CSMA 2017
13ème Colloque National en Calcul des Structures
15-19 Mai 2017, Presqu'île de Giens (Var)

Une nouvelle approche de l'endommagement gradué

C. Stolz [1],[2]

[1] *GeM, Ecole Centrale Nantes, {claude.stolz}@ec-nantes.fr*
[2] *IMSIA, UMR9219,EdF-Cea-Ensta Paristech-CNRS*

Résumé — Pour éviter la localisation dans le cas des milieux endommagés l'introduction de termes quadratiques en gradient d'endommagement a été utilisé pour contrôler l'amplitude de l'endommagement. Plus récemment la régularisation de l'endommagement a été obtenue à l'aide d'une fonction distance signée, le gradient est alors borné dans une zone d'étendue finie. On propose une modélisation de l'endommagement tenant compte d'une contrainte interne sur son gradient. Cette description s'affranchit alors de l'introduction d'une distance signée.
Mots clés — Endommagement, analyse convexe, régularisation.

1 Introduction

La dégradation des matériaux est décrite la plupart du temps par une perte de rigidité comme une fonction d'un paramètre d'endommagement. Cette dégradation s'accompagne souvent d'un radoucissement accompagné d'une localisation de la déformation. Plusieurs méthodes de régularisation pour s'affranchir de cette localisation ont été proposées, des approches non-locales [17] et des approches par gradients [6, 7, 9, 15, 16], dans le même esprit les modèles champs de phases apportent des classes de solutions. Ces approches s'inspirent de l'article [1] pour régulariser la fonctionnelle de segmentation de Mumford-Shah [18] par un opérateur elliptique. Fondé sur cette approche l'article [2] propose une stratégie où l'énergie de fissuration est distribuée partout dans le volume.

Plus récemment une nouvelle approche fondée sur le mouvement d'une interface épaisse mobile, zone de transition entre matériau sain et endommagé d'épaisseur finie, a été développée dans de nombreux articles [11, 12, 14, 19] présentant des solutions analytiques et des méthodes numériques de résolution. Le modèle établit un lien entre mécanique de l'endommagement et mécanique de la rupture, l'ouverture d'une fissure est associée à la zone totalement endommagée. L'idée principale de cette approche nommée TLS (Thick level-set) pour les matériaux quasifragiles est de borner le gradient spatial de l'endommagement scalaire d, qui varie de 0 à 1, la fissure est localisée par la level-set $d = 1$. L'épaisseur l_c de la zone de transition est finie. L'iso-valeur $\phi = 0$ sépare le domaine Ω en matériau sain et endommagé, cette surface de séparation est notée Γ_o. L'endommagement d est une fonction croissante de la distance ϕ à la level-set Γ_o.

L'ensemble de la structure est décomposé en trois zones : la partie saine Ω_o, la zone de transition Ω_c, la partie totalement endommagée Ω_1. La frontière de $\partial\Omega_c$ est décomposée selon les surfaces Γ_o et Γ_1 : $\partial\Omega_c = \Gamma_o \cup \Gamma_1$: si $M_o^t \in \Gamma_o$, $d(M_o^t) = 0$ et $\phi(M_o^t, t) = 0$; si $M_1^t \in \Gamma_1$, $d(M_1^t) = 1$ et $\phi(M_1^t, t) = l_c$. Dans la zone de transition Ω_c, l'endommagement d est une fonction explicite de la distance ϕ :

$$\begin{cases} d(\phi) = 0, & \phi(M,t) \leq 0, \quad M \in \Omega_o, \\ d'(\phi) > 0, & 0 \leq \phi(M,t) \leq l_c, \quad M \in \Omega_c, \\ d(\phi) = 1, & \phi(M,t) \geq l_c, \quad M \in \Omega_1, \end{cases} \tag{1}$$

où $d'(\phi)$ est la dérivée de d par rapport à son argument ϕ. La fonction $d(M,t)$ est supposée continue strictement croissante. Compte tenu de cette définition la fonction inverse $\phi(d)$ existe.

Dans la forme originelle du modèle TLS [12], l'évolution du dommage est décrit à l'aide du mouvement de la level-set Γ_o. Dans un modèle plus général [11] il y a interaction entre un endommagement local et non-local, le modèle non-local est utilisé dès que la norme du gradient atteint une valeur critique :

$$\|\nabla d\| \leq f(d). \tag{2}$$

Cette liaison interne dépend du choix et des propriétés de la fonction seuil f. Cette condition est de fait liée à la fonction distance ϕ, en effet

$$\|\nabla\phi\| \leq 1, \quad d = d(\phi), \tag{3}$$

alors $f(d) = d'(\phi(d))$. Quand la liaison interne est satisfaite, la level-set ϕ devient une fonction distance et son évolution vérifie

$$\|\nabla\phi\| = 1, \quad \nabla\dot{\phi}.\nabla\phi = 0. \tag{4}$$

On propose d'analyser les propriétés de f et de formuler le problème de l'évolution sans tenir compte de la définition des level-set. Cette nouvelle formulation proposée par [20] combine les approches classiques de l'endommagement et la liaison interne (eq.2). Quelques exemples d'application sont proposés pour montrer l'aptitude de la méthode à la résolution de problème d'endommagement.

2 Étude du problème

On considère un corps Ω, sous l'action du chargement de corps se déforme. L'état local de la matière est décrit à l'aide de la déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$, de la quantité d'endommagement d et de son gradient ∇d. La déformation dérive du déplacement $\vec{u}$ ($2\underline{\underline{\varepsilon}}(\vec{u}) = \nabla\vec{u}^t + \nabla\vec{u}$). Le gradient ∇d de l'endommagement d est une variable d'état à cause de la liaison interne unilatérale : $\|\nabla d\| \leq f(d)$.

L'énergie libre. Le comportement local est introduit à l'aide de l'énergie libre Ψ, fonction de la déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et de l'endommagement d ; à cette étape tout modèle d'endommagement classique peut être utilisé. Les équations d'état définissent les forces associées à chacun des paramètres

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial\Psi}{\partial\underline{\underline{\varepsilon}}}, \quad Y = -\frac{\partial\Psi}{\partial d}. \tag{5}$$

Les contraintes locales $\underline{\underline{\sigma}}$ vérifient les équations d'équilibre en l'absence de viscosité et la force Y est le taux de restitution d'énergie associé à la variation d'endommagement.

Le pseudo-potentiel de dissipation. L'évolution de l'endommagement est décrit par une loi de normalité, on suppose l'existence d'un pseudo potentiel de dissipation, i.e., fonction convexe $\mathscr{D}(\dot{d}^*)$, [13], telle que $\mathscr{D}(\dot{d}^*) \geq 0$ et $\mathscr{D}(0) = 0$. Ce potentiel définit la valeur de la force thermodynamique Y

$$Y \in \partial\mathscr{D}(\dot{d}), \tag{6}$$

où $\partial\mathscr{D}(\dot{d})$ est le sous-différentiel de $\mathscr{D}$ au point $\dot{d}$, défini par l'inégalité

$$\forall \dot{d}^*, \mathscr{D}(\dot{d}) + Y.(\dot{d} - \dot{d}^*) \leq \mathscr{D}(\dot{d}^*). \tag{7}$$

Si $\mathscr{D}$ est différentiable alors $Y = \dfrac{\partial\mathscr{D}}{\partial\dot{d}}(\dot{d})$. Comme $\mathscr{D}$ est convexe une formulation duale peut être donnée

$$\dot{d} \in \partial\mathscr{D}^*(Y), \text{ avec } \mathscr{D}^*(Y) = \sup_{d^*}\{Yd^* - \mathscr{D}(d^*)\}. \tag{8}$$

Dans le cas où l'évolution est indépendante du temps, introduisons l'ensemble convexe $\mathscr{C}_Y = \{Y : Y - Y_c \leq 0\}$, la loi de normalité (7) s'écrit

$$\dot{d} \in \partial I_{\mathscr{C}_Y}(Y), \tag{9}$$

où $I_{\mathscr{C}_Y}$ est la fonction indicatrice de l'ensemble convexe $\mathscr{C}_Y$

$$I_{\mathscr{C}_Y}(Y) = \begin{cases} 0, & \text{si } Y \in \mathscr{C}_Y, \\ +\infty, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{10}$$

2.1 Les liaisons internes

L'endommagement est soumis à deux contraintes :

– par définition d vérifie $0 \leq d \leq 1$, soit

$$g_1(d) = d(d-1) \leq 0, \tag{11}$$

– le gradient de l'endommagement est borné :

$$g_2(d, \nabla d) = \|\nabla d\| - f(d) \leq 0. \tag{12}$$

Pour prendre en compte ces contraintes, on peut utiliser des multiplicateurs de Lagrange ou utiliser les fonctions indicatrices et l'analyse convexe. Considérons une fonction convexe $g(d, \nabla d)$ et la loi de normalité

$$\lambda \geq 0, \quad g(d, \nabla d) \leq 0, \quad \lambda g(d, \nabla d) = 0. \tag{13}$$

Cette loi définit une liaison unilatérale. Quand $g < 0$, alors $\lambda = 0$. En un point de la frontière de l'ensemble convexe $\mathscr{C}_g = \{(d, \nabla d) | g(d, \nabla d) \leq 0\}$ on a $g(d, \nabla d) = 0$, et la réaction $\mathbf{R}$ est définie par :

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R \\ \vec{H} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial d} \\ \dfrac{\partial g}{\partial \nabla d} \end{pmatrix}. \tag{14}$$

La réaction est normale au convexe et donc $\mathbf{R} \in \partial I_{\mathscr{C}_g}$, où $I_{\mathscr{C}_g}$ est la fonction indicatrice de l'ensemble convexe $\mathscr{C}_g$. On utilise cette propriété pour les deux contraintes.

– Pour la fonction $g_1(d)$. Soit $\lambda_1 \geq 0$ le multiplicateur associé à $0 \leq d \leq 1$; alors la réaction est $R_1 = -\lambda_1 \leq 0$ pour $d = 0$ et devient $R_1 = \lambda_1 \geq 0$ pour $d = 1$. Donc $R_1 \in \partial I_{\mathscr{C}_1}$ avec

$$\mathscr{C}_1 = \{d | g_1(d) \leq 0\}. \tag{15}$$

– Pour la deuxième contrainte, nous devons d'abord examiner les propriétés de la fonction f pour que l'ensemble $\mathscr{C}_2$ soit un ensemble convexe de l'espace $(d, \nabla d)$:

$$\mathscr{C}_2 = \{(d, \nabla d) | g_2(d, \nabla d) = \|\nabla d\| - f(d) \leq 0\}. \tag{16}$$

Dans [20] on établit la propriété :

Théorème 1. *Si la fonction f est concave et si il existe une valeur d_0 telle que $f(d_0) \geq 0$, alors l'ensemble $\mathscr{C}_2$ est non vide et convexe.*

On notera que les fonctions f introduites dans [11] sont concaves. Cette propriété est importante pour la théorie et les applications.

Remarque 2. *Pour chaque contrainte interne la condition $\lambda_i g_i = 0$ montre que la réaction $\mathbf{R}_i$ ne travaille pas. En d'autres termes on peut introduire une énergie potentielle associée $\Psi_l = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i g_i$ sous la contrainte $\lambda_i \geq 0$.*

3 Un état d'équilibre

La frontière $\partial\Omega$ est décomposée en deux parties complémentaires : $\partial\Omega_u$ où le déplacement est imposé ($\vec{u}(M,t) = \vec{u}^d(t)$, $M \in \partial\Omega_u$) et $\partial\Omega_T$ où les efforts T^d sont donnés. Les inconnues du problème d'équilibre sont le déplacement $\vec{u}$, l'endommagement d et les réactions $\mathbf{R}$.

On introduit l'énergie potentielle du système :

$$\mathscr{E}(\vec{u}, d, \lambda_1, \lambda_2) = \int_\Omega \Psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, d)\, \mathrm{d}\Omega - \int_{\partial\Omega_T} T^d . \vec{u}\, \mathrm{d}S + \int_\Omega \sum_i \lambda_i g_i\, \mathrm{d}\Omega. \tag{17}$$

Le déplacement $\vec{u}$ est cinématiquement admissible avec les conditions aux limites ($\vec{u} = \vec{u}^d$, over $\partial\Omega_u$) et les multiplicateurs de Lagrange λ_i sont des champs scalaires positifs.

Variations vis-à-vis du déplacement. Pour une distribution d'endommagement donné d, un état d'équilibre réalise le minimum de l'énergie potentielle sur l'ensemble des champs de déplacement admissible $\mathscr{K}$: $\mathscr{K} = \{\vec{u} \mid \vec{u} = \vec{u}^d$, over $\partial\Omega_u\}$, et

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \vec{u}}.\delta\vec{u} = 0, \quad \forall \delta\vec{u} \in \{\vec{v}|\vec{v}(x) = 0, x \in \partial\Omega_u\}. \tag{18}$$

Les variations imposent les relations d'équilibre et les conditions aux limites :

$$0 = \mathrm{div}\,\underline{\underline{\sigma}}, \text{ dans } \Omega, \quad \vec{n}.\underline{\underline{\sigma}} = T^d, \text{ sur } \partial\Omega_T. \tag{19}$$

Variations vis-à-vis des λ_i. Les variations de l'énergie potentielle donnent les conditions

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \lambda_1}.\delta\lambda_1 = \int_\Omega d(d-1)\delta\lambda_1 \,\mathrm{d}\Omega = 0. \tag{20}$$

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \lambda_2}.\delta\lambda_2 = \int_\Omega (f(d) - \|\nabla d\|)\delta\lambda_2 \,\mathrm{d}\Omega = 0. \tag{21}$$

Une distribution donnée d'endommagement doit être compatible avec les contraintes ($g_i \leq 0$; $i = 1,2$) partout. Le domaine Ω est décomposé en trois sous-domaines $\Omega = \Omega_o \cup \Omega_c \cup \Omega_1$.

- Sur Ω_o et Ω_1, $\delta\lambda_i$ quelconque, les variations (eq.20, eq.21) impliquent $g_1 = 0$ et $g_2 = 0$.
- Sur Ω_c, $\lambda_1 = 0$, la relation (eq.20) est donc satisfaite. Ω_c se décompose en Ω_c^- où $g_2 < 0$ et Ω_c^o où $g_2 = 0$.
  - Sur Ω_c^-, $g_2 < 0$ et ainsi $\lambda_2 = 0$.
  - Sur Ω_c^o, $\delta\lambda_2$ est quelconque et $g_2 = 0$.

Variations relative à l'endommagement. Considérons les variations par rapport à d :

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial d}.\delta d = \int_\Omega \frac{\partial \Psi}{\partial d}.\delta d \,\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \lambda_1(2d-1)\delta d \,\mathrm{d}\Omega - \int_\Omega \lambda_2(f'\delta d - \nabla d.\frac{\nabla\delta d}{\|\nabla d\|}) \,\mathrm{d}\Omega \tag{22}$$

$$= -\int_\Omega G.\delta d \,\mathrm{d}\Omega + \int_S \left[\lambda_2 \frac{\nabla d}{\|\nabla d\|}\right]_S .\vec{n}\,\delta d \,\mathrm{d}S + \int_{\partial\Omega} \lambda_2 \frac{\nabla d}{\|\nabla d\|}.\vec{n}\,\delta d \,\mathrm{d}S. \tag{23}$$

Ces variations présentent des termes de volume et de surface. Le terme de volume définit le taux de restitution d'énergie G :

$$G = -\frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial d} + \lambda_2 f' + \mathrm{div}(\lambda_2 \frac{\nabla d}{\|\nabla d\|}) - \lambda_1(2d-1). \tag{24}$$

Cette relation est une équation aux dérivée partielles sur $\lambda_2 \neq 0$ dans le domaine Ω_c^o, et une relation algébrique ailleurs. L'expression de G se simplifie, en effet $\lambda_2 \neq 0$ implique que $\|\nabla d\| = f$ donc

$$\mathrm{div}(\lambda_2 \frac{\nabla d}{f}) = \mathrm{div}(\lambda_2 \nabla d)/f + \lambda_2 \nabla d.\nabla(1/f)$$

le dernier terme est $-f'\lambda_2$. Comme $\lambda_2 \neq 0$ si et seulement si $d \neq 0$ alors $\lambda_1 = 0$. Ainsi on obtient :

$$G = Y + \mathrm{div}(\lambda_2 \nabla d)/f \tag{25}$$

Les termes de surface présentent des discontinuités potentielles du gradient ∇d le long de surface S où d est continu, on obtient la relation aux discontinuités :

$$\left[\lambda_2 \frac{\nabla d}{\|\nabla d\|}\right]_S .\vec{n} = 0. \tag{26}$$

Une telle situation existe le long des surfaces de discontinuité de ∇d, ces surfaces forment le squelette de la zone endommagée. L'endommagement d est continu sur ces surfaces, son gradient normal y change de signe, f est continu et la relation aux discontinuités impose

$$(\lambda_2^+ + \lambda_2^-)\nabla d.\vec{n} = 0$$

la somme de valeur positive est nulle donc le long du squelette $\lambda_2 = 0$. Il en est de même le long de la frontière extérieure du domaine en l'absence de force extérieure :

$$\lambda_2 \nabla d.\vec{n} = 0, \text{ sur } \partial\Omega. \tag{27}$$

Sur la frontière extérieure, la dérivée normale de l'endommagement n'est pas nécessairement nulle. C'est en particulier le cas où $\partial\Omega \cap \partial\Omega_c^o \neq \emptyset$, pour lequel $\lambda_2 = 0$ et $\|\nabla d\| = f(d) \neq 0$. Ceci marque une différence par rapport à l'intégration classique du gradient dans la loi de comportement. Enfin, le pseudo potentiel de dissipation définit l'état

$$G \in \partial\mathscr{D}(\dot{d}), \tag{28}$$

et dans le cas d'un état d'équilibre $\dot{d} = 0$ soit

$$G \in \partial\mathscr{D}(0). \tag{29}$$

4 L'évolution du dommage d

L'évolution de l'endommagement vérifie

– une équation cinétique *si $\mathscr{D}$ est régulier* :

$$-G + \frac{\partial\mathscr{D}}{\partial\dot{d}}(\dot{d}) = 0. \tag{30}$$

– la loi de normalité *si $\mathscr{D}$ n'est pas régulier* :

$$-G + \partial\mathscr{D}(\dot{d}) \ni 0. \tag{31}$$

Soit dans le cas du pseudo-potentiel de dissipation simple, on obtient la règle d'écoulement

$$G - Y_c \leq 0, \quad \dot{d} \geq 0, \quad (G - Y_c)\dot{d} = 0. \tag{32}$$

Dans ce cas, l'évolution de d est possible si $G = Y_c$. Soit

$$(Y - Y_c)f + \mathrm{div}(\lambda_2 \nabla d) = 0. \tag{33}$$

Dans le repère des iso-d, l'évolution de la surface iso-dommage $d(M,t) = d_o$, vérifie $\dot{d} = a\nabla d.\vec{n} = af$ et lorsque l'endommagement évolue $g_2 = 0$ et nous avons

$$\frac{1}{f}\nabla d.\nabla(af) - f'af = \nabla d \nabla a = 0 \tag{34}$$

Commentaires dans le cas non-régulier. Si on utilise le formalisme de M. Frémond [4] et l'énergie potentielle avec contraintes $\hat{\Psi}(\underline{\underline{\varepsilon}}, d, \nabla d)$ définie par

$$\hat{\Psi}(\underline{\underline{\varepsilon}}, d, \nabla d) = \Psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, d) + I_{\mathscr{C}_1}(d) + I_{\mathscr{C}_2}(d, \nabla d). \tag{35}$$

On retrouve immédiatement les relations du comportement contraint :

$$(\underline{\underline{\sigma}}, B, \vec{H}) \in \frac{\partial\Psi}{\partial\underline{\underline{\varepsilon}}} + \partial I_{\mathscr{C}_1}(d) + \partial I_{\mathscr{C}_2}(d, \nabla d) + \partial\mathscr{D}(\dot{d}). \tag{36}$$

on a alors l'équivalence

$$-B + \mathrm{div}\vec{H} = 0 \Longleftrightarrow G \in \partial\mathscr{D}(\dot{d}).$$

Remarque 3. *On notera que la dissipation est conservée dans tous les cas :*

$$D_m = \int_\Omega G\dot{d}\,\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega Y\dot{d}\,\mathrm{d}\Omega. \tag{37}$$

5 Un exemple simple

On étudie le cas d'une barre en tension. Le domaine est défini par $\Omega =]0,L[$. Le déplacement $\vec{u}(x,t) = u(x,t)\vec{e}_x$ vérifie les conditions aux limites $u(0,t) = 0, u(L,t) = u^d(t))$, $u^d(t)$ est une fonction croissante du temps. L'état initial de la barre est naturel : sans contrainte et le déplacement est uniforme ($\vec{u}(x,0) = 0$) ainsi que l'endommagement $d(x,0) = 0$. Dans ce cas l'énergie libre se réduit à

$$\Psi(\varepsilon,d) = (1-d)\,\frac{\mathrm{E}}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\mathrm{H}\,d^2.$$

La déformation est donnée par $\varepsilon = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$. On prend comme fonction f la fonction constante

$$f(d) = \frac{1}{l_c}.$$

Pendant l'extension, les équations du mouvement impliquent l'uniformité du champ de contrainte $\sigma(X,t) = \Sigma(t)$ et le système évolue selon plusieurs phases :

Phase I : la réponse est élastique linéaire. Pendant cette phase $d = 0$, et $g_1 = g_2 = 0$. Le taux de restitution d'énergie $G(x,t)$ vérifie

$$G = \frac{1}{2}\mathrm{E}\,\varepsilon^2 + \lambda_1 \leq Y_c. \tag{38}$$

Comme $\varepsilon = \dfrac{u^d}{L}$, cette phase dure tant que $\dfrac{1}{2}\mathrm{E}\,\varepsilon^2 \leq \dfrac{1}{2}\mathrm{E}\,\varepsilon_c^2 = Y_c$. A la fin de cette phase l'état de contrainte est : $\Sigma_c = \mathrm{E}\varepsilon_c$.

Phase II : phase d'endommagement uniforme. A partir de la valeur Σ_c, l'endommagement évolue de façon uniforme. Comme $0 < d(X,t) < 1$, $g_2 < 0$ alors $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Le respect de la loi de normalité impose que $\dot{d} \geq 0$ sous la condition $G = \dfrac{1}{2}\dfrac{\Sigma^2}{(1-d)^2} - \mathrm{H}d = Y_c$; donc

$$\begin{aligned}
\Sigma &= \sigma(x,t) = (1-d)\mathrm{E}\,\varepsilon, \\
\dot{\Sigma} &= (1-d)\mathrm{E}\,\dot{\varepsilon} - \dot{d}\,\mathrm{E}\,\varepsilon, \\
0 &= \mathrm{E}\,\varepsilon\,\dot{\varepsilon} - \mathrm{H}\,\dot{d}.
\end{aligned}$$

La solution est unique si $\dot{\Sigma} = M\dot{\varepsilon}, M > 0$, soit

$$M = \left(1 - d - \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{H}}\varepsilon^2\right)\mathrm{E} > 0.$$

Ce qui est vrai pour $\dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{H}}\varepsilon_c^2 < 1$ soit encore $\mathrm{H} > 2Y_c$. Posons $\mathrm{H} = \alpha Y_c$, avec $\alpha \geq 0$.

- Pour $\alpha > 2$. Une solution uniforme est obtenue tant que $\varepsilon \leq \varepsilon_m$. Durant cette phase, l'état est uniforme : $\varepsilon(x,t) = \varepsilon(t)$, $d(x,t) = d(t)$, $\sigma(x,t) = \Sigma$. jusqu'à l'état final

$$d_m = 1 - \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{H}}\varepsilon_m^2 = \frac{\alpha-2}{3\alpha}, \tag{39}$$

$$\frac{3}{2}\mathrm{E}\varepsilon_m^2 = \frac{1}{2}\mathrm{E}\varepsilon_c^2 + \mathrm{H} = Y_c(1+\alpha), \tag{40}$$

$$\frac{\Sigma_m^2}{2\mathrm{E}(1-d_m)^2} = Y_c + \mathrm{H}d_m = Y_c(1+\alpha d_m). \tag{41}$$

- Pour $\alpha \leq 2$, la solution est $d_m = 0$, $\varepsilon_m = \varepsilon_c$, la phase II est impossible.

Ainsi quelque soit α, pour un chargement croissant u^d, l'état de contrainte Σ décroit à partir du point (d_m, ε_m), pour la solution homogène. Cette solution n'est pas unique et instable, des zones de décharge apparaissent avec des discontinuités fortes L'endommagement est continu et donc les discontinuités du gradient satisfont $\left[\dot{d}\right]_S + V\left[\nabla d\right]_S \vec{e}_x = 0$ où V est la vitesse de propagation de la discontinuité.

Phase III : Endommagement gradué. A partir de l'état (d_m, ε_m) une solution est obtenue avec une zone telle que $g_2 = 0$. On suppose que cette zone apparaît en $x = 0$. A partir de cet état, la zone $g_2 = 0$ évolue et devient le segment $]0, l[$, $l \leq l_c$ et

$$d = \frac{l - x}{l_c} + d_m \leq 1, \quad \dot{d} = \frac{\dot{l}}{l_c}. \tag{42}$$

L'évolution du système est donnée par

$$G = \frac{\Sigma_l^2}{\mathrm{E}(1-d)^2} - \frac{1}{l_c}\frac{\mathrm{d}\lambda_2}{\mathrm{d}x} - \mathrm{H}d = Y_c. \tag{43}$$

Au point où le gradient ∇d est discontinu nous avons

$$\Big[\lambda_2 \frac{\nabla d}{\|\nabla d\|}\Big]_S = 0,$$

donc en $x = l$, $\lambda_2 = 0$. Le même raisonnement tient en $x = 0$.

L'intégration de G entre 0 et l, détermine la valeur Σ_l du chargement Σ. et λ_2 est alors déterminé sur $]0, l[$ par intégration de eq.43. Dans cette expression les dérivées par rapport à x sont remplacées par celles par rapport à d

$$G = \frac{\Sigma_l^2}{\mathrm{E}(1-d)^2} + \frac{1}{l_c^2}\frac{\mathrm{d}\lambda_2}{\mathrm{d}d} - \mathrm{H}d = Y_c. \tag{44}$$

Par intégration de d_m à $d_o = d_m + \dfrac{l}{l_c}$ et prenant en compte les conditions aux limites on obtient Σ_l

$$\frac{\Sigma_l^2}{2\mathrm{E}}\Big(\frac{1}{1-d_o} - \frac{1}{1-d_m}\Big) = Y_c\Big(d_o - d_m + \frac{\alpha}{2}(d_o^2 - d_m^2)\Big). \tag{45}$$

On vérifie alors

$$\frac{1}{2\mathrm{E}}(\Sigma_l^2 - \Sigma_m^2) = -\alpha Y_c\Big(\frac{l}{l_c}\Big)^2(1-d_m) \leq 0. \tag{46}$$

donc dans le domaine $]l, L[$, $Y < Y_c + \mathrm{H}d_m$, l'endommagement reste uniforme de valeur d_m. Σ_l étant connu, on obtient λ_2

$$\frac{1}{l_c^2}\frac{\lambda_2(d)}{d - d_m} = -\frac{d - d_o}{2(1-d)}\Big(2\frac{l}{l_c} - \frac{x}{l_c}\Big) > 0. \tag{47}$$

λ_2 est positif sur $]0, l[$. Les valeurs de G aux états d_m et d_o sont

$$\frac{\Sigma_l^2}{2\mathrm{E}(1-d_m)^2} \quad + \quad \frac{1}{l_c^2}\frac{\mathrm{d}\lambda_2}{\mathrm{d}d}(d_m) = Y_c(1 + \alpha d_m), \tag{48}$$

$$\frac{\Sigma_l^2}{2\mathrm{E}(1-d_o)^2} \quad + \quad \frac{1}{l_c^2}\frac{\mathrm{d}\lambda_2}{\mathrm{d}d}(d_o) = Y_c(1 + \alpha d_o). \tag{49}$$

ainsi $\lambda_2(d)$ décroit au point d_o et est croissant au d_m, soit $\lambda_2(x)$ croissant en $x = 0$ et décroissant en $x = l$.

Le taux de restitution local Y est lié à G par

$$G = Y + \frac{1}{l_c^2}\frac{\mathrm{d}\lambda_2}{\mathrm{d}d}(d) - \mathrm{H}d = Y_c. \tag{50}$$

La moyenne de G entre d_m et d_o est alors équivalente à la définition de la quantité $\bar{Y}$ moyenne du taux local de restitution d'énergie Y proposé en [11].

On présentera des réponses sur des structures plus générales montrant l'influence en particulier de la courbure de la zone de transition Ω_c.

6 Conclusion

L'introduction d'une contrainte ou liaison interne portant sur le gradient de l'endommagement a permis de retrouver les principaux caractère du modèle Thick-Level-Set. L'analyse proposée a permis de dégager des conditions sur les propriétés de la liaison interne et a mis en évidence des propriétés sur les conditions aux limites du gradient normal à une surface et une surface de discontinuité. Cette condition s'avère très différente des méthodes classiques de régularisation des lois d'endommagement. Dans [20] on propose des méthodes de régularisation du problème avec contrainte pour approcher les valeurs des multiplicateurs de Lagrange ou de façon équivalente les fonctions indicatrices de convexe associés aux contraintes unilatérales.

Ce travail a bénéficié du soutien de l'ERC Advanced Grant XLS no 291102.

Références

[1] L. Ambrosio, V.M. Tortorelli, *Approximation of functional depending on jumps by elliptic functional via* Γ*-convergence*, Comm. on Pure and App. Math ; **43** :999-1036,1990.

[2] B. Bourdin, G.A. Francfort, J.J. Marigo, *The variational approach to fracture*, J. of Elasticity ; **91** :5-148, 2008.

[3] G. Del Piero, G. Lancioni, R. March, *A variational model for fracture mechanics : numerical experiments*, J. Mech. and Phys. of Solids ; **55** :2513-2537,2007.

[4] M. Frémond, *Non-smooth thermomechanics*, Springer-Verlag Berlin,2002.

[5] M. Frémond, N. Kenmochi, *Damage of a viscous locking material*, Advances in Mathematical Sciences and Applications ; **16** (2) : 697-716,2006.

[6] M. Frémond, B. Nedjar, *Endommagement et principe des puissances virtuelles*, C. R. Acad. Sci., Paris, II ; **317**(7) : 857-864,1993.

[7] M. Frémond, B. Nedjar, *Damage, gradient of damage and principle of virtual power*, Int. J. Solids and Struct. ; **33**(8) :1083-1103,1996.

[8] A. Karma, D. Kessler, H. Levine, *Phase field model in mode III dynamic fracture*, Phys. Rev. Lett. ; **87**(4) :045501, 2001.

[9] S. May, J. Vignollet, R. de Borst, *A numerical assesment of phase-field models for brittle and cohesive fracture :* Γ*-convergence and stress oscillations*, Eur. J. of Mech, A/Solids ; **52** :72-89,2015.

[10] C. Miehe, F. Welschinger, M. Hofhacker, *A Thermodynamically consistent phase field models of fracture : variational principles and multifield FE implementation*, Int. J. Numer. Engng. ; **83**(10) :1273-1311,2010.

[11] N. Moës, C. Stolz, N. Chevaugeon, *Coupling local and non-local damage evolutions with the Thick Level Set model*, Adv. Model. and Simul. in Eng. Sci. ; **2** :16,2014.

[12] N. Moës, C. Stolz, P.-E. Bernard, N. Chevaugeon, *A level set based model for damage growth : The thick level set approach*, Int. J. Numer. Meth. Engng. ; **86** :358-380,2010.

[13] J. J. Moreau, *Fonctionnelles convexes*, Edizioni del Dipartimento di Ingegneria Civile, Università di Roma "Tor Vergata", Roma, ISBN 978-88-6296-001-4 and Séminaire sur les équations aux dérivées partielles, Collège de France, Paris, 1966. ,2003.

[14] A. Parrilla Gómez, N. Moës, C. Stolz, *Comparison between thick level set (TLS) and cohesive zone models*, Adv. Model. and Simul. in Eng. Sci. ; **2** :18,2015.

[15] R.H.J. Peerlings, R. de Borst, W.A.M. Brekelmans, H.P.J. de Vree, *Gradient-enhanced damage for quasi-brittle materials*, Int. J. for Numer. Meth. in Engng. ; **39** :3391-3403,1996.

[16] K. Pham, J.J. Marigo, *From the onset of damage until rupture : construction of the responses with damage localization for a general class of gradient damage models*, Continuum Mechanics and Thermodynamics ; **25** :147-171,2013.

[17] G. Pijaudier-Cabot, Z.P. Bazant, *Non local damage theory*, ASCE J. of Engng. Mech. ; **113** :1512-1533,1987.

[18] D. Mumford, J. Shah, *Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems*, Comm. on Pure and App. Math. ; **42** :577-685,1989.

[19] C. Stolz, N. Moës, *A new model of damage : a moving thick layer approach*, Int. J. Fract. ; **174** :49-60,2012.

[20] M. Frémond, C. Stolz, *On alternative approaches for graded damage modelling*, Annals of Solids and Structural Mechanics ; **A paraître**,2016.