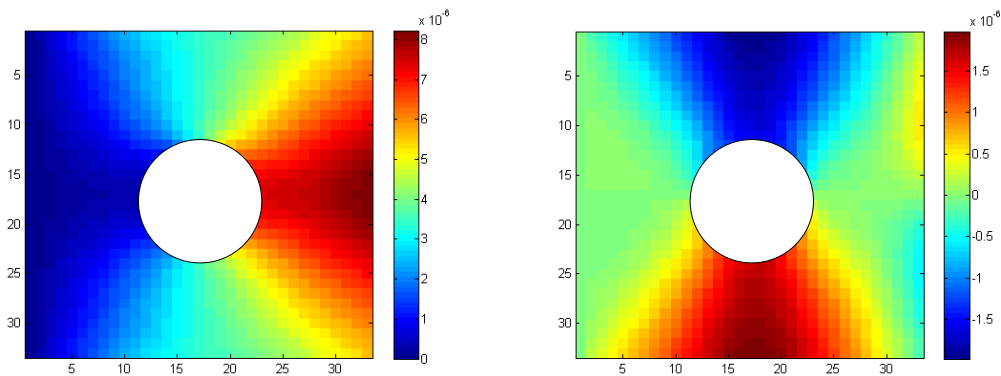


FIGURE 6 – Les résultats en déplacements sur la plaque trouée avec une grille  $32 \times 32$ , en  $x$  à gauche, en  $y$  à droite

### Résultats en déplacements

La figure 6 montre les résultats en déplacements en  $x$  et  $y$  de cette méthode. La simulation a été lancée sur une grille de trente-deux éléments par trente-deux éléments.

Afin de vérifier la convergence de la méthode, on la compare avec une solution sur un maillage convergé de la méthode des éléments finis standard. Ce maillage de référence contient 330000 nœuds. On s'intéresse à la convergence du maximum des déplacements. La méthode a été lancée sur des grilles de taille  $16 \times 16$ ,  $32 \times 32$ ,  $64 \times 64$ , puis  $128 \times 128$ . La figure 7 permet d'observer que le maximum des déplacements converge bien vers le maximum obtenu avec le maillage de référence.

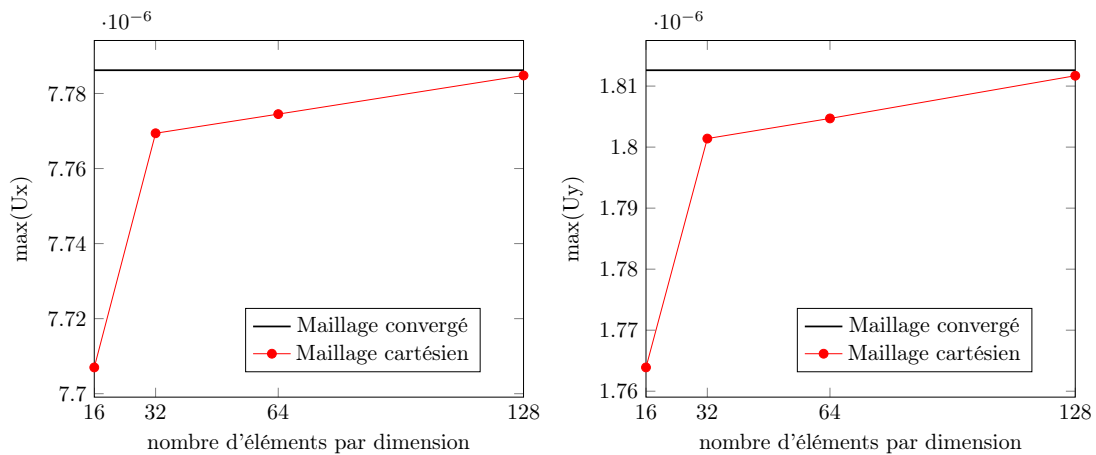


FIGURE 7 – Convergence du maximum du déplacement en  $x$  à gauche, en  $y$  à droite

### Résultats en contraintes

La figure 8 montre les résultats en contraintes simulées sur une grille  $32 \times 32$ . En post-traitement, on interpole ensuite les résultats en contraintes sur une grille  $512 \times 512$  pour une meilleure visualisation. Cette méthode converge vers la solution d'une méthode éléments finis classique avec un coût de maillage nul et un temps de formation des matrices élémentaires modérés.

Cette méthode va par la suite être testée sur des modèles d'une plus grande complexité. La majeure difficulté pour passer au cas tridimensionnel est d'arriver à bien apprendre un jeu énorme de matrices élémentaires associées à toutes les possibilités d'éléments coupés.

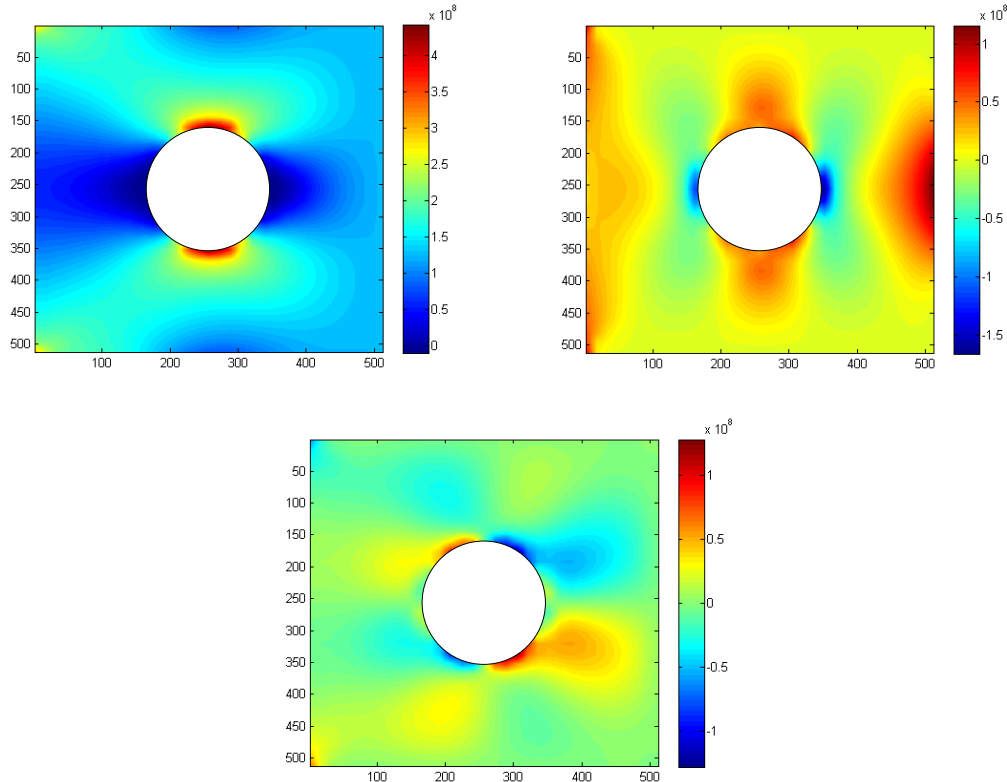


FIGURE 8 – Les résultats en contraintes sur la plaque trouée avec une grille  $32 \times 32$ , en  $x$  en haut à gauche, en  $y$  en haut à droite, en  $xy$  en bas

## Références

- [1] T. BELYTSCHKO, C. PARIMI, N. MOËS, N. SUKUMAR, S. USUI. *Structured extended finite element methods for solids defined by implicit surfaces*, International journal for numerical methods in engineering, page609-635, 2003.
- [2] T-P. FRIES, T. BELYTSCHKO. *The extended/generalized finite element method : An overview of the method and its applications*, International journal for numerical methods in engineering, page253-page304, 2010.
- [3] S. KUMAR, I.V. SINGH, B.K. MISHRA. *A homogenized XFEM approach to simulate fatigue crack growth problems*, Computers and Structures, page1-page22, 2015.
- [4] S.E. MOUSAVI, N. SUKUMAR. *Generalized Duffy transformation for integration vertex singularities*, Computational Mechanics, page127-page140, 2010.
- [5] M. STOLARSKA, D.L. CHOPP, N. MOËS, T. BELYTSCHKO. *Modelling crack growth by level sets in the extended finite element method*, International journal for numerical methods in engineering, page943-page960, 2001.
- [6] T. STROUBOULIS, K. COPPS, I. BABUSKA. *The generalized finite element method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, page4081-page4163, 2001.