

Spectre vibratoire d'un oscillateur discret à impacts

Anders Thorin et Mathias Legrand

Laboratoire de dynamique des structures et vibrations, Département de génie mécanique, Université McGill

Résumé — Cette contribution examine le spectre vibratoire d'un oscillateur autonome et conservatif, sujet à une contrainte unilatérale qui restreint le déplacement d'un degré de liberté. Des développements récents ont permis de paramétrer les solutions périodiques d'un tel système en fonction du nombre $k \in \mathbb{N}^*$ d'impacts par période. Le spectre correspondant est composé d'une multitude de branches à k impacts par période.

Le système d'étude est un oscillateur à deux degrés de liberté. Malgré sa simplicité apparente, son diagramme énergie–fréquence est d'une grande richesse. Les résultats présentés se concentrent donc sur des k petits ($k \leq 3$) et l'emphase est portée sur les liens entre des différentes branches du diagramme. Deux phénomènes sont détaillés : la bifurcation de la branche d'un mode linéaire vers une boucle du spectre de solutions à un, deux puis trois impacts par période ainsi qu'une apparente convergence vers un mouvement périodique impliquant une phase de contact collé de durée non nulle.

Mots clés — vibro-impact, analyse modale non-régulière, système discret, spectre vibratoire, diagramme énergie–fréquence

1 Contexte

Les modes linéaires jouent un rôle essentiel en dynamique linéaire : ils forment une base de l'espace vectoriel des solutions autonomes, c'est-à-dire que n'importe quelle solution non forcée est une combinaison linéaire de ces modes. Qui plus est, cette information est utile à la prédiction des phénomènes de résonance : un système faiblement amorti et forcé périodiquement emmagasine de l'énergie lorsque la fréquence de forçage approche les fréquences propres du système.

Bien que le principe de superposition, et donc la structure d'espace vectoriel, ne résiste pas à l'introduction d'une non-linéarité dans le modèle, il est encore possible grâce à l'*analyse modale non-linéaire* et dans une vaste majorité de cas, de prédire des plages de fréquences de forçage menant à des résonances vibratoires non-linéaires, configuration fréquemment rencontrée en industrie [1].

Cette contribution s'intéresse à la classe particulière des systèmes dynamiques non-réguliers, et plus précisément ceux sujets à une contrainte unilatérale de contact pouvant induire des discontinuités de vitesse. Le système étudié est particulièrement simple : deux masses reliées par deux ressorts linéaires où la masse libre est sujette à une contrainte de contact unilatéral, comme indiqué sur la figure 1. Il sera montré que, malgré la grande simplicité de cet oscillateur, son comportement dynamique est d'une grande richesse.

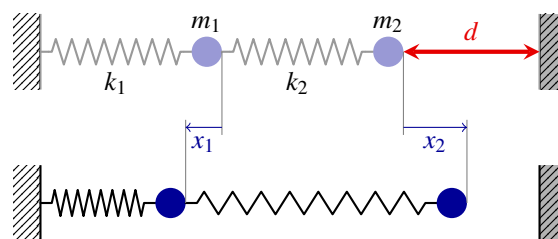


FIGURE 1 – Système étudié : configuration au repos [haut] et configuration actuelle [bas]. Il n'y a ni amortissement ni forçage extérieur.

La méthodologie présentée est générale et permet d'exhiber la dynamique périodique de n'importe quel système autonome et conservatif ayant (1) un comportement linéaire durant les phases sans contact et

(2) exactement une contrainte unilatérale de contact décrite par une loi d'impact de Newton parfaitement élastique ; sa dynamique doit ainsi pouvoir s'écrire [2] :

$$\begin{cases} M\ddot{x} + Kx = w\lambda & (1a) \\ g(x) \geq 0 & (1b) \\ \lambda \geq 0 & (1c) \\ g(x)\lambda = 0 & (1d) \\ g(x) = 0 \rightarrow \dot{x}^+ = N\dot{x}^- & (1e) \end{cases}$$

où M et K sont les matrices masse et raideur, x est le vecteur de coordonnées généralisées, $g(x) = w^\top x + d \geq 0$ est la contrainte unilatérale, λ est l'impulsion et N la matrice de la loi de Newton généralisée [2].

L'objectif est de présenter le diagramme énergie–fréquence du système masse–ressort de la figure 1 pour des valeurs ¹ $m_1 = m_2 = 1$, $k_1 = k_2 = 1$ et $d = 1$. Cette analyse est une illustration des travaux [2] dont les résultats principaux sont rappelés. Sans perte de généralité, on suppose qu'il y a contact à $t = 0$, soit $x_2(0) = d$ ici, et on note $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ les k durées de phase libre ainsi que $T = \sigma_1 + \dots + \sigma_k$, la période du mouvement périodique recherché.

- A. Les solutions périodiques sont déterminées par des conditions initiales elles-mêmes déterminées par la séquence $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$, hormis pour certaines valeurs isolées de ce k -uplet. Dans ces rares cas, nous parlerons de *singularité*².
- B. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, les équations minimales régissant l'existence de solutions périodiques à k impact(s) par période sont connues et au nombre de $k - 1$, ce qui permet leur calcul en pratique.
- C. Les séquences $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ sont génériquement l'union de parties de courbes \mathcal{S} de \mathbb{R}^k , déterminées par les $k - 1$ équations mentionnées en B. Les solutions périodiques s'organisent donc en continua unidimensionnels, c'est-à-dire qu'une solution périodique est (presque toujours) une trajectoire fermée sur une variété de dimension deux dans l'espace des phases.
- D. Certains points des courbes de \mathbb{R}^k sont connus, ce qui permet de calculer \mathcal{S} par continuation numérique. Précisément, ces points sont les intersections entre \mathcal{S} et les hyperplans dont la somme des coordonnées de chaque point est multiple d'une période propre³.

Pour simplifier l'exposé, les expressions mathématiques établies dans [2] ne sont pas rappelées et l'emphase est portée sur les observations numériques.

2 Méthodologie pour l'obtention des branches énergie–fréquence

L'énergie totale

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 m_i \dot{x}_i(0)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 k_i x_i(0)^2 \quad (2)$$

est déterminée par les conditions initiales, elles-mêmes déterminées par les durées des phases libres (voir la propriété A ci-dessus). Il suffit donc de calculer les courbes des $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ pour lesquelles des solutions existent. La fréquence du mouvement est alors donnée par $1/T$ et sa pulsation par $2\pi/T$. Tout le problème est réduit à chercher les k -uplets $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ de durées de phases libres pour lesquels il y a des solutions.

La propriété C indique qu'un tel k -uplet est un point d'une courbe de \mathcal{S} . En utilisant la propriété D, on tient un ensemble de points par lesquels passent les⁴ courbes de \mathcal{S} . On peut alors calculer ces courbes par continuation numérique en résolvant $k - 1$ équations en les k inconnues $\sigma_1, \dots, \sigma_k$, voir la propriété B. Pour chacune de ces courbes, il faut sélectionner numériquement les éventuelles zones admissibles, c'est-à-dire les morceaux de courbes sur lesquels la contrainte $x_n(t) \geq d$ est respectée. Le résultat du

1. Les valeurs sont arbitraires et leur unité n'a donc aucune importance ; elles ne sont pas précisées dans ce document.

2. Ces *singularités* correspondent aux cas $\Sigma(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ singuliers, voir [2].

3. Chaque hyperplan est défini pour un $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \{1, 2\}$ par $\{(\sigma_1, \dots, \sigma_k) \in \mathbb{R}^k \mid \sum_{i=1}^k \sigma_i = p \frac{2\pi}{\omega_p}\}$ où les ω_p sont les pulsations propres du système linéaire.

4. En toute rigueur, il faudrait écrire *des* : il n'est en fait pas prouvé que toutes les courbes de \mathcal{S} contiennent des points connus, mais c'est ce qui a toujours été observé.

calcul des courbes et la sélection des parties correspondant à des solutions est représenté sur la figure 2 pour $k = 2$.

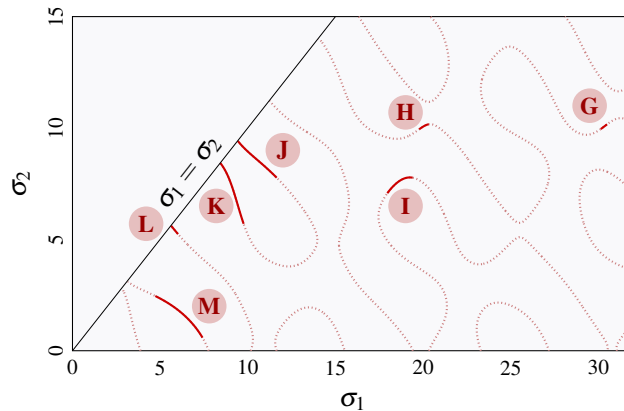


FIGURE 2 – Courbes des solutions à deux ipp dans l’espace des durées de phase libre pour $\sigma_1 > \sigma_2$. Les courbes pour $\sigma_1 < \sigma_2$ sont les symétriques par rapport à la première bissectrice : solutions admissibles [—] et solutions périodiques qui violent la contrainte de contact [.....] (*potential solutions* dans [2]). Les étiquettes correspondent aux branches de la figure 3(b).

3 Spectre des solutions avec un et deux impacts par période

3.1 Diagrammes énergie–fréquence

Pour ne pas obscurcir des diagrammes déjà bien riches, on se limite dans un premier temps aux spectres *canoniques*, c’est-à-dire aux branches dont la période est la période *minimale*. En effet, une solution à un impact par période (ipp) considérée sur deux périodes définit une solution à deux ipp particulière. Cela signifie qu’une branche du diagramme énergie–fréquence correspondant à une solution à un ipp est répliquée dans le diagramme énergie–fréquence à deux ipp pour une abscisse divisée par deux. Les spectres pour un et deux ipp sont représentés sur la figure 3. Chaque branche a deux extrémités, celle

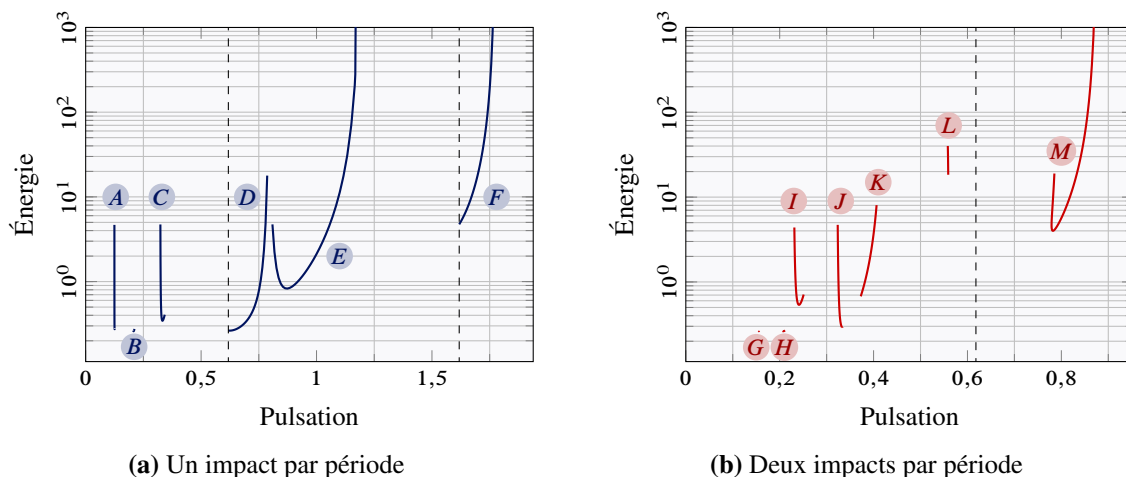


FIGURE 3 – Spectre canonique du système étudié. Les lettres capitales étiquettent chacune des branches. Pulsations propres du système [- -].

de droite étant éventuellement d’énergie infinie. Dans la sous-section suivante, elles sont étudiées et des liens entre les extrémités de branches pour différents nombre d’impacts par période sont mis en évidence.

3.2 Analyse des branches

Les deux déplacements de l’oscillateur sont tracés sur les figures 4 et 5, pour chacune des extrémités des branches de la figure 3 : X^- désigne l’extrémité gauche (basse fréquence) de la branche X et X^+ ,

l'extrémité droite (haute fréquence), où X est une lettre comprise entre A et M. Il apparaît que les branches

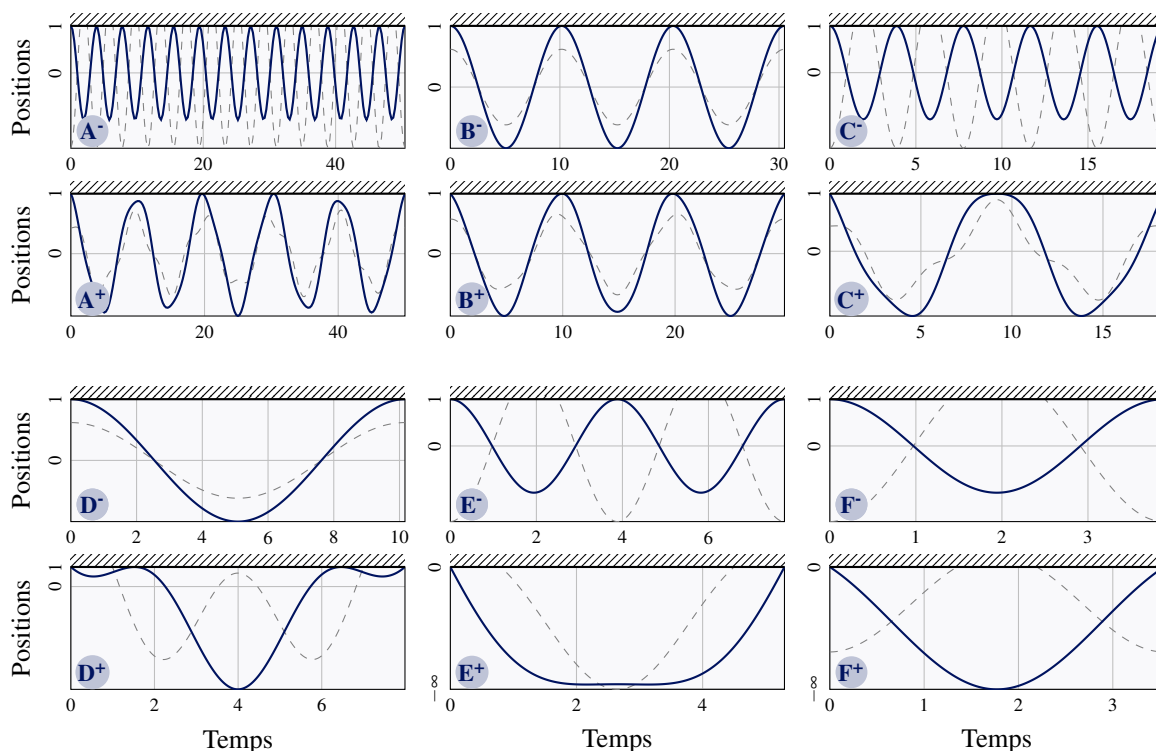


FIGURE 4 – Trajectoires pour chacune des extrémités des branches de la figure 3(a) : masse 1 [- -] et masse 2 [—]. Dans l'étiquette, le - indique l'extrémité gauche et le +, l'extrémité droite.

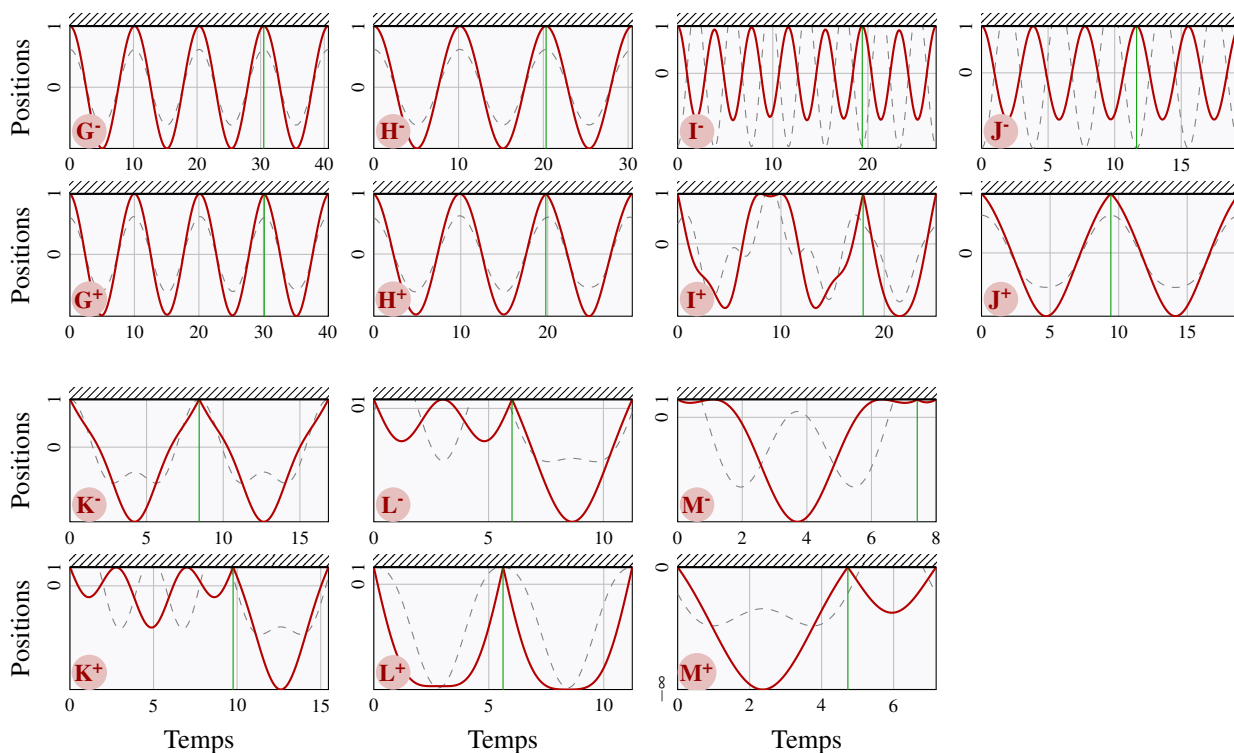


FIGURE 5 – Trajectoires pour chacune des extrémités des branches de la figure 3(b) : masse 1 [- -] et masse 2 [—]. Dans l'étiquette, le - indique l'extrémité gauche et le +, l'extrémité droite.

à un ipp partent systématiquement d'un mouvement sinusoïdal, c'est-à-dire d'un mode propre du système linéaire (sans contact) comme indiqué sur les graphiques de A⁻ à F⁻.

Pour les extrémités droites, il y a deux possibilités. Elles peuvent correspondre à une trajectoire rasante, c'est-à-dire que la masse 2 vient frôler l'obstacle, une fois (graphique C⁺) ou deux (graphiques

A^+ , B^+ et D^+). Chaque *contact rasant* peut-être vu comme le cas limite d'une fin d'absence de contact ou comme celui du début de présence de contact, si bien que ces trajectoires sont communes aux ensembles de solutions à un ipp et deux ou trois ipp. Or, il se trouve qu'elles correspondent toutes à des cas singuliers (cf. point A) du problème à deux ipp, ce qui donne un moyen pratique de calculer finement ces fins de zones admissibles. En particulier, cela permet d'éviter le calcul du maximum du déplacement de la masse 2 en parcourant le continuum jusqu'à ce qu'il atteigne d (contact rasant). En outre, les solutions rasantes à trois ipp (graphiques A^+ , B^+ et D^+) donnent lieu à des continua de solutions à trois ipp, qui s'arrêtent eux-mêmes lors de trajectoires rasantes à quatre ipp ou plus, donnant naissance à de nouveaux continua. On entrevoit que les branches pour différents nombre d'ipp k entretiennent des liens entre elles. Il est aussi possible que les branches divergent asymptotiquement vers une énergie infinie (graphiques E^+ et F^+) ; les fréquences pour lesquelles il y a asymptote sont connues [2].

Pour les branches à deux ipp, les possibilités sont plus nombreuses. Certaines extrémités sont des harmoniques (G^- , H^- , I^- et J^-). D'autres correspondent à des trajectoires rasantes à trois ipp (H^+ , L^-) ou quatre ipp (G^+ , I^+ , K^+ , M^-). Comme pour les cas rasants précédents, ceux-ci donnent naissance à des continua donc à de nouvelles branches énergie–fréquence.

Il peut y avoir divergence comme le montre l'extrémité M^+ : la variété n'est alors pas bornée.

Les graphiques J^+ , K^- et I^+ présentent la même trajectoire répétée deux fois : il s'agit de mouvements à un ipp étendus à deux périodes minimales. Pour comprendre, il est pratique de considérer les courbes des durées de phases de contact, représentées sur la figure 2. Si (σ_1, σ_2) correspond à une solution, alors (σ_2, σ_1) aussi, donc les courbes qui passent par la première bissectrice sont symétriques par rapport à la première bissectrice. Néanmoins, (σ_1, σ_2) et (σ_2, σ_1) mènent à des solutions de même énergie, donc le diagramme énergie–fréquence est déterminé par la courbe prise sur le domaine $\sigma_1 > \sigma_2$; cela justifie que les branches J^+ , K^- et I^+ , dont les courbes atteignent la droite $\sigma_1 = \sigma_2$, soient délimitées par des mouvements à un ipp.

4 Deux phénomènes d'intérêt

Les observations précédentes sont synthétisées sur la figure 6. Il est possible de tracer les branches à trois et quatre ipp et ainsi prolonger les branches existantes ; on se concentre ici plutôt sur deux zones de la figure : les branches B et H (cadre en bas à droite) et le point orange *spp*⁵, voir la sous-section 4.2.

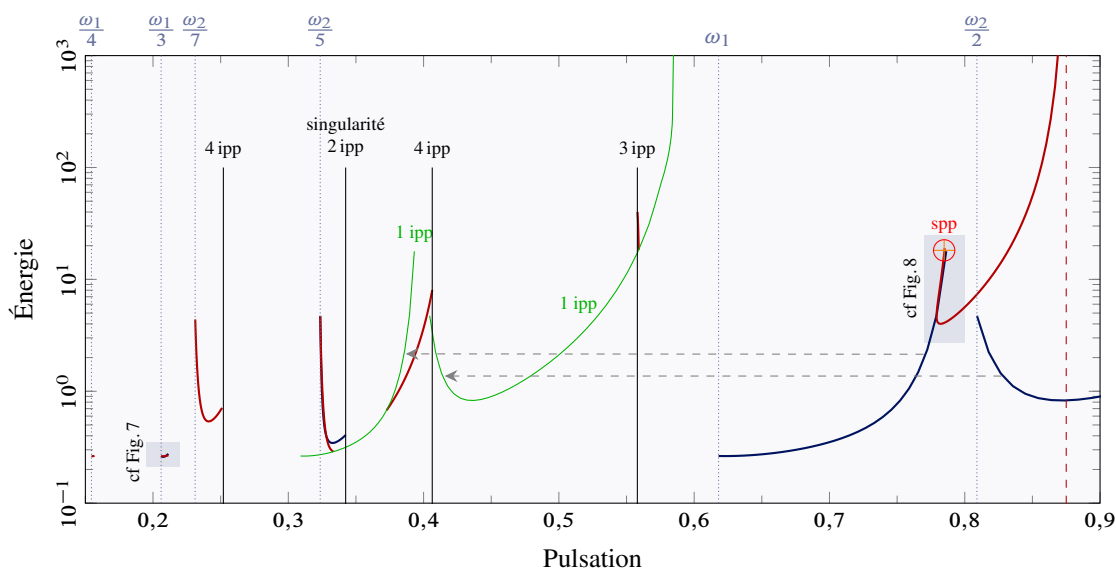


FIGURE 6 – Diagramme énergie–fréquence pour un et deux ipp avec mention des liens entre branches : branches à un ipp [—], branches à deux ipp [—] et branches à un ipp vues sur deux périodes [—]. Les deux rectangles sont détaillés sur les figures 7 et 8.

5. pour « sticking per period », terminologie introduite dans [3]

4.1 Boucle (1, 3, 2)

On peut constater que les graphiques B^- (Figure 4) et H^- (Figure 5) sont les mêmes : il s'agit du premier mode pris sur trois périodes. Considéré comme un mouvement à un ipp, celui-ci donne naissance à un continuum à un ipp (branche B) qui se termine par un mouvement rasant à trois ipp (B^+). Perçu comme un mouvement à deux ipp, il donne naissance à un continuum à deux ipp qui prend également fin avec une trajectoire rasante à trois ipp (H^+). La figure 7 montre qu'en effet, les deux extrémités B^+ et H^+ sont rejointes par une autre branche, à trois ipp celle-ci. Il s'agit donc d'une boucle isolée, où l'on peut passer continûment d'un mode linéaire à un ipp, puis trois, puis deux et revenir au point de départ, d'où le nom proposé : boucle (1, 3, 2).

Il n'est pas exclu que ce phénomène soit plus général et que toute branche du diagramme énergie–fréquence puisse être prolongée de la sorte, jusqu'à obtenir ou bien une divergence, ou bien une boucle ; cela reste à étudier.

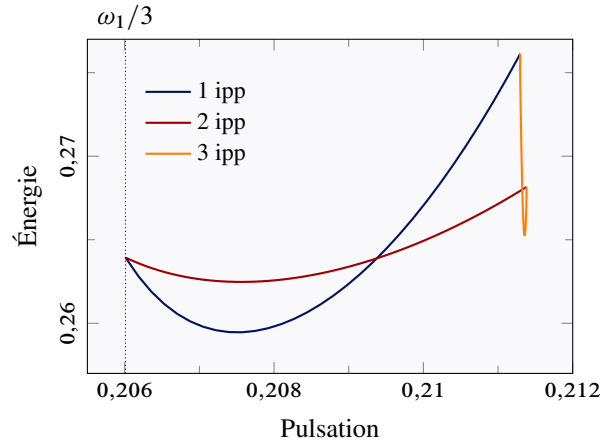
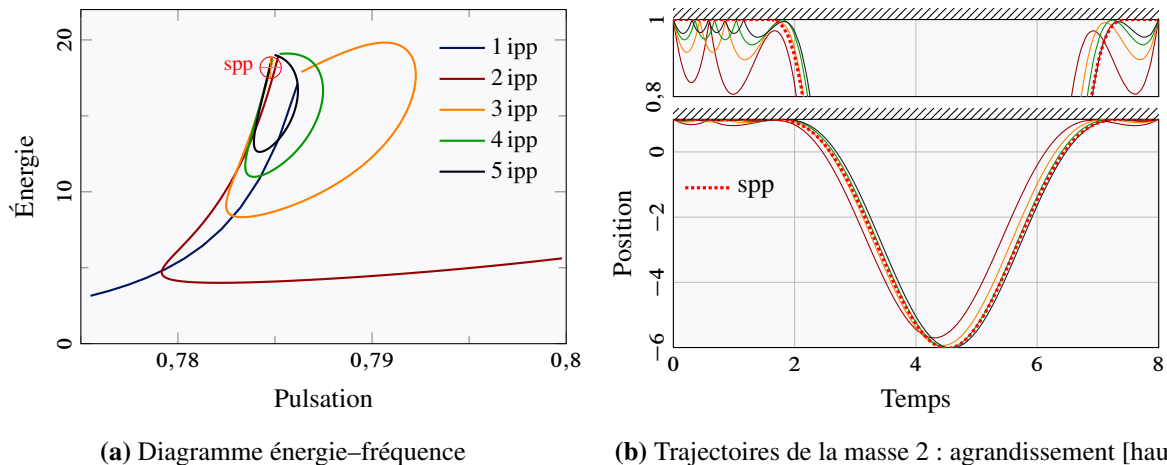


FIGURE 7 – Phénomène de boucle (1, 3, 2) dans le spectre de l'oscillateur.

4.2 Convergence vers un mouvement « collant »

Certaines solutions périodiques de la dynamique de notre oscillateur ont une phase de contact de durée non nulle. Il s'agit de mouvements avec une spp [3] : le mouvement de la masse 1 est tel qu'il maintient la masse 2 contre le mur pendant une certaine durée plus courte que la période. Une telle trajectoire est représentée sur la figure 8(b). Il est prouvé que les spp des systèmes à deux degrés de liberté correspondent à un ensemble de points discrets dans le diagramme énergie–fréquence : il n'y a pas de continuum de spp [3]. Autour de tels « rares » points ont été observées des convergences apparentes de



(a) Diagramme énergie–fréquence

(b) Trajectoires de la masse 2 : agrandissement [haut]

FIGURE 8 – Convergence vers un spp : certaines branches semblent converger avec le nombre d'ipp k vers un spp, *i.e.* un mouvement avec une phase de contact de durée non nulle.

mouvements à k ipp vers les spp. Celles-ci se traduisent par des branches de plus en plus rapprochées d'un point correspondant à un spp comme indiqué sur la figure 8(a). Il semble donc que les ipp et les spp entretiennent des liens particuliers. De plus, l'apparente convergence serait « rapide » : la trajectoire à cinq ipp est presque similaire à la trajectoire spp.

5 Conclusion

Les développements récents [2] permettent d'établir le spectre fréquentiel d'oscillateurs à impacts pour différents nombres d'impacts par période (ipp). La méthode est ici illustrée sur un système élémentaire à deux degrés de liberté avec une contrainte unilatérale de contact. Les différentes branches, à première vue isolées et indépendantes, sont en réalité liées. Les branches à un ipp partent systématiquement d'harmoniques linéaires, c'est-à-dire de modes propres pris sur une ou plusieurs périodes. Chaque branche à k ipp qui se termine par une orbite rasante donne naissance à une nouvelle branche à $k' \neq k$ ipp. Certaines branches divergent vers des énergies infinies.

Deux phénomènes particuliers ont été relevés. Une boucle du diagramme énergie–fréquence naissant par bifurcation à partir d'une harmonique linéaire a été observée : une branche de solutions à un ipp est liée à une branche de solutions à trois ipp, elle-même reliée à une branche de solutions à deux ipp qui boucle sur le point de départ de la branche un ipp. Par ailleurs, dans certaines zones, les branches d'énergie–fréquence semblent converger vers des points particuliers, qui correspondent à des mouvements périodiques avec une durée de contact non nulle dits « spp ».

Le calcul systématique du spectre pour des nombres d'ipp supérieurs ($k \geq 3$) montre qu'il devient de plus en plus riche. Si l'on ajoute à cela que chaque mouvement à k ipp définit des mouvements à $2k$ ipp, $3k$ ipp, et ainsi de suite, chaque branche est reproduite à des fréquences divisées par des entiers. Un système aussi simple que celui proposé a donc un spectre complet extrêmement riche.

La prochaine étape consiste à justifier mathématiquement les observations reportées ici et voir comment elles se généralisent pour des k grands. À terme, il faudra également comparer le diagramme énergie–fréquence d'un tel système à celui obtenu par intégration temporelle du même système légèrement forcé périodiquement et subtilement amorti. Les premières tentatives numériques ont mis en évidence des liens du même type que ceux des systèmes non-linéaires réguliers entre les branches des solutions périodiques du systèmes autonomes — les fameuses « backbone curves » donc — et les courbes de résonance, mais cela reste à clarifier pour les systèmes non-réguliers.

Références

- [1] Gaëtan Kerschen, Maxime Peeters, Jean-Claude Golinval, and Cyrille Stéphan. Nonlinear modal analysis of a full-scale aircraft. *Journal of Aircraft*, 50(5):1409–1419, 2013. [hal-01389708].
- [2] Anders Thorin, Pierre Delezoide, and Mathias Legrand. Nonsmooth modal analysis of piecewise-linear impact oscillators. *preprint*, 2016. [hal-01298983].
- [3] Huong Le Thi, Stéphane Junca, and Mathias Legrand. Periodic solutions of a two-degree-of-freedom autonomous vibro-impact oscillator with sticking phases. *preprint*, 2016. [hal-01305719].