

# Une méthode éléments finis "Local Average Contact" pour le frottement

M. Abbas<sup>1,3</sup>, G. Drouet<sup>1</sup>, P. Hild<sup>2</sup>, N. Pignet<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> EDF R&D, {mickael.abbas,guillaume.drouet,nicolas.pignet}@edf.fr

<sup>2</sup> IMT, Université de Toulouse 3, {patrick.hild,nicolas.pignet}@math.univ-toulouse.fr

<sup>3</sup> Institut des Sciences de la Mécanique et Applications Industrielles, UMR 9219 EDF-CNRS-CEA-ENSTA, Université Paris Saclay, mickael.abbas@edf.fr

---

**Résumé** — Dans ce travail nous présentons une méthode de type “Local Average Contact” (LAC) pour simuler des problèmes de frottement. Ce type de méthode consiste à moyenner localement les conditions de contact et/ou de frottement sur une zone comprenant un ou plusieurs éléments. Cette technique applicable aux problèmes bi- et tri-dimensionnels et utilisable pour les éléments finis linéaires et quadratiques est particulièrement adaptée à la gestion des maillages incompatibles sur l’interface de contact. La méthode a été implantée sur *code\_aster* développé par EDFR&D (voir [4]).

**Mots clés** — contact, méthode “Local Average Contact”, frottement.

---

## 1 Introduction

La méthode des éléments finis constitue l’outil de simulation traditionnel en mécanique du contact [12, 18]. Ces problèmes de contact avec ou sans frottement comportent une ou plusieurs conditions aux limites non linéaires provenant de la non-interpénétration des objets contactants ainsi que des seuils de glissement/adhérence. De plus, la gestion de maillages non-compatibles (noeuds qui ne sont pas en vis à vis) sur l’interface de contact amène une difficulté numérique supplémentaire. Initialement les techniques de prise en compte des maillages incompatibles étaient locales et de type noeud-segment en 2D ou noeud-face en 3D. Bien qu’assez intuitives et simples à implanter, ces méthodes ne donnent pas en général entière satisfaction aussi bien du point de vue numérique (oscillations artificielles, mauvaises performances dans le cas de patch tests) que du point de vue théorique (taux de convergence faibles). Par ailleurs, le milieu académique a été très productif dans ce domaine ces vingt dernières années pour proposer des méthodes convergeant rapidement (méthodes de type mortar, voir les premiers travaux [8, 15]). Ces méthodes consistent à utiliser une simple projection  $L^2$  sur un espace joint, i.e., un espace d’éléments finis défini entre les deux objets. Les différents choix d’espaces joints engendrent toute une famille de méthodes de type "mortar". Cependant ces méthodes possèdent d’importants désavantages lorsque l’on considère leur implémentation de manière générique dans un code industriel. Les deux principaux inconvénients dans notre cas sont la non-localité de la méthode (méthodes "mortar" standard [8, 15, 16]) et la définition non analytique des espaces éléments finis joints pour certains types d’éléments (méthode dual mortar [14]). La méthode LAC introduite dans [5, 6] permet déjà de réaliser des simulations en mécanique non-linéaire en prenant en compte le contact sans frottement sur tous les types d’éléments (linéaires et quadratiques) avec un maillage incompatible à l’interface. L’objectif de cette présentation est de généraliser la méthode LAC au cas du frottement de Coulomb.

## 2 La méthode "Local Average Contact" pour le frottement

### 2.1 Formulation forte du problème de contact-frottement

On cherche le champ de déplacement  $u : \overline{\Omega^1} \cup \overline{\Omega^2} \rightarrow \mathbb{R}^d$  ( $d = 2$  ou  $d = 3$ ) avec  $u_\ell = u|_{\Omega^\ell}$  tel que les conditions (1)–(6) soient satisfaites :

$$-\operatorname{div} \sigma(u_\ell) = f_\ell, \quad \sigma(u_\ell) = \mathcal{A}\varepsilon(u_\ell) \quad \text{dans } \Omega^\ell, \quad (1)$$

$$\sigma(u_\ell)n_\ell = F_\ell \quad \text{sur } \Gamma_N^\ell, \quad (2)$$

$$u_\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D^\ell, \quad (3)$$

$$[u_N] \leq 0, \quad \sigma_N \leq 0, \quad \sigma_N[u_N] = 0 \quad \text{sur } \Gamma_C. \quad (4)$$

Les conditions (1)–(3) constituent les équations linéaires (élasticité, conditions de Neumann et de Dirichlet sur la frontière) et (4) modélise le contact unilatéral sur la zone de contact potentielle  $\Gamma_C$ . En notant  $\mathcal{F} \geq 0$  le coefficient de frottement, la condition de frottement statique sur  $\Gamma_C$  s'écrit :

$$\text{si } [u_T] = 0 \quad \text{alors} \quad |\sigma_T| \leq -\mathcal{F}\sigma_N, \quad (5)$$

$$\text{si } [u_T] \neq 0 \quad \text{alors} \quad \sigma_T = \mathcal{F}\sigma_N \frac{[u_T]}{|[u_T]|}. \quad (6)$$

Lorsque  $\mathcal{F} = 0$  la condition de frottement se résume à  $\sigma_T = 0$  sur  $\Gamma_C$ . Dans les équations ci-dessus  $\sigma_N$  et  $\sigma_T$  désignent les contraintes normales et tangentielles sur la zone de contact tandis que  $[u_N]$  (resp.  $[u_T]$ ) représente les déplacements normaux (resp. tangentiels) relatifs entre les deux solides sur  $\Gamma_C$ .

Sur le plan mathématique l'étude du problème est très partielle et on dispose seulement de résultats d'existence de solutions lorsque le coefficient de frottement est petit (seuil maximal proche de 1, voir [7]), d'exemples de non unicité lorsque le coefficient de frottement est grand (au delà de 1, voir [9]), de conditions suffisantes assurant l'unicité pour des coefficients de frottement petits [17] et d'études de singularités et de non unicité pour des problèmes de poinçons, [2].

### 2.2 Discrétisation

Concernant la discrétisation, nous choisissons une formulation éléments finis avec un espace  $V^h$  de champs de déplacements continus de degré 1 ou 2 ainsi que deux multiplicateurs de Lagrange (un pour le contact et un pour le frottement) constants par macro-maille (une macro-maille est une union de mailles contenant au moins le support d'une fonction de base) de telle sorte que la condition inf-sup soit satisfaite en 2D et en 3D pour tout type d'éléments finis [5, 6]. L'espace des fonctions constantes par morceaux sur les macro-maillages est noté  $X_0^h$ . Le problème par éléments finis devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^h \in V^h, \lambda_N^h \in \Lambda_N^h \text{ et } \lambda_T^h \in \Lambda_T^h(\mathcal{F}\lambda_N^h) \text{ tels que :} \\ a(u^h, v^h) = l(v^h) + \int_{\Gamma_C} \lambda_N^h v_N^h d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \lambda_T^h v_T^h d\Gamma, \quad \forall v^h \in V^h, \\ \lambda_N^h \in \Lambda_N^h, \quad \int_{\Gamma_C} (\mu_N^h - \lambda_N^h) u_N^h d\Gamma \geq 0, \quad \forall \mu_N^h \in \Lambda_N^h, \\ \lambda_T^h \in \Lambda_T^h(\mathcal{F}\lambda_N^h), \quad \int_{\Gamma_C} (\mu_T^h - \lambda_T^h) u_T^h d\Gamma \geq 0, \quad \forall \mu_T^h \in \Lambda_T^h(\mathcal{F}\lambda_N^h), \end{array} \right. \quad (7)$$

où  $a(\cdot, \cdot)$  et  $l(\cdot)$  désignent respectivement la forme bilinéaire de l'élasticité et la forme linéaire prenant en compte l'action des chargements  $f_\ell$  et  $F_\ell$ . De plus

$$\Lambda_N^h = \left\{ \lambda_N^h \in X_0^h : \lambda_N^h \leq 0 \text{ sur } \Gamma_C \right\},$$

$$\Lambda_T^h(\mathcal{F}\lambda_N^h) = \left\{ \lambda_T^h \in (X_0^h)^{d-1} : |\lambda_T^h| \leq -\mathcal{F}\lambda_N^h \text{ sur } \Gamma_C \right\}.$$

On peut alors montrer que le problème discret (7) admet toujours une solution et que cette solution est unique si le coefficient de frottement est plus petit que  $C\sqrt{h}$  où  $h$  désigne le pas de discrétisation. De plus on peut montrer que si la solution du problème continu satisfait le critère d'unicité de [17] et qu'elle est régulière (il s'agit ici à la fois d'une régularité au sens des espaces de Sobolev mais aussi d'une régularité sur la transition entre les zones de glissement et d'adhérence) alors les solutions du problème discret (une ou plusieurs) convergent vers l'unique solution du problème continu avec une vitesse dépendant des régularités précédentes (voir [10]).

## 2.3 Implémentation du modèle

Le socle théorique de la méthode LAC nous impose de satisfaire une hypothèse géométrique spécifique pour créer les macro-maillages (voir [5, 6]). L'implémentation du modèle repose sur les concepts développés par M. Zarroug ([3]) : le contact est résolu par la création de mailles d'interface fictives entre les deux surfaces, après l'opération d'appariement. Pour la résolution, on opte pour l'utilisation d'un algorithme de type Newton généralisé (voir [11]), gérant la non-linéarité géométrique, la stratégie de type contraintes actives pour la non-linéarité de contact (voir [13]) et la non linéarité de comportement à l'intérieur de la même boucle de Newton. La méthode proposée implique donc les évolutions suivantes :

- une modification du maillage sur la zone de contact esclave (non invasive dans le volume) ;
- une définition des Lagrangiens de contact et de frottement a priori du calcul ;
- un appariement de type "segment-segment" en 2D et de type "face-face" en 3D ;
- le développement de calculs élémentaires (matrices et vecteurs) correspondant aux contributions du contact et du frottement.

Dans le cas du frottement, la méthode a été programmée uniquement en 2D pour l'instant.

## 3 Résultats numériques

Le problème de Hertz avec frottement a été utilisé pour illustrer la bonne gestion de l'incompatibilité de maillages par la méthode dans le cas d'un contact-frottant déformable-déformable. On se place dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations et on considère un cylindre de diamètre  $100mm$  en acier (module de Young  $E = 210GPa$  et un coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ ). Le cylindre en contact frottant (coefficient de Coulomb  $\mathcal{F} = 0.2$ ) avec un bloc de côté  $200mm$  en aluminium (module de Young  $E = 70GPa$  et un coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ ). On adopte un comportement élastique linéaire pour les deux solides. Le cylindre est soumis à une force nodale de  $35kN$  en son sommet. Ce chargement est appliqué en 10 pas de temps uniformes pour  $t \in [0, 1]$ . On utilise une approximation 2D représentative du problème (hypothèse des déformations planes) ainsi que la symétrie afin de simplifier le problème. Les deux solides sont maillés de manière non-compatible. On affiche la contrainte  $\sigma_{xy}$ , respectivement  $\sigma_{yy}$  qui peuvent s'interpréter comme étant la pression tangentielle, respectivement la pression de contact, au niveau de la zone de contact pour  $t = 0.5$  (au milieu du chargement, voir Figure 1) et pour  $t = 1.0$  (à la fin du chargement, voir Figure 2).

On dispose également d'une solution analytique pour la pression de contact, voir [13], ce qui permet de montrer la bonne précision de la méthode lors de l'utilisation de maillages quadratiques puisque l'écart relatif à l'origine entre les solutions analytique et calculée est de 1.9 % et la coordonnée de transition contact/non-contact est comprise entre  $6.1mm$  et  $6.4mm$  pour une valeur théorique de  $6.21mm$ , voir Figure 3.

## 4 Conclusion

La méthode LAC a été étendue au cas du frottement de Coulomb sur la base d'un socle théorique rigoureux. L'implémentation dans le logiciel bénéficie des avantages apportés initialement par cette méthode, comme la non-intrusivité, et ré-utilise les outils déjà développés dans le cas de la méthode LAC sans frottement. De plus, des travaux récents ont été menés afin d'améliorer les performances de l'algorithme d'appariement "mortar", très coûteux initialement, afin de pouvoir fonctionner en calcul parallèle. A moyen terme, il est prévu de développer une formulation de type "Lagrangien augmenté", afin d'améliorer la robustesse de la méthode, particulièrement en grandes déformations et en plasticité. Les travaux

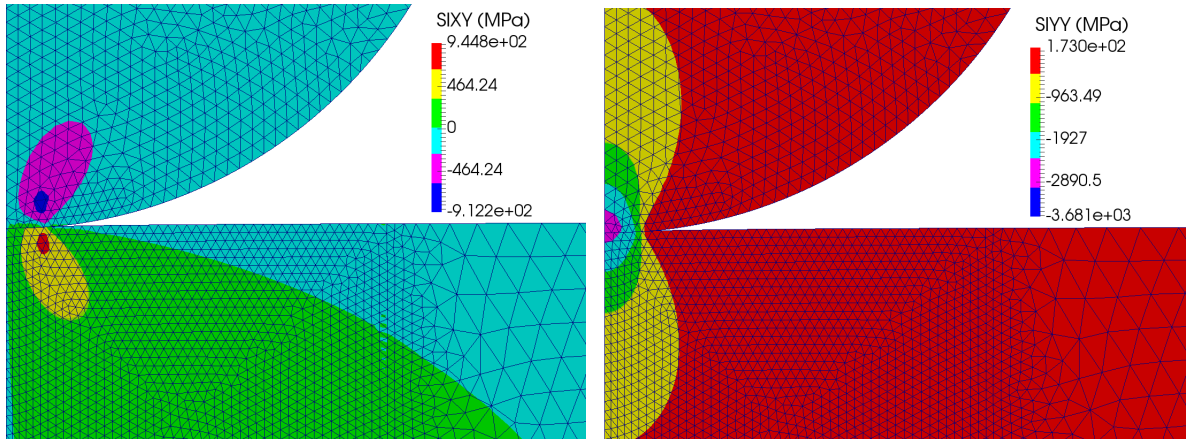


FIGURE 1 – Résultats numériques obtenus avec la condition LAC en 2D avec un maillage triangulaire à 6 nœuds pour  $t = 0.5$  : Contrainte  $\sigma_{xy}$  (gauche) et contrainte  $\sigma_{yy}$  (droite) sur la configuration déformée.

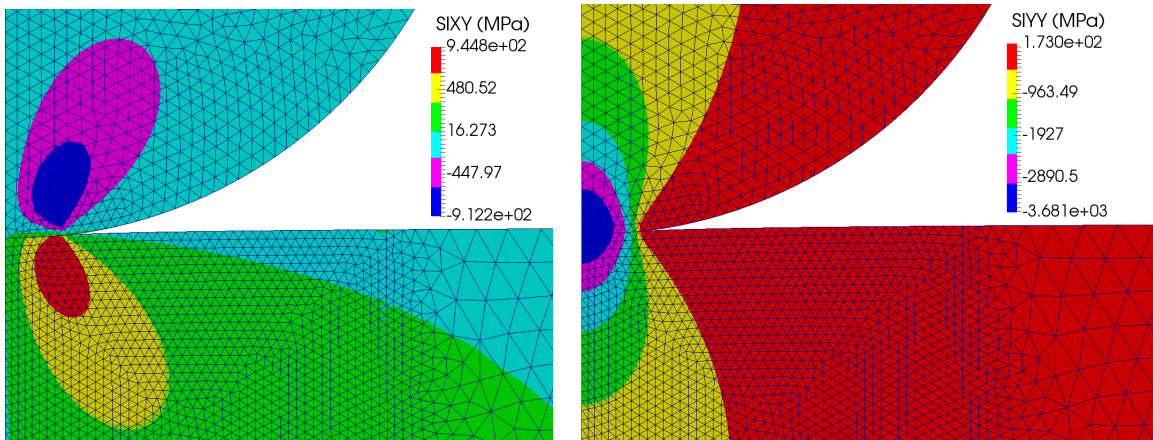


FIGURE 2 – Résultats numériques obtenus avec la condition LAC en 2D avec un maillage triangulaire à 6 nœuds pour  $t = 1.0$  : Contrainte  $\sigma_{xy}$  (gauche) et contrainte  $\sigma_{yy}$  (droite) sur la configuration déformée.

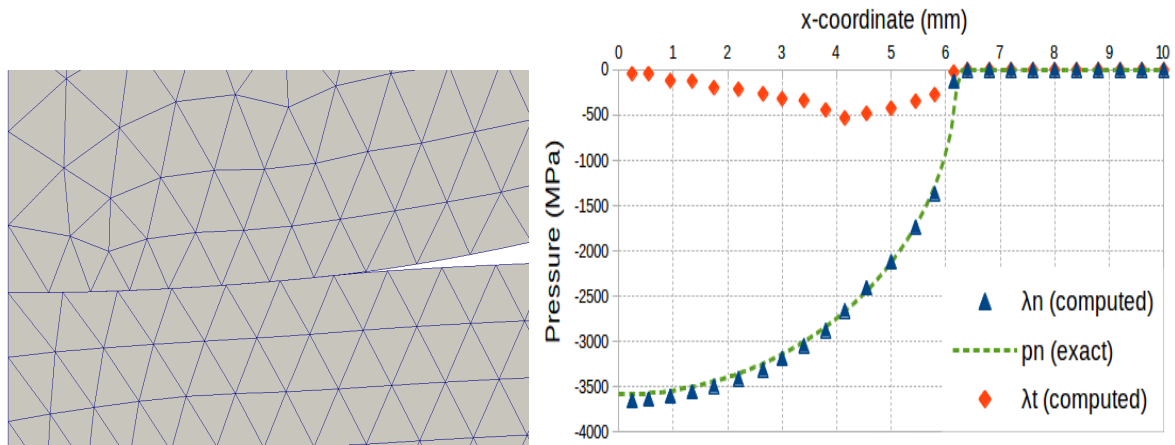


FIGURE 3 – Résultats numériques obtenus avec la condition LAC en 2D avec un maillage triangulaire à 6 nœuds pour  $t = 1.0$  : Interface de contact entre les deux solides sur la configuration déformée (gauche). Multiplicateurs de Lagrange normal et tangentiel, pression de contact exacte (droite).

de [11] sur le contrôle des cyclages déjà développé pour les autres méthodes de contact/frottement pourront s'adapter au cas de la LAC.

## Références

- [1] M. Abbas, G. Drouet, P. Hild. *The Local Average Contact method*, en préparation.
- [2] P. Ballard, J. Jarusek. *Indentation of an Elastic Half-space by a Rigid Flat Punch as a Model Problem for Analysing Contact Problems with Coulomb Friction*, J. of Elasticity, 103, pp. 15–52, 2011.
- [3] H. Ben Dhia, I. Vautier, M. Zarroug. *Problèmes de contact frottant en grandes transformations : du continu au discret*, Revue Européenne des Éléments Finis, 9, pp. 243–261, 2000.
- [4] *code\_aster et salome\_meca, plateforme de simulation en thermomécanique*, logiciel Open Source sur [www.code-aster.org](http://www.code-aster.org), EDF, 1989-2017.
- [5] G. Drouet. *Méthode locale de type mortier pour le contact dans le cas de maillages incompatibles de degré élevé*, thèse de doctorat, Université Toulouse 3, 2015.
- [6] G. Drouet, P. Hild. *An accurate Local Average Contact method for nonmatching meshes*, à paraître dans Numer. Math. (2016).
- [7] C. Eck, J. Jarusek. *Existence results for the static contact problem with Coulomb friction*, Math. Models Methods Appl. Sci., 8, pp. 445–468, 1998.
- [8] P. Hild. *Numerical implementation of two nonconforming finite element methods for unilateral contact*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 184, pp. 99–123, 2000.
- [9] P. Hild. *Non-unique slipping in the Coulomb friction model in two-dimensional linear elasticity*, Quart. J. Mech. Appl. Math., 57, pp. 225-235, 2004.
- [10] P. Hild and N. Pignet. *A local average contact method with friction*, en préparation.
- [11] A.D. Kudawoo. *Problèmes industriels de grande dimension en mécanique numérique du contact : performance, fiabilité et robustesse*, thèse de doctorat, Université Aix-Marseille, 2012.
- [12] T. Laursen. *Computational contact and impact mechanics*, Springer-Verlag, 2002.
- [13] A. Popp, M. W. Gee, W. A. Wall. *A finite deformation mortar contact formulation using a primal-dual active set strategy*, Int. J. Numer. Meth. Engrg. 79, pp. 1354–1391, 2009.
- [14] A. Popp, B. I. Wohlmuth, M. W. Gee, W. A. Wall. *Dual quadratic mortar finite element methods for 3D finite deformation contact.*, SIAM J. Sci. Comput. 34, pp. 421–446, 2012.
- [15] M. A. Puso, T. Laursen. *A mortar segment-to-segment contact method for large deformation solid mechanics*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 193, pp. 601–629, 2004.
- [16] M. A. Puso, T. Laursen, J. Solberg. *A mortar segment-to-segment contact method for quadratic elements and large deformations*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 197, pp. 555–566, 2008.
- [17] Y. Renard. *A uniqueness criterion for the Signorini problem with Coulomb friction*, SIAM J. Math. Anal., 38, pp. 452–467, 2006.
- [18] P. Wriggers, *Computational contact mechanics*, Wiley, 2002.