

Contact thermique et mécanique des surfaces rugueuses en présence d'un gradient de propriétés

Y. Waddad^{1,2}, V. Magnier¹, P. Dufrénoy¹, G. De Saxcé¹

¹ Université Lille 1, Laboratoire de Mécanique de Lille (LML), FRE CNRS 3723, F-59650 Villeneuve d'Ascq, France

² waddad.yassine@gmail.com

Résumé — On propose, dans cet article, une stratégie multi-échelle de modélisation du contact thermique et mécanique prenant en compte l'effet de la rugosité et la présence d'un gradient de propriétés normal à la surface. A l'échelle de la rugosité, les solides en contact sont considérés comme des multicouches. Le problème de contact est ensuite résolu en utilisant la transformée de Fourier et la technique des matrices de transfert. Grâce à cette méthode, la conductance thermique et la raideur mécanique du contact sont calculées puis intégrées dans un calcul thermo-mécanique à l'échelle d'un système réel. Enfin, des exemples sont présentés et comparés à des calculs par éléments finis.

Mots clés — Rugosité, gradient de propriétés, transformée de Fourier, matrices de transfert

Introduction

La démarche de conception de plusieurs systèmes d'ingénierie nécessite la prise en compte des phénomènes se produisant au niveau du contact. Dans ce but, les outils de simulation numérique présentent un moyen efficace permettant leur modélisation. Or, les phénomènes de contact sont de nature multiphysiques (mécanique et thermique) et se produisent à des échelles fines (par exemple la rugosité). Il est donc nécessaire d'adopter une stratégie multi-échelle, avec notamment des couplages multi-physiques, permettant d'enrichir les modèles numériques macroscopiques visant à évaluer les performances de ces systèmes.

Quand deux solides sont en contact, l'aire de contact est en général très faible par rapport à l'aire apparente à cause de la rugosité des surfaces[5]. Sur un autre plan, dans diverses applications, tels que les revêtements ou les composites, le matériau en contact peut être considéré comme un multicouche. Dans d'autres, tels que les matériaux de friction, le matériau possède un gradient de propriétés évoluant dans le sens normal aux surfaces de contact dû principalement à l'impact de la sollicitation thermique. Ce matériau pourrait être assimilé à un matériau multicouche.

La présence d'un gradient de propriétés et de la rugosité ont un impact sur les performances tribologiques du système tels que l'usure, le frottement et la rigidité de contact ([2][5][6]).

Dans ce travail, nous allons étudier les propriétés thermiques et mécaniques des interfaces, à savoir la conductance thermique et la raideur de contact, prenant en compte la rugosité et la présence d'un gradient de propriétés mécaniques et thermiques. Ces deux paramètres serviront à enrichir des modèles éléments finis thermo-mécaniques suivant une démarche multi-échelle [7].

Le présent papier est structuré comme suit. Tout d'abord, le cadre général de cette étude et les différentes hypothèses considérées sont présentées dans la partie 1. Ensuite, dans la partie 2, seront présentées les solutions analytiques relatives aux problèmes mécanique et thermique. Puis, le problème de contact est résolu dans la partie 3. La partie 4 est dédiée à la stratégie d'enrichissement qui exploite les calculs à l'échelle microscopique pour enrichir les modèles macroscopiques. Enfin, les résultats du modèle sont illustrés et discutés dans la partie 5.

1 Cadre général

Nous considérons deux corps solides S_1 et S_2 en contact normal sans frottement. La surface de contact est supposée macroscopiquement plane. Les solides S_1 et S_2 sont maintenus en contact grâce à des dé-

placements δ_1 et δ_2 imposés à leurs extrémités respectives. En outre, La température de ces extrémités est respectivement fixée à θ_{l1} et θ_{l2} . Si $\theta_{l1} \neq \theta_{l2}$, un flux de chaleur traverse l'interface du plus chaud au plus froid solide.

Ainsi, l'interface de contact représente une source de chaleur qui s'ajoute aux efforts de contact agissant sur la surface de chacun des deux solides. Compte tenu de la rugosité des surfaces, les chargements mécaniques et thermiques sont localisés sur quelques zones de faible taille par rapport à la surface apparente de contact. Il est à noter que les effets de radiation ainsi que la présence d'air à l'intérieur de l'interface ne sont pas pris en compte.

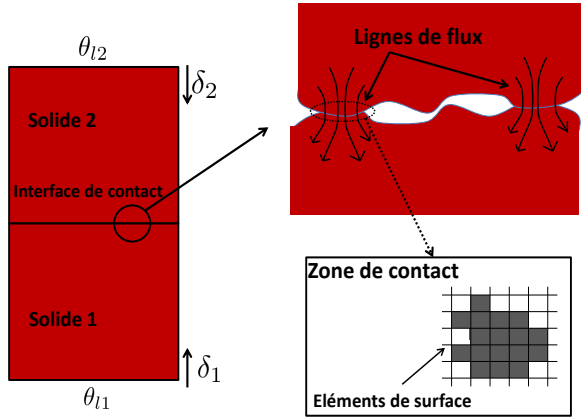


FIGURE 1 – Schéma du modèle de contact

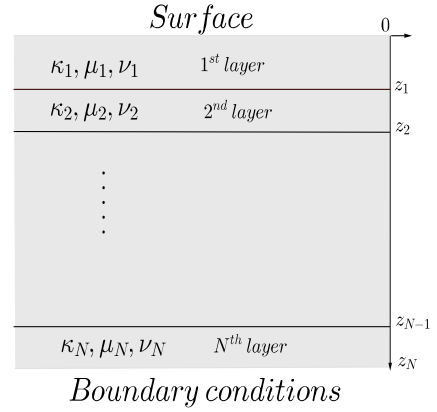


FIGURE 2 – Schéma d'un solide multi-couches. κ est la conductivité thermique et (μ, ν) sont les coefficients de Lamé

Les deux solides sont composés de couches homogènes et élastiques et latéralement infinies (voir fig.2). Nous supposons qu'il y a une parfaite continuité entre deux couches successives appartenant au même solide.

La résolution du problème de contact consiste ainsi à calculer les efforts de contact et le flux de chaleur pour les conditions aux limites imposés aux extrémités des deux solides et prenant en compte la rugosité des surfaces et la structure multi-couches des deux solides. Pour cela, il est nécessaire de calculer les déplacements (resp. températures) que produisent, dans un solide multi-couches, des efforts (resp. des flux de chaleur) quelconques exercés sur une partie de leur surface.

Dans ce qui suit, nous présentons une solution à chacun de ses deux problèmes puis nous détaillerons, par la suite, la stratégie de modélisation du contact. Nous tenons à préciser que les déformations thermo-élastiques ne sont pas considérés dans ce travail.

2 Modélisation des solides multi-couches soumis à des chargements thermiques et mécaniques

2.1 Problème mécanique

Afin de résoudre le problème mécanique, nous utilisons la technique des matrices de transfert proposée dans [3]. Pour cela, nous notons le vecteur des contraintes $\mathbf{T}_z = [\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}]^t$ et le vecteur des déplacements $\mathbf{u} = [u_x, u_y, u_z]^t$. En utilisant la transformée de Fourier, nous introduisons les représentations suivantes des vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{T}_z

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_\xi \\ w_\eta \\ w_z \end{bmatrix} = \int_0^{+\infty} \begin{bmatrix} i\xi/\rho^2 & i\eta/\rho^2 & 0 \\ i\eta/\rho^2 & -i\xi/\rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \exp[i(\xi x + \eta y)] \mathbf{u} dx dy$$

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_\xi \\ \tau_\eta \\ \tau_z \end{bmatrix} = \int_0^{+\infty} \begin{bmatrix} i\xi/\rho^2 & i\eta/\rho^2 & 0 \\ i\eta/\rho^2 & -i\xi/\rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \exp[i(\xi x + \eta y)] \mathbf{T}_z dx dy$$

où $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$.

En exploitant l'équation d'équilibre, la loi de Hooke et l'équation de compatibilité géométrique, on peut montrer que les variables transformées sont solution d'un problème aux valeurs propres. Si le milieu considéré est une couche horizontale et infinie, ces variables satisfont les équations suivantes

$$\begin{bmatrix} w_\eta^{(+)} \\ \tau_\eta^{(+)} / \rho \end{bmatrix} = \mathbf{T}_\eta \begin{bmatrix} w_\eta^{(-)} \\ \tau_\eta^{(-)} / \rho \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} w_z^{(+)} \\ \rho w_\xi^{(+)} \\ \tau_z^{(+)} / \rho \\ \tau_\xi^{(+)} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{z\xi} \begin{bmatrix} w_z^{(-)} \\ \rho w_\xi^{(-)} \\ \tau_z^{(-)} / \rho \\ \tau_\xi^{(-)} \end{bmatrix}$$

où l'exposant $(+)$ (resp. $(-)$) est utilisé pour les variables propres à la surface supérieure (resp. inférieure) de la couche, et $\mathbf{T}_{z\xi}$ et \mathbf{T}_η sont les matrices de transfert de la couche et sont exprimées en fonction de son épaisseur et ses propriétés mécaniques.

On considère à présent un solide multi-couches formé de N couches horizontales. Si nous considérons qu'il y a une parfaite continuité entre deux couches successives, alors le champ de déplacement \mathbf{u} et le vecteur de contraintes \mathbf{T}_z sont continus. En utilisant, les matrices de chaque couche, on obtient

$$\begin{bmatrix} w_\eta^{(0)} \\ \tau_\eta^{(0)} / \rho \end{bmatrix} = \underbrace{\mathbf{T}_\eta^{(1)} \dots \mathbf{T}_\eta^{(N)}}_{\mathbf{R}} \begin{bmatrix} w_\eta^{(N)} \\ \tau_\eta^{(N)} / \rho \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} w_z^{(0)} \\ \rho w_\xi^{(0)} \\ \tau_z^{(0)} / \rho \\ \tau_\xi^{(0)} \end{bmatrix} = \underbrace{\mathbf{T}_{z\xi}^{(1)} \dots \mathbf{T}_{z\xi}^{(N)}}_{\mathbf{S}} \begin{bmatrix} w_z^{(N)} \\ \rho w_\xi^{(N)} \\ \tau_z^{(N)} / \rho \\ \tau_\xi^{(N)} \end{bmatrix}$$

où l'exposant (0) (resp. (N)) est utilisé pour la surface supérieure (resp. inférieure) du solide.

En exploitant ces deux équations ainsi que les conditions aux limites imposées à la surface inférieure du solide, on trouve

$$\begin{bmatrix} w_z^{(0)} \\ \rho w_\xi^{(0)} \\ w_\eta^{(0)} \end{bmatrix} = \mathbf{F} \begin{bmatrix} \tau_z^{(0)} / \rho \\ \tau_\xi^{(0)} \\ \tau_\eta^{(0)} / \rho \end{bmatrix}, \text{ where } \mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 \\ F_{21} & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & F_{33} \end{bmatrix} \quad (1)$$

La matrice \mathbf{F} est dite matrice de transfert du solide. Les coefficients de cette matrice dépendent des propriétés élastiques de chaque couche, de leurs épaisseurs et des conditions aux limites définies à la surface inférieure du solide.

L'équation 1 permet d'exprimer les déplacements à la surface supérieure pour quelconque chargement appliqué à cette même surface. Suivant la même démarche, les contraintes et déplacements dans chaque point du solide peuvent être exprimés en fonction de ces chargements.

Dans cette étude, on se limite au contact sans frottement. Ainsi, les contraintes tangentielles surfaciques ne sont pas considérées. On en déduit que

$$w_z^{(0)} = F_{11}(\rho) \tau_z^{(0)} \quad (2)$$

2.2 Problème thermique

Le problème thermique se résout de la même façon que le problème mécanique. Notons T la température et $\Phi = [\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z]^t$ est le vecteur du flux de chaleur. En utilisant la transformée de Fourier, nous introduisons les variables suivantes

$$V = \iint T(x, y, z) \exp[i(\xi x + \eta y)] dx dy \text{ et } \phi = - \iint \Phi_z(x, y, z) \exp[i(\xi x + \eta y)] dx dy$$

En exploitant l'équation de la chaleur en régime permanent et la loi de Fourier, on montre que ces variables sont solution d'un problème aux valeurs propres. Si le milieu est une couche horizontale et infinie, on obtient

$$\begin{bmatrix} V^{(+)} \\ \phi^{(+)} / \rho \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} V^{(-)} \\ \phi^{(-)} / \rho \end{bmatrix}$$

\mathbf{R} étant la matrice de transfert de la couche

$$\mathbf{R} = 0.5 \exp(\rho h) \cdot \begin{bmatrix} 1 + \exp(-2\rho h) & -\frac{1}{\kappa} (1 - \exp(-2\rho h)) \\ -\kappa (1 - \exp(-2\rho h)) & 1 + \exp(-2\rho h) \end{bmatrix}$$

où κ est la conductivité thermique de la couche et h son épaisseur.

Ainsi, on obtient pour un solide multi-couches

$$\begin{bmatrix} V^{(0)} \\ \phi^{(0)}/\rho \end{bmatrix} = \underbrace{\mathbf{R}^{(1)} \dots \mathbf{R}^{(N)}}_{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} V^{(N)} \\ \phi^{(N)}/\rho \end{bmatrix}$$

En exploitant les conditions aux limites, on aboutit à l'équation liant la température surfacique au flux surfacique

$$V^{(0)} = G(\rho) \phi^{(0)} \quad (3)$$

où la fonction de transfert thermique G est exprimée en fonction des conditions aux limites et des coefficients de la matrice \mathbf{M} .

3 Résolution du problème de contact à l'échelle microscopique

Afin de résoudre le problème de contact, la surface est discrétisée en N_p éléments carrés de même taille. La pression de contact p et le flux de chaleur ϕ agissant sur chaque élément sont supposés constants. Ainsi, le déplacement normal u_z (resp. la température θ) en chaque point du solide est exprimé par

$$u_z(x, y, z) = \sum_{k=1}^{N_p} p_k L(x - x_k, y - y_k, z) \quad \left(\text{resp. } \theta(x, y, z) = \sum_{k=1}^{N_p} \phi_k T(x - x_k, y - y_k, z) \right)$$

où p_k (resp. ϕ_k) est la pression (resp. le flux thermique) agissant sur l'élément k , (x_k, y_k) sont les coordonnées des centres des éléments de surface et L (resp. T) est le déplacement normal (resp. l'élévation de température) au point (x, y, z) due à une pression unitaire (resp. flux thermique unitaire) appliquée sur l'élément k . L et T sont ainsi les fonctions de Green relatives à chacun des problèmes traités.

Le déplacement normal (resp. la température) est donc une convolution discrète de la pression (resp. du flux thermique) et de la fonction L (resp. T)

$$u_z = L * p \quad (\text{resp. } \theta = T * \phi)$$

Les fonctions L et T sont construites à partir des fonctions de transfert respectivement présentées dans les équations 2 et 3 et ne seront pas calculées analytiquement. En effet, le calcul des potentiels (u_z et θ) est fait directement à partir des fonctions de transfert grâce aux propriétés de la transformée de Fourier et de son inverse.

Après avoir décrit les solutions des problèmes thermiques et mécaniques, nous présentons, dans ce qui suit, la stratégie adoptée pour résoudre le problème de contact mécanique puis celui de la thermique.

3.1 Résolution du problème de contact mécanique

Supposons que les surfaces des deux solides S_1 et S_2 sont respectivement décrites par deux fonctions z_1 et z_2 . On suppose que la pente des deux surfaces est très faible. Par ailleurs, on définit le profil équivalent z par $z = z_1 + z_2$. Lorsque les deux solides sont en contact, le déplacement imposé dans chaque point de la surface, supposé en contact, est donné par

$$\delta = \langle \delta_e + z - \max(z) \rangle \quad (4)$$

où $\delta_e = \delta_2 - \delta_1$ et $\langle . \rangle$ est la partie positive de son opérande.

Pour chacun des deux solides S_j ($j = 1, 2$), on note p^j la pression de contact, u^j le déplacement normal et L^j la fonction de Green. Sous l'hypothèse d'un contact parfait, on peut montrer que

$$(L^1 + L^2) * p^1 = \delta \quad (5)$$

Afin de résoudre le problème de contact mécanique, il faut trouver p^1 qui satisfait l'équation 5, sous contraintes de contact $p^1 \geq 0$. Une fois p^1 est obtenu, on peut définir la zone de contact réelle.

3.2 Résolution du problème de contact thermique

Pour chacun des deux solides S_j ($j = 1, 2$), on note ϕ^j le flux thermique, θ^j la température surfacique et T^j la fonction de Green. Connaissant l'aire de contact réelle (obtenue grâce au calcul mécanique) et sous l'hypothèse d'un contact thermique parfait, on montre que

$$(T^1 + T^2) * \phi^1 = \theta_{l2} - \theta_{l1} \quad (6)$$

La résolution du problème thermique consiste donc à trouver le flux ϕ^1 qui satisfait cette équation. Ce flux est du même signe que le gradient thermique $\theta_{l2} - \theta_{l1}$.

Afin de résoudre les systèmes linéaires dans les équations 5 et 6, on utilise des méthodes d'optimisation sous contrainte. Le lecteur peut se référer à ([1], [4], [8]) pour plus d'informations. Ensuite, nous présentons la stratégie d'enrichissement des modèles éléments finis macroscopiques.

4 Stratégie d'enrichissement à l'échelle macroscopique

Grâce aux modèles présentés ci-avant, nous avons résolu les problèmes de contact pour les deux physiques considérées. A partir de ces calculs, on peut calculer la raideur mécanique K_m définie par

$$K_m = \frac{1}{A_0} \frac{P}{\delta_e} \quad (7)$$

où A_0 est l'aire apparente de contact et P est la force totale exprimée par $P = \iint_S p^1 dS$.

De même, la conductance thermique, par unité d'aire, est donnée par

$$K_t = \frac{\Phi_1}{A_0 \cdot (\theta_{l2} - \theta_{l1})} \quad (8)$$

où Φ_1 est le flux total exprimé par $\Phi_1 = \iint_S \phi^1 dS$

La conductance d'interface K_i et la raideur d'interface K_r sont respectivement définis par

$$K_i = \frac{1}{\frac{1}{K_t} - \frac{1}{K_{th}}} \quad \text{et} \quad K_r = \frac{1}{\frac{1}{K_m} - \frac{1}{K_e}}$$

où K_{th} (resp. K_e) représente la conductance thermique (resp. la raideur élastique) en cas d'un contact parfait.

Ces deux paramètres traduisent l'évolution de l'interface sous chargements mécaniques et thermiques. Elles seront intégrées dans un calcul EF macroscopique permettant ainsi de prendre en compte l'effet de la rugosité et d'un gradient de propriétés à l'échelle macro.

Dans la partie suivante, nous présentons quelques illustrations du modèle de contact à l'échelle micro puis un exemple de calcul macro est présenté.

5 Exemple

5.1 Présentation du modèle

L'exemple que nous proposons est celui d'un contact entre deux cubes élastiques de taille identique (voir fig. 3). Le solide 1 est un bi-couche et le solide 2 est homogène. Les propriétés du solide 2 sont présentées dans le tableau 1. En ce qui concerne le solide 1, différentes valeurs des propriétés physiques des 2 couches sont considérées. Le tableau 2 résume les 3 cas d'études retenus dans cette étude.

Dans cette partie, nous présentons les résultats obtenus grâce à deux modèles, celui proposé dans cette étude et un modèle éléments finis (FEM). Pour ce qui est du présent modèle, la surface est discrétisée avec une grille de 150×150 carrés. Pour le modèle EF (voir fig. 3), le solide est maillé finement avec 3.10^5 éléments hexaédriques.

Les conditions aux limites considérées pour cette étude sont : $\delta_1 = 0$, $\theta_{l1} = 0$ et $\theta_{l2} = 1^\circ\text{C}$. Le déplacement δ_2 est augmenté progressivement de 0 à $10 \mu\text{m}$.

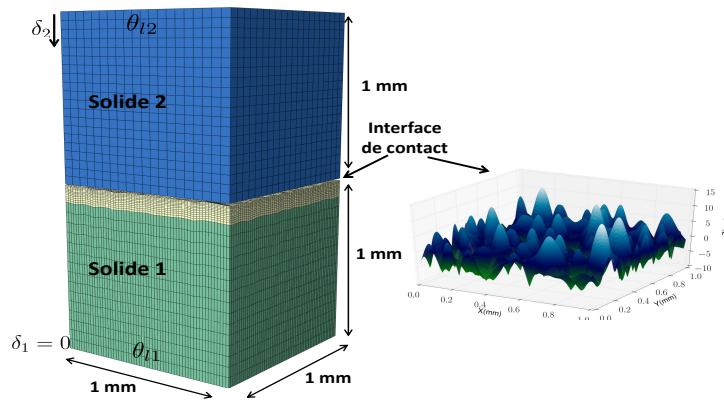


FIGURE 3 – Schéma du modèle éléments finis

TABLE 1 – Données matériaux pour le solide 2

E (GPa)	ν	κ ($W.K^{-1}.m^{-1}$)
220	0.3	50

TABLE 2 – Données matériaux pour le solide 1 : 3 cas sont considérés

	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	κ_1 ($W.K^{-1}.m^{-1}$)	κ_2 ($W.K^{-1}.m^{-1}$)	h (μm)
Cas 1	4	4	10	10	-
Cas 2	2	4	5	10	200
Cas 3	1	4	2.5	10	200

5.2 Résultats

Nous présentons dans les figures 4-7 des illustrations des résultats obtenus grâce au modèle de contact proposé dans ce travail, pour le cas 1 (voir tableau 2). La figure 4 présente la distribution du champ de pression de contact correspondant à un déplacement $\delta_2 = 10\mu m$. Le déplacement vertical en surface est illustré dans la figure 4. Quant au calcul thermique, la figure 6 présente la distribution de température superficielle dans le solide 2 et la figure 7 présente la température selon le plan de section $Axe 1$ sur une profondeur de $300\mu m$ de part et d'autre de l'interface.

Les figures illustrent bien l'effet de la rugosité sur l'aire de contact et la distribution des différents champs étudiés.

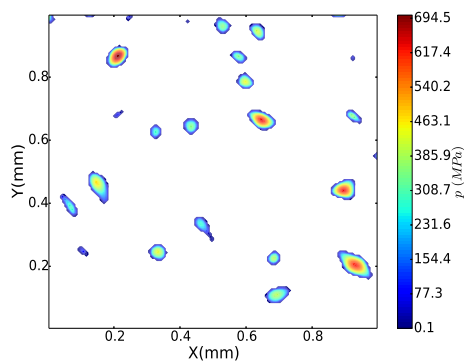


FIGURE 4 – Pression de contact dans le solide 1

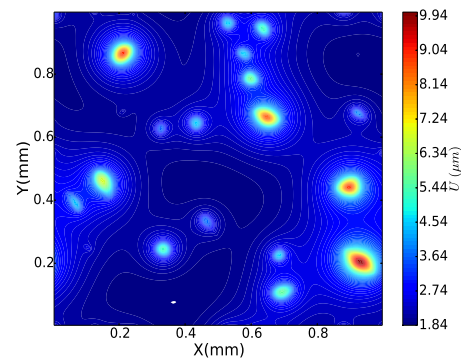


FIGURE 5 – Déplacement vertical dans le solide 1

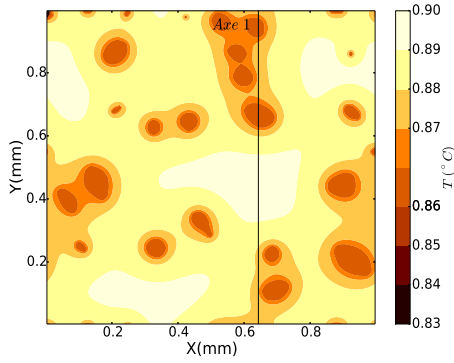


FIGURE 6 – Température surfacique du solide 2

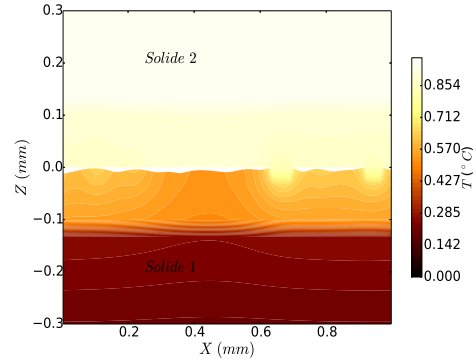


FIGURE 7 – Température en profondeur (Axe 1)

Pour le jeu de paramètres considéré dans cette étude, l'évolution de la pression de contact moyenne avec le déplacement normal est montrée à la figure 8. Pour les 3 cas considérés, les courbes obtenues sont comparées aux calculs EF (notés FEM dans la figure). Nous obtenons une bonne concordance entre les prédictions des deux modèles. Nous observons aussi l'effet de la diminution du module E_1 de la première couche sur la réponse mécanique. Par ailleurs, l'évolution du flux thermique moyen avec le déplacement normal est illustrée à la figure 9. L'augmentation du flux passant par l'interface est due à l'augmentation de l'aire de contact. Les prédictions du modèle sont en bon accord avec le calcul EF. La diminution de la conductivité de la première couche κ_1 conduit à une diminution du flux thermique.

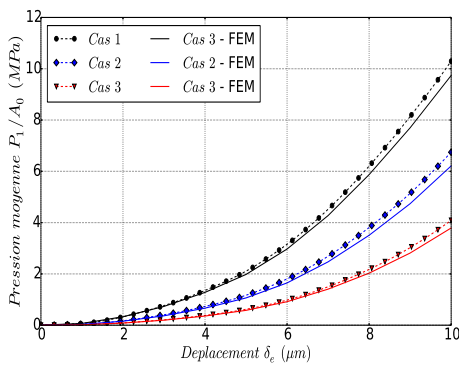


FIGURE 8 – Évolution de la pression moyenne

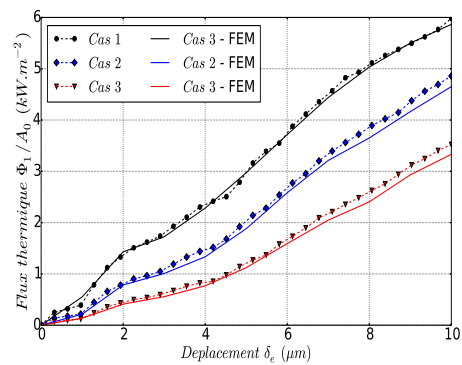


FIGURE 9 – Évolution du flux thermique moyen

A partir de ces calculs, la conductance d'interface et la raideur d'interface ont été calculées et intégrées dans un second modèle EF pour chacun des cas considérés. La figure 10 montre le maillage du modèle EF enrichi avec ces paramètres. Dans ce modèle, la surface est plane et la présence d'une couche près de l'interface n'est pas considérée de façon directe. En effet, l'effet de la première couche du solide est intégré aussi dans le calcul de la conductance thermique et de la raideur mécanique.

Les figures 11-12 montrent respectivement l'évolution de la pression moyenne et du flux thermique moyen. Comme on peut le voir sur les deux figures, les résultats obtenus grâce aux modèles EF enrichis (FEM-E), sont en bon accord avec les prédictions du présent modèle.

Concernant les temps de calculs, le modèle que nous avons proposé permet de réduire les temps de calculs de façon considérable. En effet, les calculs EF finement maillés ont duré approximativement 36h contre 4h avec le modèle que nous proposons.

Conclusion

Dans ce travail, nous avons présenté une stratégie de modélisation du contact considérant la présence de rugosité et d'un gradient de propriétés normal à la surface de contact. La transformée de Fourier et la technique des matrices de transfert ont été utilisés pour résoudre le problème de chargement thermique et mécanique d'un solide multi-couches. Ensuite, le problème de contact a été résolu grâce à une convolution discrète et à une optimisation sous contraintes.

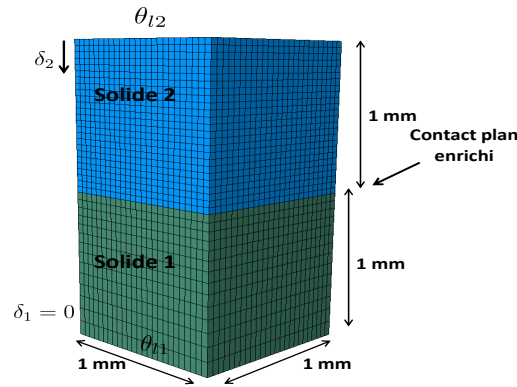


FIGURE 10 – Schéma du modèle éléments finis

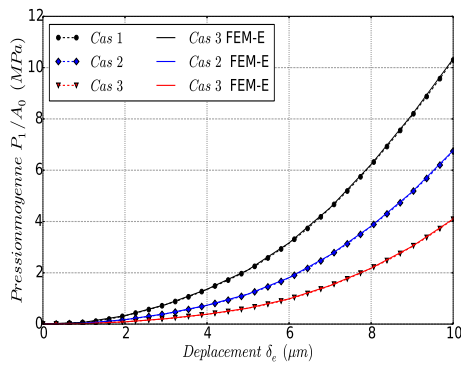


FIGURE 11 – Évolution de la pression moyenne

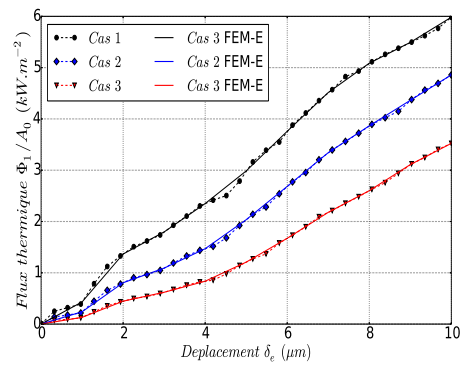


FIGURE 12 – Évolution du flux thermique moyen

Les résultats obtenus ont été présentés et comparés à des calculs par éléments finis. Un bon accord a été obtenu entre les deux approches. Grâce à ce modèle, la conductance thermique et la raideur normale ont été intégrés dans un modèle éléments finis macroscopique. Là encore, les résultats obtenus à l'échelle macro correspondent bien aux prédictions des calculs à l'échelle microscopique. En ce qui concerne les temps de calculs, Le gain de temps apporté est très considérable.

Références

- [1] Cai, Shaobiao and Bhushan, Bharat *A numerical three-dimensional contact model for rough, multilayered elastic/plastic solid surfaces*. Wear, Elsevier, 2005, 259, 1408-1423.
- [2] Cooper, M. G., Mikic, B. B., & Yovanovich, M. M. *Thermal contact conductance*. International Journal of heat and mass transfer, 1969, 12(3), 279-300.
- [3] Ernian, Pan *Static response of a transversely isotropic and layered half-space to general surface loads*. Physics of the Earth and Planetary Interiors, 1989, 54, 353-363.
- [4] Gallego, L. and Nelias, D. and Deyber, S. *A fast and efficient contact algorithm for fretting problems applied to fretting modes I, II and III*. Wear, 2010, 268, 208-222.
- [5] Greenwood, J. & Williamson, J. *Contact of nominally flat surfaces*. Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences, The Royal Society, 1966, 295, 300-319
- [6] Sadowski, P., & Stupkiewicz, S. *A model of thermal contact conductance at high real contact area fractions*. Wear, 2010, 268(1), 77-85.
- [7] Waddad, Y.; Magnier, V.; Dufrénoy, P. & De Saxcé, G. *A multiscale method for frictionless contact mechanics of rough surfaces*. Tribol. int., 2016, 96, 109-121.
- [8] Waddad, Y.; Magnier, V.; Dufrénoy, P. & De Saxcé, G. *Heat conduction in multi-layered solids with rough surfaces*. In preparation.