

Réponses vibratoires non linéaires d'un assemblage avec des liaisons élastomères en présence d'incertitudes de modèle

T. Roncen^{1,2}, J.-J. Sinou², J.-P. Lambelin¹

¹ CEA/CESTA, {thomas.roncen, jean-pierre.lambelin}@cea.fr

² LTDS UMR 5513, Ecole Centrale de Lyon, jean-jacques.sinou@ec-lyon.fr

Résumé — L'assemblage métallique étudié comprend neuf plots viscoélastiques en élastomère. La réponse vibratoire est influencée par le comportement non linéaire des plots. Un modèle élément fini de l'assemblage complet ainsi qu'un modèle de non-linéarité empirique issu d'essais unitaires sur des plots viscoélastiques seuls sont proposés. La méthode de simulation utilisée se base sur une réduction de modèle et une résolution par la méthode d'équilibrage harmonique incrémentale. Dans un second temps, la réponse dynamique non linéaire en présence d'incertitudes est proposée par l'intermédiaire du Chaos Polynomial non intrusif. Des comparaisons essais-calculs à l'échelle du plot et de l'assemblage sont présentées.

Mots clés — Dynamique non linéaire, équilibrage harmonique, essais vibratoires, chaos polynomial

1. Introduction

La prédiction par le calcul de l'amortissement des structures assemblées est un enjeu majeur pour les industriels. L'étude des réponses vibratoires des structures industrielles se fait généralement par l'analyse modale qui ne prend pas en compte la dépendance de la réponse vis-à-vis du niveau d'excitation. Ce travail a pour objectif d'appliquer à un cas d'étude industriel une méthode de simulation vibratoire non linéaire et de montrer l'intérêt d'une caractérisation unitaire des plots viscoélastiques afin de prévoir la réponse de l'assemblage complet.

La maquette « Support Case Equipement » (SCE), présentée figure 1, a été conçue pour solliciter en traction-compression des plots en élastomère dont le comportement dépend de l'amplitude d'excitation. Il s'agit d'un lest central relié à un bâti par l'intermédiaire de neuf plots viscoélastiques. L'objectif de cette étude est de simuler le comportement dynamique non linéaire de cet assemblage et de statuer sur l'impact des plots élastomères sur la dynamique global du système.

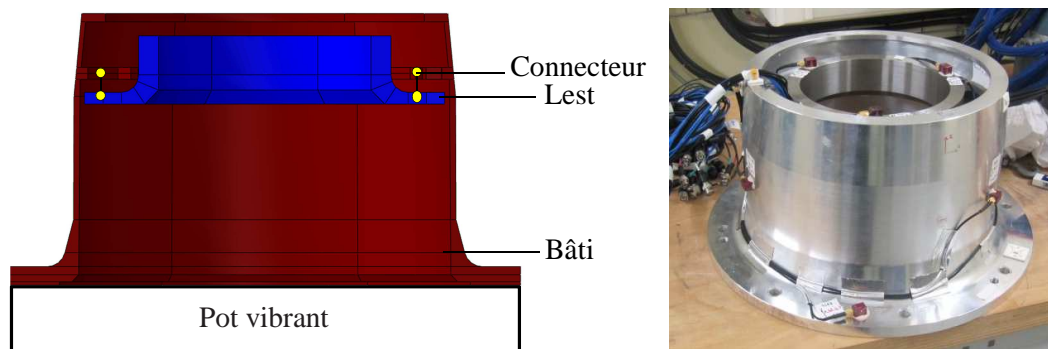


Figure 1 – Vue Abaqus et photographie de la maquette « Support Case Equipement ».

2. Méthode de Simulation

2.1. Modèle élément fini

Le modèle élément fini 3D de la maquette est composé d'éléments solides maillés en C3D8R pour un total de 48880 degrés de liberté. Les plots viscoélastiques sont modélisés par des connecteurs dont la raideur est recalée sur des essais à très bas niveaux effectués sur un plot seul. Ces essais sont représentatifs du comportement linéaire des amortisseurs viscoélastiques.

2.2. Réduction de modèle

Le modèle élément fini est réduit pour accélérer les calculs non linéaires. On utilise une méthode de sous structuration statique et dynamique proposée par le code ABAQUS [1] (très proche de la sous-structuration de Craig et Bampton). On considère le modèle complet comme une seule sous-structure dont on conserve les nœuds impliqués dans les liaisons viscoélastiques d'une part et ceux correspondant aux endroits où nous positionnerons nos accéléromètres expérimentalement afin de comparer essais et calculs d'autre part. Le modèle réduit possède 89 degrés de liberté.

2.3. Introduction du modèle de non-linéarité des plots viscoélastiques

La loi de viscoélasticité introduite est une loi empirique issue d'essais sur un plot viscoélastique unitaire. Le montage est un plot viscoélastique supportant une masselotte centrée sur le centre de gravité du plot. Cet assemblage est excité à sa base par un pot vibrant de 150Hz à 600Hz. 24 sinus balayés ont été réalisés à différents niveaux d'accélération et ont permis d'observer un décalage de la première fréquence de résonance ainsi qu'une diminution du facteur de qualité à la résonance. Sur la figure 2, on observe à gauche les fonctions de réponse fréquentielle pour des niveaux d'excitations en entrée allant de $1 m \cdot s^{-2}$ (courbe bleue) à $200 m \cdot s^{-2}$ (courbe rouge).

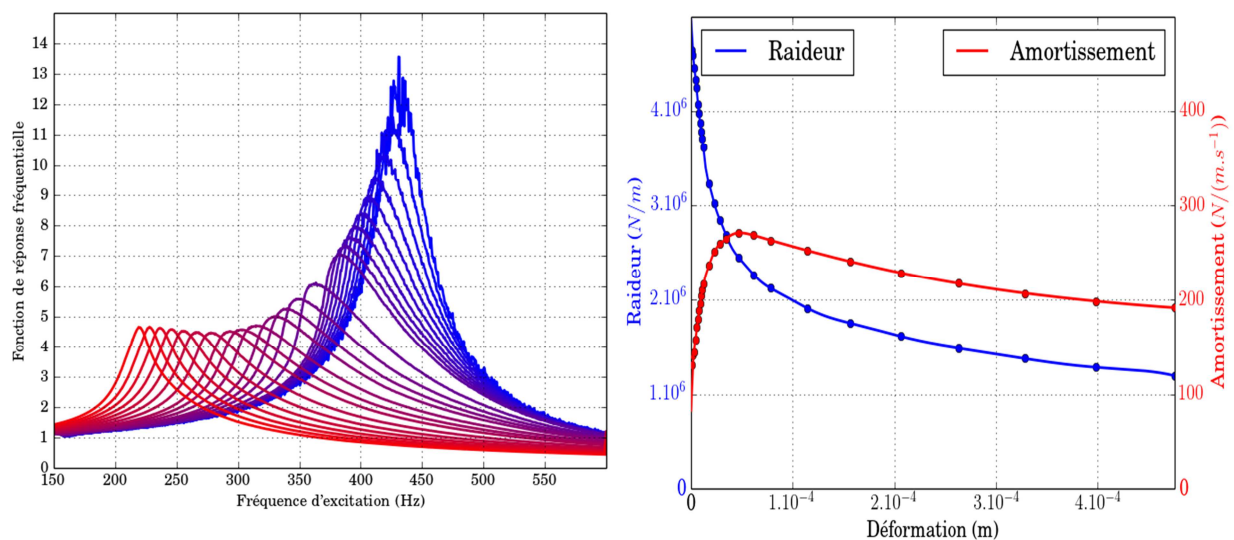


Figure 2 : courbes de réponses pour le plot unitaire (courbe bleue bas niveau, courbe rouge haut niveau), et extraction des raideurs et amortissements équivalents aux pics de résonance

A partir de ces résultats expérimentaux, on réalise une identification par niveau d'excitation d'un système linéaire à un degré de liberté : la récupération de la fréquence de résonance et du facteur de qualité permet de calculer la raideur et l'amortissement équivalent. On identifie ainsi un total de 24 systèmes linéaires à un degré de liberté. Chacun de ces modèles est valide uniquement pour la résonance ayant servi à son identification, c'est-à-dire pour une amplitude de déplacement du plot. Les raideurs et amortissements sont ainsi représentés en fonction du déplacement du plot sur la figure 2 à droite. On appelle respectivement $K_{nl}(\|U\|)$ et $D_{nl}(\|U\|)$ la raideur non linéaire et l'amortissement non linéaire formés par cette identification, et dépendants de $\|U\|$ l'amplitude de déplacement du plot.

La figure 3 montre une comparaison essais-calculs réalisée sur ce système unitaire pour 5 accélérations ($1 m.s^{-2}$, $5 m.s^{-2}$, $10 m.s^{-2}$, $40 m.s^{-2}$, $120 m.s^{-2}$) présentées respectivement en bleu, vert, rouge, noir et magenta. Ce modèle est ensuite intégré dans le modèle élément fini de la structure complète. L'équation dynamique non linéaire du modèle réduit s'écrit sous la forme particulière :

$$M.\ddot{U} + D.\dot{U} + K.U = F_{excit} \cdot \cos(\Omega t) + F_{nl}(\|U\|) \quad (1)$$

avec l'effort non linéaire :

$$F_{nl}(\|U\|) = K_{nl}(\|U\|).U + D_{nl}(\|U\|).U \quad (2)$$

où M , D et K définissent respectivement les matrices de masse, amortissement et raideur du système. Le modèle non linéaire s'applique sur une amplitude maximale de déplacement relatif $\|U\|$. On impose donc que la réponse $U(t)$ soit sinusoïdale.

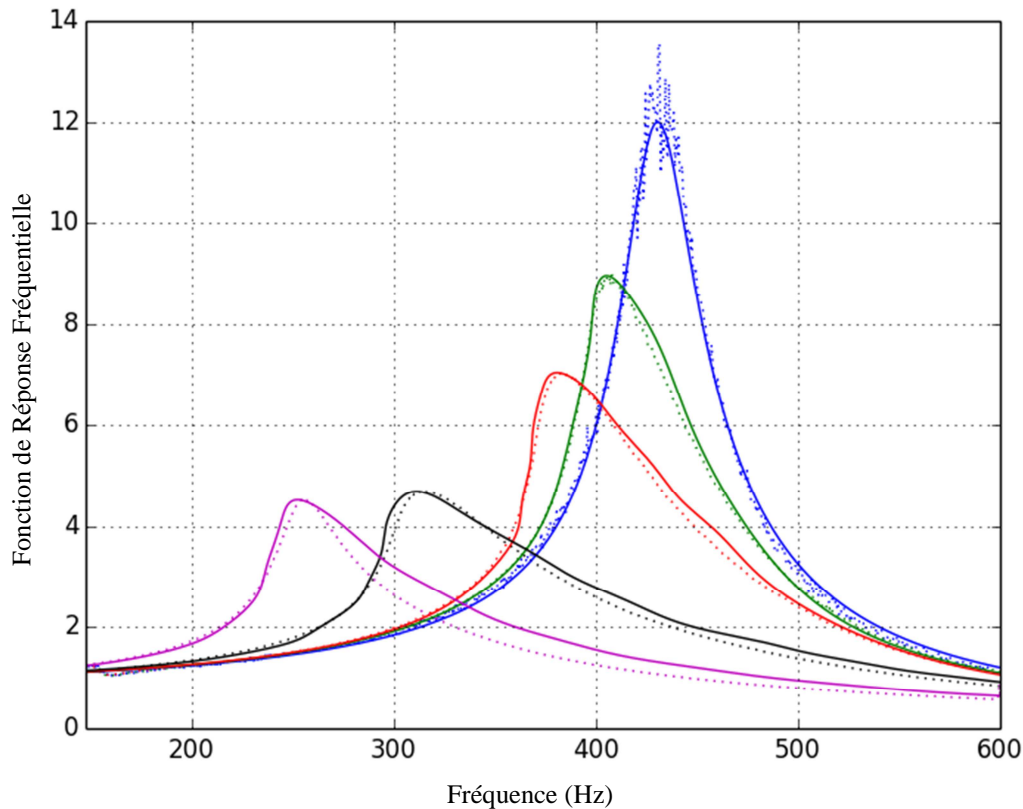


Figure 3 – Courbe de réponses fréquentielles mesurées (pointillés) et simulées (traits pleins) pour le plot seul.

2.4. Méthode d'équilibrage harmonique

Le problème non linéaire (1) est résolu par la méthode d'équilibrage harmonique [2]. Cette méthode consiste à rechercher une solution stationnaire du problème (1) sous la forme de séries de Fourier tronquées à un ordre N. Le modèle empirique n'étant valide que pour des réponses de type sinus, la série de Fourier est tronquée à l'ordre 1. Le problème non linéaire de dimension d est discrétisé selon l'équation (3) :

$$KB_0 = C_0 \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} K - \Omega^2 I_d & -k\Omega D \\ k\Omega D & K - \Omega^2 I_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ C_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ C_{k,excit} \end{bmatrix}, \quad \forall k \in [1, p] \quad (3)$$

Avec :

$$U(t) = B_0 + B_1 \cos(\Omega t) + A_1 \sin(\Omega t) \quad \text{et} \quad F_{nl}(\|U\|) = \begin{bmatrix} S_1 \\ C_1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Une équation algébrique non linéaire liant les coefficients de Fourier de la réponse U est ainsi obtenue et le problème revient à annuler une fonction du type :

$$H(U, \Omega) = A(\Omega)U - b(U) \quad (5)$$

Le vecteur b correspond ici aux coefficients de Fourier des efforts appliqués au système soit la somme des termes à droite de l'égalité dans l'équation (3). Ce vecteur dépend des coefficients de Fourier de la réponse U. A est une matrice dépendant uniquement des parties linéaires du modèle et de la fréquence d'excitation Ω .

Le problème (3) est résolu par méthode de Newton. Les coefficients de Fourier S_1 et C_1 associés à l'effort non linéaire sont calculés directement grâce au modèle empirique. De plus, pour réduire le temps de calcul, on applique une méthode de substitution [3] permettant de travailler sur un système dont la taille est proportionnelle au nombre de degrés de liberté non linéaires du système. Dans notre cas, cela permet de travailler sur un système de taille 9 contre un système de taille 89 initialement. Pour cela, on réorganise les degrés de liberté entre les p=80 degrés de liberté linéaires et les q=9 degrés de liberté non linéaires du système. On utilise une matrice de passage P vérifiant :

$$U = P \begin{bmatrix} U_p \\ U_q \end{bmatrix} \quad (6)$$

L'équation (5) est modifiée de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} H_p \\ H_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_q & A_{pq} \\ A_{qp} & A_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_p \\ U_q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_p \\ b_q \end{bmatrix} \quad (7)$$

où les vecteurs et matrices sont considérés dans la nouvelle base de calcul.

Cela permet de résoudre en premier lieu l'équation sur les q degrés de liberté non linéaires :

$$H_q(U_q) = (A_q - A_{qp}A_p^{-1}A_{pq})U_q - (b_q - A_{qp}A_p b_p) \quad (8)$$

Les p degrés de liberté linéaires peuvent ensuite être retrouvés via la relation :

$$U_p = A_p^{-1}(b_p - A_{qp}U_q) \quad (9)$$

2.5. Méthode de Continuation

Afin de pouvoir tracer la courbe de réponse fréquentielle sur la plage de fréquence considérée, une méthode de continuation est utilisée. Cette méthode est de type prédicteur-correcteur et utilise une prédiction de type tangente et un correcteur de type « Moore-Penrose » [4].

Lors d'une correction de « Moore-Penrose », la direction de recherche pour l'annulation de la fonction H varie à chaque itération afin de rester orthogonale au noyau de la matrice jacobienne de H appliquée à l'itération en cours. A chaque itération, on calcule la matrice pseudo-inverse de Moore-Penrose de la matrice jacobienne. Une matrice pseudo-inverse W^+ d'une matrice W se définit par $W^+ = {}^T W(W {}^T W)^{-1}$. A l'itération i , la correction s'écrit :

$$y_{n+1}^{(i)} = y_{n+1}^{(i-1)} + \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta \Omega \end{bmatrix} \text{ avec } \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta \Omega \end{bmatrix} = -J_y^+ H(y_{n+1}^{(i-1)}) H(y_{n+1}^{(i-1)}) \quad (10)$$

y_n est la solution calculée par la n -ième correction et sert d'initialisation pour la correction $n+1$. u est l'amplitude de la solution et Ω sa pulsation. Une représentation schématique de la méthode est présentée figure 4.

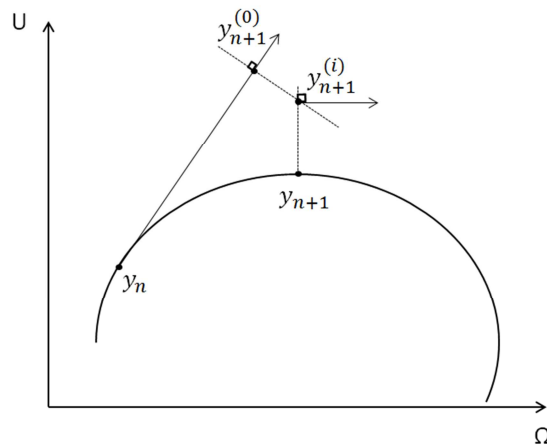


Figure 4 : Correcteur de Moore-Penrose

3. Réponse fréquentielle

Des expériences vibratoires en sinus balayé ont été réalisées avec l'amplitude de l'intensité du pot vibrant constante. L'excitation est modélisée par une force d'excitation d'amplitude constante dans la plage de fréquence considérée afin de réaliser un calcul équivalent à une expérience de sinus-balayé pilotée en intensité sur la masse mobile du pot vibrant. La figure 5 compare essais et calculs pour la réponse de la structure au sommet du lest. Les résultats d'essais pour 4 niveaux d'excitations d'entrée (200 N, 1900 N, 6500 N et 13000 N) sont présentés en pointillés respectivement bleus, verts, rouges et noirs tandis que les résultats de calcul sont en traits pleins. Le modèle non linéaire n'a pas été recalé pour fournir ces résultats. Le seul paramètre de recalage est l'amortissement linéaire de la maquette qui dépend à la fois de la maquette et du moyen d'essais. Le caractère non linéaire assouplissant du système complet est très clairement observé lorsque l'on augmente le niveau d'excitation. Une évolution très importante de l'amplitude de vibration maximale du système est également notée.

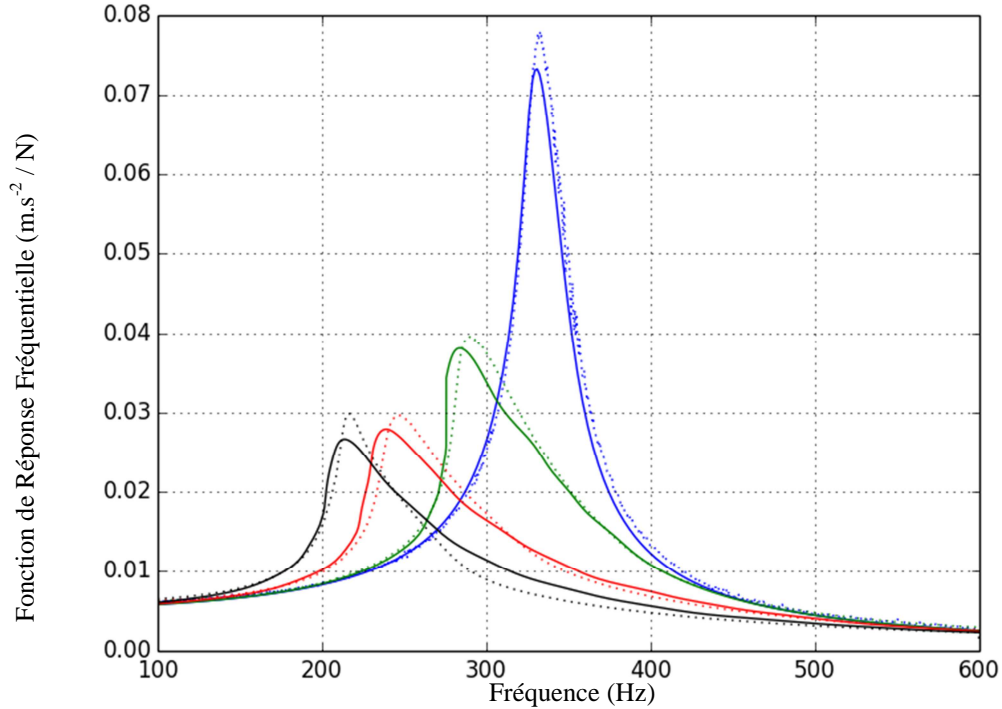


Figure 5 – Courbe de réponses fréquentielles mesurées (pointillés) et simulées (traits pleins) pour SCE.

4. Etude de propagation d'incertitude

L'analyse de la propagation d'incertitude permet de prendre en compte les variables incertaines $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ du problème et de générer une enveloppe de la réponse structurale. Dans un problème industriel, les variables incertaines sont nombreuses et nécessitent d'être quantifiées à travers une étude de sensibilité pour permettre de distinguer les plus influentes sur la réponse du système. Dans cette étude, nous supposons que la source principale d'incertitude provient du terme non linéaire $\vec{\xi} = \xi_1 = F_{nl}(\|U\|)$, dont la modélisation par amplitude présente des défauts croissants avec le niveau d'excitation. Cette incertitude est quantifiée par une loi aléatoire uniforme, et une approche par Chaos Polynomial non-intrusif [5] est mise en place.

La réponse en amplitude U est étudiée pour une pulsation donnée Ω et l'on procède à une séparation des variables entre les variables déterministes (ici Ω) et les variables incertaines (F_{nl}). On peut écrire :

$$U(\Omega, F_{nl}) = \sum_{i=0}^P U_i(\Omega) \Psi_i(F_{nl}) \quad (11)$$

où les $U_i(\Omega)$ sont les composantes déterministes de la solution et $\Psi_i(F_{nl})$ est la i ème fonction de la base d'incertitudes d'ordre P . La base de fonctions Ψ est la base des polynômes de Legendre dont l'utilisation est optimale lorsque la loi associée à l'incertitude est une loi uniforme [6]. La méthode employée est une méthode de régression linéaire sur les coefficients $U_i(\Omega)$ qui est un problème aux moindres-carrés de la forme :

$$\begin{bmatrix} \Psi_0(F_{n10}) & \Psi_1(F_{n10}) & \dots & \Psi_P(F_{n10}) \\ \Psi_0(F_{n11}) & \Psi_1(F_{n11}) & \dots & \Psi_P(F_{n11}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_0(F_{n1N}) & \Psi_1(F_{n1N}) & \dots & \Psi_P(F_{n1N}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0(\Omega) \\ U_1(\Omega) \\ \vdots \\ U_P(\Omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U(\Omega, F_{n10}) \\ U(\Omega, F_{n11}) \\ \vdots \\ U(\Omega, F_{n1N}) \end{bmatrix} \quad (12)$$

où l'on réalise N calculs déterministes (N>P) du problème en faisant varier pour chaque calcul l'incertitude de modèle F_{n1} . Une fois les calculs effectués, on peut déterminer la valeur des coefficients $U_i(\Omega)$ (10) puis remonter à la valeur $U(\Omega, F_{n1})$ en utilisant l'équation (11).

L'incertitude est quantifiée empiriquement pour chaque niveau d'excitation de façon à avoir par le calcul une enveloppe de la réponse expérimentale. Sur la figure 6, on montre une comparaison essais-calculs sur le système unitaire avec utilisation du Chaos Polynomial non-intrusif. On observe que les enveloppes obtenues par le calcul numérique encadrent la réponse expérimentale, ce qui valide la quantification d'incertitude. Les aires des enveloppes augmentent avec le niveau d'excitation ce qui traduit une augmentation de l'incertitude de modèle aux forts niveaux. L'analyse de propagation d'incertitudes sera ensuite utilisée pour la maquette SCE.

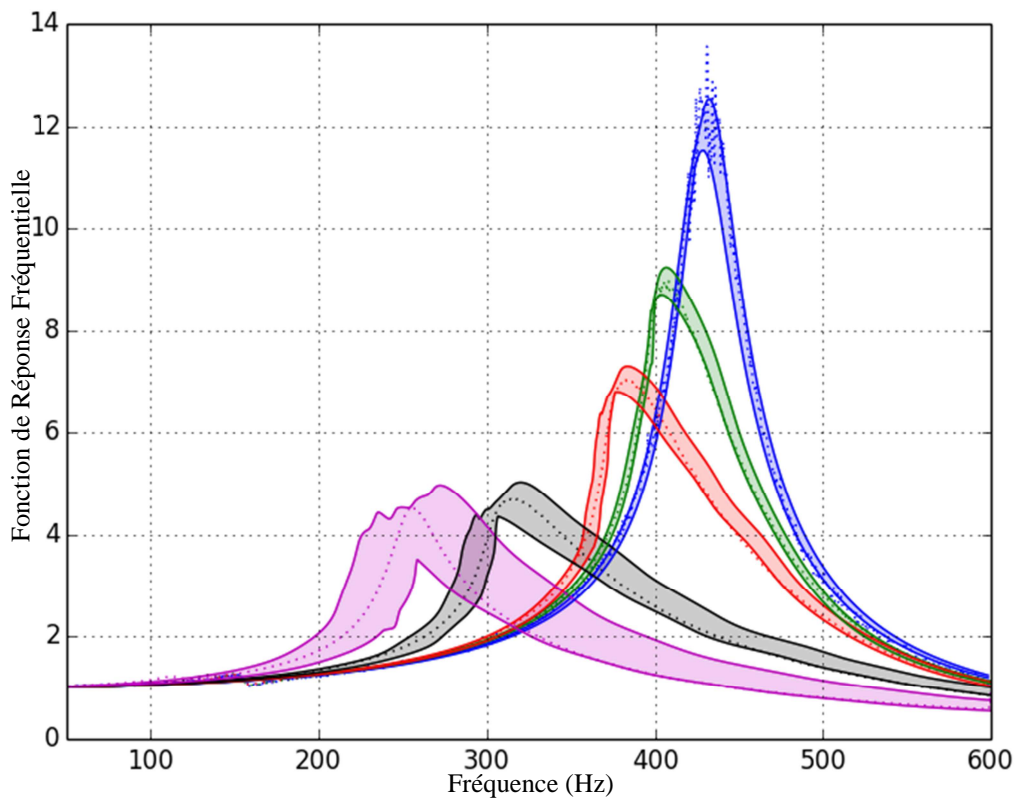


Figure 6 –Enveloppe des courbes de réponses fréquentielles simulées (trait plein) et réponses fréquentielles mesurées (pointillés) pour le plot seul.

5. Conclusion

Une méthode de simulation vibratoire non linéaire a été développée et appliquée à un cas industriel qui correspond à la maquette « Support Case Equipment ». Cette méthode est basée sur une réduction de modèle statique et dynamique, l'introduction d'une relation non linéaire empirique, la

méthode d'équilibrage harmonique, une méthode de substitution ainsi qu'une méthode de continuation. Une méthode de Chaos Polynomial non-intrusif a ensuite été mise en place pour prendre en compte les incertitudes de modèle et ainsi obtenir une enveloppe de la réponse expérimentale attendue. Le modèle empirique permet de retranscrire l'évolution de la réponse fréquentielle du plot seul pour différents niveaux d'excitation. Ce modèle unitaire a ensuite été intégré dans le calcul de la structure industrielle composée de plusieurs plots.

Le modèle non linéaire et la méthode de simulation proposés permettent de reproduire les phénomènes non linéaires vibratoires observés. De plus, il est montré que le recalage du modèle non linéaire du plot seul permet de calculer la réponse de la maquette « Support Case Equipement » sans recalage supplémentaire du modèle non linéaire.

Références

- [1] M.Kim, V.Belsky, M. Belyi, Substructure generation using automated multilevel substructuring, 2013, Patent US 2013/0124150A1 and EP 2597578A1.
- [2] E. Sarrouy and J.-J. Sinou, Non-linear periodic and quasi-periodic vibrations in mechanical systems – on the use of the harmonic balance methods. In Farzad Ebrahimi, editor, *Advances in Vibration Analysis Research*, Chapter 21. INTECH, Open Access Publisher, 2011.
- [3] J.-J. Sinou. Non-linear dynamics and contacts of an unbalanced flexible rotor supported on ball bearings , *Mechanism and Machine Theory*, Elsevier, 1713-1732, 2009.
- [4] R. Penrose, A generalized inverse for matrices, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* , 406-413, 1955.
- [5] S. Hosder, R. Perez, R.-W. Walters, A non-intrusive polynomial chaos method for uncertainty propagation in CFD simulations, *Faculty Research & Creative Works. Paper 2020*, 2006.
- [6] N. Wiener, The Homogeneous Chaos, *Amer. J. Math.*, Vol. 60, 1938, pp. 897-936