

Contrôle optimal du procédé de placement de fibres robotisé par la PGD

N. Bur¹, P. Joyot^{1,2}

¹ Estia-Recherche, Bidart, {n.bur, p.joyot}@estia.fr

² I2M, UMR CNRS 5295, Talence

Résumé — Certaines méthodes de réduction de modèles permettent de construire des abaques numériques multi-paramétriques. Ceux-ci peuvent ensuite être utilisés dans le cadre d'une optimisation afin de déterminer des valeurs pertinentes de paramètres.

Nous proposons ici une approche basée sur la *Proper Generalised Decomposition* (PGD) opérant sur un système décrivant un contrôle optimal.

Mots clés — Réduction de modèle, PGD, contrôle optimal, placement de fibres robotisé.

1 Introduction

Le procédé de placement de fibres robotisé (PFR) est un des procédés prometteurs pour la mise en forme des matériaux composites. Cette technique consiste en la dépose de fibres pré-imprégnées pour construire un empilement ayant la géométrie et les caractéristiques mécaniques souhaitées.

Les études portant sur ce procédé de fabrication sont nombreuses [1, 2, 3, 4] et offrent une modélisation de plus en plus fine et complexe.

De nouvelles techniques de résolution [5, 6], basées sur la représentation séparée des variables, ont permis d'enrichir encore les modèles en ajoutant certains paramètres comme de nouvelles coordonnées [7]. Ainsi la *Proper Generalised Decomposition* (PGD) permet-elle de générer des abaques multi-paramétrique fournissant toutes les solutions possibles pour chaque combinaison des paramètres considérés [8, 9, 10, 11, 12].

Ces abaques sont ensuite utilisés pour contrôler ou optimiser le procédé. En effet, dans le cadre du PFR, il convient de maîtriser efficacement la source de chaleur : le matériau doit être chauffé suffisamment pour assurer la fusion de la matrice enrobant les fibres et la cohésion avec le substrat, tout en n'excédant pas un seuil à partir duquel le matériau brûle. Il est ainsi possible de tirer parti de la PGD pour construire des abaques *off-line* pour ensuite obtenir la meilleure puissance associée à un profil de vitesse donné [13].

Il est à noter que ces solutions sont déterminées à partir des équations décrivant la physique du phénomène étudié, le contrôle étant effectué *on-line*, comme un post-traitement.

Nous proposons donc ici de calculer directement la solution d'un problème d'optimisation pour obtenir simultanément le champ de température (qui pourra servir à calculer les contraintes résiduelles), ainsi que le contrôle à effectuer pour obtenir ce champ. Cela signifie que l'optimisation est réalisée *off-line*, réduisant d'autant le coût du post-traitement et améliorant le contrôle en temps réel du PFR.

La section suivante présente les équations régissant le procédé PFR. Nous donnons ensuite (3) l'écriture du système d'optimalité que nous cherchons à résoudre à l'aide de la PGD. Les résultats sont alors améliorés en utilisant la méthode d'Uzawa dans la section 4.

2 Modélisation du procédé

Le procédé PFR peut être représenté sous la forme d'une équation de la chaleur, associée aux conditions de bord suivantes. Le terme source est appliqué sur le bord Γ_P (voir Fig. 1) ; en considérant un domaine Ω suffisamment long, on peut utiliser une condition de Dirichlet pour indiquer que la température est constante sur Γ_R ; enfin, pour simplifier, une condition de Neumann homogène est appliquée sur les autres bords.

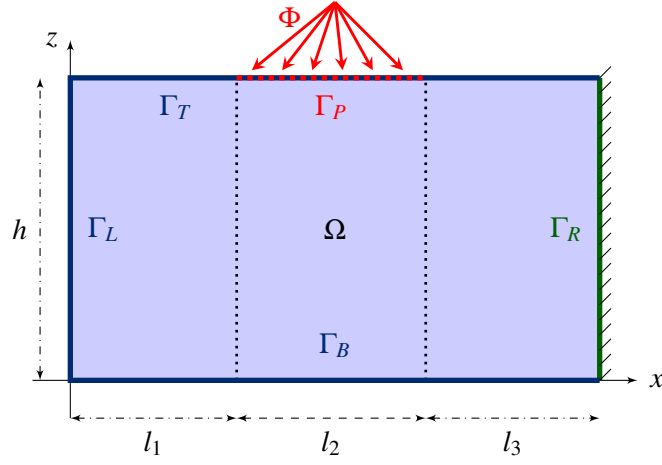


FIGURE 1 – Domaine d'étude

Cela mène donc au problème de convection-diffusion (1) ci-après

$$\begin{cases} -\text{div}(\underline{K}\nabla u) + \rho C_p \underline{V}\nabla u = 0 & \text{in } \Omega; \\ u = 0 & \text{on } \Gamma_R; \\ -\underline{K}\partial_n u = 0 & \text{on } \Gamma_B \cup \Gamma_L \cup \Gamma_T; \\ -\underline{K}\partial_n u = -\Phi & \text{on } \Gamma_P; \end{cases} \quad (1)$$

avec $\underline{K} = \begin{pmatrix} k_{\parallel} & 0 \\ 0 & k_{\perp} \end{pmatrix}$ et $\underline{V} = (v \ 0)^T$.

Cette équation peut bien entendu être résolue directement par la méthode des éléments finis. Cependant, afin de pouvoir confronter ultérieurement avec des résultats issus d'autres méthodes, il convient de mettre en œuvres des systèmes comparables. Ainsi nous utilisons la méthode des produits tensoriels introduite par R. E. Lynche, J. R. Rice et D. H. Thomas [14, 15]. L'écriture de la forme faible de l'équation (1) en utilisant la séparation des coordonnées spatiales et les formes tensorielles des opérateurs permet alors d'utiliser des fonctions de forme dans la représentation séparée, mais le système est bien résolu avec une méthode globale, non séparée.

Il est ainsi possible d'obtenir le champ de température, à partir de la donnée d'entrée Φ modélisant le flux laser. Pour différents couples de puissance et de vitesse, nous formons de la sorte plusieurs solutions de référence.

De ces résultats sont extraites les températures sur le bord Γ_P où la source est appliquée. En effet, on souhaite contrôler la température sur ce bord durant le procédé, pour atteindre un optimum, en fournissant le flux de chaleur idéal. Nous calculons également $P_{S_{ray}}$ qui est la puissance vue par Γ_P , comme l'intégrale du flux sur ce bord multipliée par la longueur de la surface rayonnée S_{ray} .

La Table 1 regroupe quelques données clé pour quatre solutions de référence à des fins de comparaison. Afin de contenir le nombre de Péclet et d'éviter l'emploi de techniques de stabilisation, le nombre d'éléments utilisés augmente avec la vitesse.

TABLE 1 – Valeurs clé pour les solutions de référence

	$v = 0,001 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ $P_w = 600 \text{ W}$	$v = 0,01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ $P_w = 1897 \text{ W}$	$v = 0,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ $P_w = 6000 \text{ W}$	$v = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ $P_w = 18970 \text{ W}$
Reference				
U_{max}	386,076 K	371,744 K	372,283 K	372,197 K
$P_{S_{ray}}$	320 W	1011,73 W	3200 W	10 117,3 W

3 Mise en place du contrôle optimal

Comme indiqué dans l'introduction, la méthode PGD permet de construire des abaques multi-paramétriques pouvant être utilisées pour contrôler le PFR [13]. Une autre manière de procéder consiste à tirer parti de la théorie du contrôle optimal. Dans cette méthode de fabrication, un flux laser permet de fondre la matrice thermoplastique enrobant les fibres. La difficulté consiste donc à déterminer la meilleure puissance du laser pour atteindre une température optimale permettant de fondre la matrice suffisamment.

Nous considérons donc la fonction coût ci-dessous à minimiser, avec le flux appliqué sur Γ_p qui est une portion du bord du domaine,

$$J(u, \Phi) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_p} (u - u_d)^2 + \alpha \Phi^2 d\gamma, \quad (2)$$

soumise à l'équation d'état (1), avec α le paramètre de coût de la commande.

De la sorte Φ sert de contrôle et on souhaite atteindre une température désirée u_d sur Γ_p . Le domaine d'étude est celui donné à la Fig. 1.

Le Lagrangien correspondant s'écrit

$$\mathcal{L}(u, \Phi, p) = J(u, \Phi) + \int_{\Omega} p \left(-\text{div}(\underline{\underline{K}} \nabla u) + \rho C_p \underline{\underline{V}} \nabla u \right) dx. \quad (3)$$

Pour trouver un point stationnaire on prend

$$\begin{cases} \nabla_u \mathcal{L}(u, \Phi, p) = 0; & (4) \\ \nabla_{\Phi} \mathcal{L}(u, \Phi, p) = 0; & (5) \\ \nabla_p \mathcal{L}(u, \Phi, p) = 0. & (6) \end{cases}$$

En développant ces équations on obtient un système d'optimalité non-linéaire (voir [16]), dont la formulation faible s'écrit, avec les fonctions tests u^* et p^* ,

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \underline{\underline{K}} \nabla u^* \cdot \nabla u + \int_{\Omega} \rho C_p \underline{\underline{V}} \nabla u u^* - \int_{\Gamma_p} \frac{1}{\alpha} p u^* d\gamma = 0 \quad \forall u^*; \\ \int_{\Omega} \underline{\underline{K}} \nabla p^* \cdot \nabla p + \int_{\Omega} \rho C_p \underline{\underline{V}} p \nabla p^* + \int_{\Gamma_p} u p^* d\gamma = \int_{\Gamma_p} u_d p^* d\gamma \quad \forall p^*. \end{cases} \quad (7)$$

Dans ce système (7), les champs u et p sont couplés. La résolution d'un tel problème peut s'effectuer à l'aide d'une formulation mixte, que ce soit avec une MEF¹ classique ou dans le cadre de la PGD comme décrit ci-après.

En séparant les deux coordonnées d'espace, la forme discrète de la variable d'état $u(x, z)$ et du paramètre adjoint $p(x, z)$ s'expriment sous la forme tensorielle

$$U = \sum_i^{\infty} U_x^i \otimes U_z^i \quad \text{and} \quad P = \sum_i^{\infty} P_x^i \otimes P_z^i. \quad (8)$$

On introduit le vecteur Ψ regroupant les valeurs nodales de u et de p

$$\Psi = \begin{bmatrix} U \\ P \end{bmatrix} = \sum_i^{\infty} \begin{bmatrix} U_x^i \otimes U_z^i \\ P_x^i \otimes P_z^i \end{bmatrix}. \quad (9)$$

La forme discrétisée de la formulation faible (7) s'écrit $\Psi^{*T} \mathcal{A} \Psi = \Psi^{*T} \mathcal{B}$ où $\mathcal{A} = \sum_{i=1}^8 \underline{\underline{A}}_x^i \otimes \underline{\underline{A}}_z^i$ et $\mathcal{B} = \underline{\underline{B}}_x \otimes \underline{\underline{B}}_z$ doivent être exprimée sous forme tensorielle, et avec la fonction test

$$\Psi^* = \begin{bmatrix} U_x^* \otimes U_z^* + U_x \otimes U_z^* \\ P_x^* \otimes P_z^* + P_x \otimes P_z^* \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Ce problème discrétisé peut alors être résolu par PGD, pour différentes valeurs de la vitesse, l'état désiré u_d provenant de la solution de référence correspondante.

Puisque l'objectif du contrôle optimal est de minimiser la distance entre l'inconnue u et l'état désiré u_d sur le bord Γ_p , nous retrouvons bel et bien la température cible sur le bord considéré. Cependant, pour l'obtenir, le flux à appliquer s'éloigne de façon conséquente à mesure que la vitesse augmente, dans les simulations par PGD, comme le montre la figure Fig. 2.

1. Méthode par éléments finis.

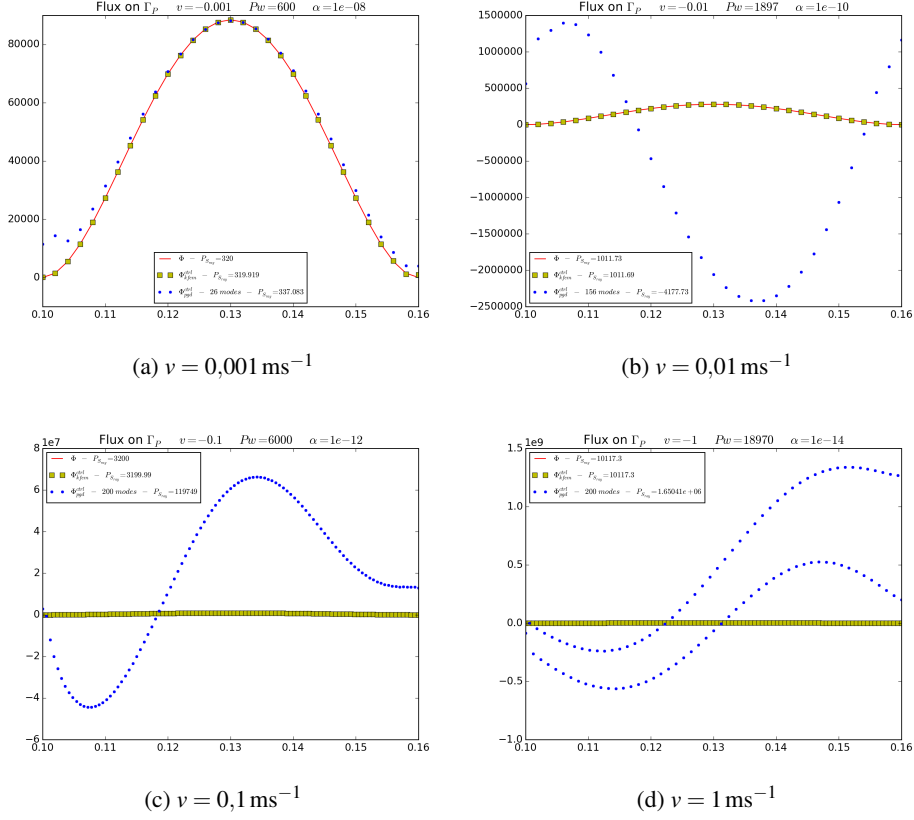


FIGURE 2 – Flux sur Γ_P pour différentes vitesses

4 Découplage du système d'optimalité

La PGD appliquée au système d'optimalité produit donc dans notre cas de mauvais résultats. Plutôt que d'en rechercher le remède dans la stabilisation numérique, nous proposons ici de résoudre le système d'optimalité sans la formulation mixte. Pour cela nous utilisons la technique d'Uzawa [17, 18].

Étant donné un candidat initial $p^{(0)}$ de p , l'adaptation de la méthode d'Uzawa consiste dans notre cas aux itérations couplées suivantes

$$\begin{cases} \underline{A}^u u^{(k+1)} = \underline{A}^{pu} p^{(k)} \\ p^{(k+1)} = p^{(k)} + \omega (\underline{A}^{pu} (u^{(k+1)} - u_d) + \underline{A}^p p^{(k)}) \end{cases} \quad (11)$$

où $\omega > 0$ est un paramètre de relaxation. Les tenseurs sont définis par

$$\begin{aligned} \underline{A}^u &= k_{\parallel} K_x^u \otimes M_z^u + M_x^u \otimes k_{\perp} K_z^u + \rho C_p \nu H_x^u \otimes M_z^u & \underline{A}^{pu} &= -\frac{1}{\alpha} M_x^{pu} \otimes M_z^{pu} \\ \underline{A}^p &= k_{\parallel} K_x^p \otimes M_z^p + M_x^p \otimes k_{\perp} K_z^p - \rho C_p \nu H_x^p \otimes M_z^p & \underline{A}^{up} &= M_x^{up} \otimes M_z^{up} \end{aligned}$$

Ce système est résolu à l'aide d'une boucle de point-fixe, à l'intérieur de laquelle chaque champ u et p est calculé par PGD. La Fig. 3 donne comme précédemment le flux trouvé pour obtenir la température u_d sur le bord Γ_P .

Nous récapitulons dans la Table 2 les différentes simulations, en collectant les valeurs clé. Ainsi, la résolution par PGD du système d'optimalité, mais sans la formulation mixte à l'aide de la méthode d'Uzawa mène à des résultats pertinents puisque le flux requis pour atteindre la température désirée est similaire à celui attendu (ce flux étant la variable d'entrée de la solution de référence).

5 Conclusion

Afin de contrôler le procédé PFR, nous avons proposé une méthode basée sur la technique PGD de réduction de modèle qui permet d'inclure des paramètres comme nouvelles coordonnées. En raison

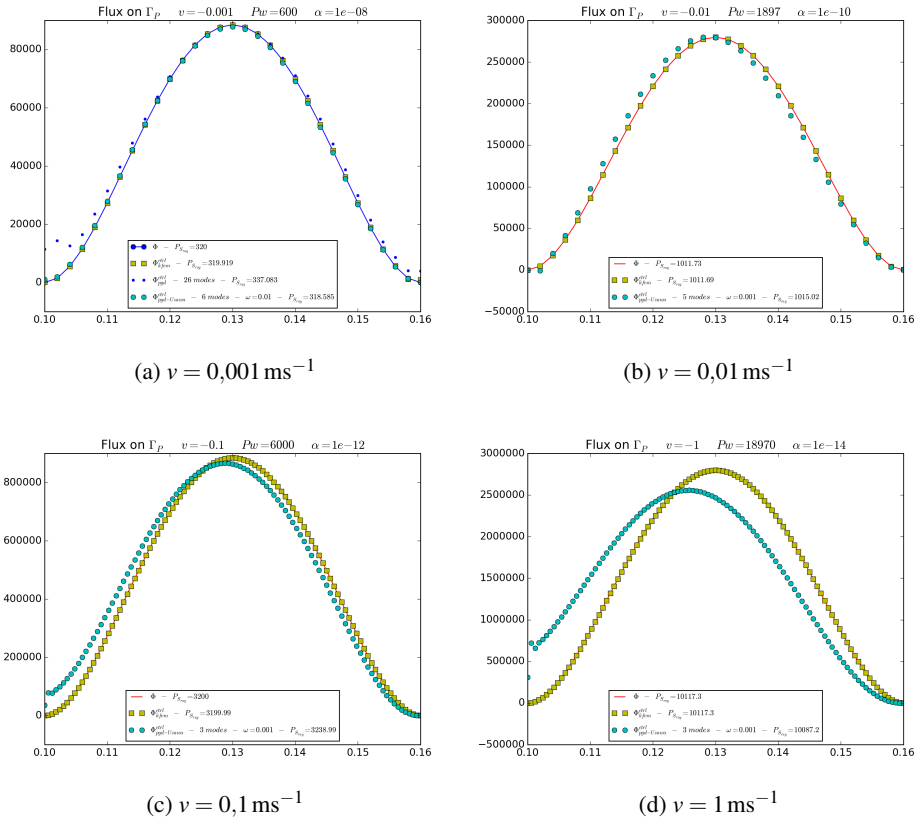


FIGURE 3 – Flux sur Γ_P avec méthode d'Uzawa

TABLE 2 – Récapitulatif des valeurs clé

	$v = 0,001 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ $P_W = 600 \text{ W}$	$v = 0,01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ $P_W = 1897 \text{ W}$	$v = 0,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ $P_W = 6000 \text{ W}$	$v = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ $P_W = 18970 \text{ W}$
Reference - kFEM				
U_{max}	386,076 K	371,744 K	372,283 K	372,197 K
$P_{S_{ray}}$	320 W	1011,73 W	3200 W	10 117,3 W
PGD				
	16 modes	183 modes	200 modes	200 modes
U_{max}	386,077 K	384,143 K	364,924 K	367,761 K
Ctrl - kFEM				
U_{max}	385,542 K	374,386 K	372,249 K	372,164 K
$P_{S_{ray}}$	319,919 W	1011,69 W	3199,99 W	10 117,3 W
Ctrl - PGD				
	26 modes	156 modes	200 modes	200 modes
U_{max}	387,108 K	371,275 K	369,883 K	394,982 K
$P_{S_{ray}}$	337,083 W	-4177,73 W	119 749 W	$1,650 41 \times 10^6 \text{ W}$
Ctrl - Uzawa PGD				
U	17 modes	80 modes	80 modes	80 modes
U_{max}	383,359 K	381,267 K	400,239 K	360,067 K
P	6 modes	5 modes	3 modes	3 modes
$P_{S_{ray}}$	318,585 W	1015,02 W	3238,99 W	10 087,2 W

d'instabilités numériques nous avons transformé un problème mixte en un problème couplé, ce qui a considérablement amélioré les résultats.

La prochaine étape consiste à considérer l'état désiré u_d comme une nouvelle variable, ce qui permettra de construire directement le contrôle du procédé sous forme multi-paramétrique.

Références

- [1] Fazil O Sonmez, H Thomas Hahn, and Mustafa Akbulut. Analysis of process-induced residual stresses in tape placement. *Journal of Thermoplastic Composite Materials*, 15(November 2002) :525–544, 2002.
- [2] R. Pitchumani, S. Ranganathan, R. C. Don, John W Gillespie, and Mark A. Lamontia. Analysis of transport phenomena governing interfacial bonding and void dynamics during thermoplastic tow-placement. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 39(9) :1883–1897, jun 1996.
- [3] R. Schledjewski and M. Latrielle. Processing of Unidirectional Fiber Reinforced Tapes—Fundamentals on the Way to a Process Simulation Tool (ProSimFRT). *Composites Science and Technology*, 63(14) :2111–2118, nov 2003.
- [4] Mark A. Lamontia, Mark B Gruber, John Tierney, John W Gillespie, Brian J. Jensen, and Roberto J. Cano. Modeling the Accudyne Thermoplastic In Situ ATP Process. *Jec-Sampe*, pages 1–8, 2009.
- [5] Amine Ammar, B. Mokdad, Francisco Chinesta, and Roland Keunings. A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 139(3) :153–176, 2006.
- [6] Amine Ammar, B. Mokdad, Francisco Chinesta, and Roland Keunings. A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modelling of complex fluids. Part II : Transient simulation using space-time separated representations. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 144(2-3) :98–121, 2007.
- [7] Francisco Chinesta, Adrien Leygue, Brice Bognet, Chady Ghnatios, Fabien Poulhaon, Felipe Bordeu, Anaïs Barasinski, Arnaud Poitou, Sylvain Chatel, and Serge Maison-Le-Poec. First steps towards an advanced simulation of composites manufacturing by automated tape placement. *International Journal of Material Forming*, 7 :81–92, sep 2014.
- [8] Étienne Prulière, Francisco Chinesta, and Amine Ammar. On the deterministic solution of multidimensional parametric models using the Proper Generalized Decomposition. *Mathematics and Computers in Simulation*, 81(4) :791–810, 2010.
- [9] Brice Bognet, Felipe Bordeu, Francisco Chinesta, Adrien Leygue, and Arnaud Poitou. Advanced simulation of models defined in plate geometries : 3D solutions with 2D computational complexity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 201-204(Accepted) :1–12, 2012.
- [10] Chady Ghnatios, Francisco Chinesta, Elías Cueto, Adrien Leygue, Arnaud Poitou, Piotr Breitkopf, and Pierre Villon. Methodological approach to efficient modeling and optimization of thermal processes taking place in a die : Application to pultrusion. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 42(9) :1169–1178, may 2011.
- [11] Chady Ghnatios, Françoise Masson, Antonio Huerta, Adrien Leygue, Elías Cueto, and Francisco Chinesta. Proper Generalized Decomposition based dynamic data-driven control of thermal processes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 213-216 :29–41, mar 2012.
- [12] Francisco Chinesta, Adrien Leygue, Felipe Bordeu, Jose Vincente Aguado, Elías Cueto, David González, Icíar Alfaro, Amine Ammar, and Antonio Huerta. PGD-Based Computational Vademecum for Efficient Design, Optimization and Control. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 20(1) :31–59, jan 2013.
- [13] Nicolas Bur, Pierre Joyot, Chady Ghnatios, Pierre Villon, Elías Cueto, and Francisco Chinesta. On the use of model order reduction for simulating automated fibre placement processes. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, 3(1) :4, dec 2016.
- [14] R. E. Lynch, J. R. Rice, and D. H. Thomas. Tensor product analysis of partial difference equations. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 70 :378–384, 1964.
- [15] Robert E. Lynch, John R. Rice, and Donald H. Thomas. Direct solution of partial difference equations by tensor product methods. *Numerische Mathematik*, 6(1) :185–199, dec 1964.
- [16] Jacques-Louis Lions. *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, 1971.
- [17] Hirofumi Uzawa. Iterative Methods in Concave Programming. In Kenneth J. Arrow, Leonid Hurwicz, and Hirofumi Uzawa, editors, *Studies in Linear and Nonlinear Programming*, pages 154–165. Stanford University Press, Stanford, California, jan 1958.
- [18] R Simon. *Multigrid Solvers for Saddle Point Problems in PDE-Constrained Optimization Dissertation*. PhD thesis, Johannes Kepler Universität Linz, 2008.