

Une nouvelle procédure de calcul de la matrice d'impédance d'interface pour les résolutions par décomposition de domaine mixte non linéaire en mécanique des structures

C. Negrello¹, P. Gosselet¹, C. Rey²

¹ LMT, CNRS, Université Paris Saclay, {camille.negrello,pierre.gosselet}@lmt.ens-paris-saclay.fr

² Safran Tech, christian.rey@safrangroup.com

Résumé — On s'intéresse à une stratégie de résolution des problèmes non linéaires de grande taille, mettant en jeu une combinaison de solveurs de Newton et de méthodes de Décomposition de Domaine. Au sein de ces dernières, on distingue différentes approches, selon le type de conditions d'interface utilisé. La version mixte présente l'avantage d'être paramétrée par une quantité communément dénommée *impédance d'interface*, et qui, judicieusement choisie, permet d'accélérer la résolution. Une nouvelle procédure peu coûteuse de calcul de ce paramètre est proposée ici dans le contexte non linéaire parallèle.

Mots clés — mécanique non linéaire ; décomposition de domaine ; conditions d'interface mixtes

1 Introduction

Le développement de techniques efficaces pour la résolution de systèmes non linéaires devient d'autant plus important actuellement que les phénomènes abordés dans le cadre du *virtual testing* sont de plus en plus complexes. Qu'elles soient géométriques ou qu'elles concernent les comportements des matériaux, les non linéarités peuvent être traitées numériquement grâce à l'emploi de solveurs de Newton, combinés à des solveurs linéaires. Les algorithmes de Newton peuvent entre autres être modifiés, sécants, de type quasi-Newton [1, 2, 3], suivant la complexité des opérateurs tangents à calculer.

Dans le cas de structures de grande taille, la résolution de problèmes à grand nombre d'inconnues implique souvent le choix de solveurs linéaires itératifs parallèles, de la catégorie des méthodes de Décomposition de Domaine (DD) par exemple [4, 5, 7, 6].

La méthode de sous-structuration et de condensation non linéaires (NLSC) en particulier, permet d'optimiser la parallélisation de la résolution non linéaire, en effectuant une relocalisation non linéaire au niveau des équilibres des sous-structures [10, 8]. Le caractère sous-structuré de cette formulation impose un choix de conditions de transmission au niveau des interfaces : on distingue ainsi les formulations primale, duale et mixte, suivant que les conditions choisies portent sur le déplacement, les efforts nodaux, ou une combinaison linéaire des deux premières – i.e. conditions de Robin.

L'efficacité de la méthode NLSC mixte a été démontrée dans diverses situations [9, 11, 8], en particulier grâce à un choix judicieux du paramètre introduit dans la combinaison linéaire des conditions d'interface, homogène à une rigidité, et communément dénommé *impédance d'interface*. La valeur optimale de cette impédance d'interface met en jeu, en règle générale, des quantités globales définies sur la structure entière, et n'est donc pas adaptée aux méthodes DD, basées sur la localisation en différents processeurs des informations, et la minimisation des communications entre eux.

Afin d'améliorer les taux de convergence théoriques sans dégrader les temps CPU de calcul effectifs, des stratégies d'approximation à moindre coût de la valeur optimale de l'impédance d'interface ont été mises en place dans divers contextes [12, 13, 14]. Cependant, ces méthodes d'approximation se concentrent en général soit sur des interactions locales, soit sur des interactions longue distance, mais les couplent rarement.

Une nouvelle procédure de calcul de l'impédance d'interface prenant en compte ces deux types d'interactions [17] est proposée ici ; son efficacité est évaluée à l'aide de cas test numériques.

2 Problème formel et notations

2.1 Problème non linéaire global

On considère ici une équation aux dérivées partielles non linéaire – modélisant un problème de thermique ou de mécanique quasi-statique – sur un domaine Ω , muni de conditions de Dirichlet sur une partie non vide de son bord $\partial\Omega_u \neq \emptyset$, et de conditions de Neumann sur le complémentaire $\partial\Omega_F = \partial\Omega \setminus \partial\Omega_u$. Après discrétisation du problème par la méthode des Elements Finis sur un maillage Ω_h , on peut écrire :

$$f_{int}(u) + f_{ext} = 0 \quad (1)$$

L'opérateur non linéaire du problème est noté f_{int} . Dans le cas de l'élasticité linéaire, pour un domaine de matrice de rigidité K sous l'hypothèse des petites perturbations, on aurait :

$$f_{int}(u) = -Ku$$

Le vecteur f_{ext} prend en compte les conditions aux limites (Dirichlet ou Neumann), ainsi que les forces ou sources volumiques. Sans perte de généralité et pour simplifier les notations, l'hypothèse de charges mortes est faite ici, i.e. f_{ext} indépendant de u .

2.2 Sous-structuration

Les notations classiques des méthodes DD sont utilisées ici. Le domaine global Ω est sous-structuré en N_s sous-domaines non-recouvrants $\Omega^{(s)}$. Pour chaque sous-domaine, un opérateur de trace $t^{(s)}$ opère la restriction des quantités locales $x^{(s)}$ définies sur une sous-structure $\Omega^{(s)}$ à des quantités de bord notées $x_b^{(s)}$, définies sur l'interface locale de la sous-structure $\Gamma^{(s)} \equiv \partial\Omega^{(s)} \setminus \partial\Omega$:

$$x_b^{(s)} \equiv t^{(s)} u^{(s)} = x_{|\Gamma^{(s)}}^{(s)}$$

Les quantités locales définies sur les noeuds internes (appartenant à $\Omega^{(s)} \setminus \Gamma^{(s)}$), quant à elles, sont indicées $x_i^{(s)}$.

L'interface globale primale – resp. duale – sera notée Γ_A – resp. Γ_B – voir [8] pour une description étendue.

Les opérateurs d'assemblage primal $A^{(s)}$ sont définis comme le prolongement canonique de $\Gamma^{(s)}$ dans $\Gamma_A : A^{(s)}$ est une matrice booléenne de rang plein et de taille $n_A \times n_A$, où n_A est le nombre de degrés de liberté de l'interface globale primale Γ_A .

Toute matrice $B^{(s)}$ satisfaisant à la relation $\text{Range}(B^{(s)}) = \text{Ker}(A^{(s)})$ peut être utilisée en guise d'opérateur dual.

3 Sous-structuration non linéaire et condensation mixte

3.1 Formulation

Le principe de la sous-structuration et condensation non linéaires est détaillé dans [10, 8]. Le problème non linéaire (1) est sous-structuré en N_s sous-problèmes :

$$f_{int}^{(s)}(u^{(s)}) + f_{ext}^{(s)} + t^{(s)T} \lambda_b^{(s)} = 0^{(s)}, \quad \forall s \in \{1, \dots, N_s\} \quad (2)$$

où $\lambda_b^{(s)}$ est une réaction définie aux noeuds de l'interface, et introduite pour représenter les interactions du sous-domaine $\Omega^{(s)}$ avec le reste de la structure.

Les conditions de transmissions aux interfaces peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} \sum_s B^{(s)} u_b^{(s)} = 0 \\ \sum_s A^{(s)} \lambda_b^{(s)} = 0 \end{cases}$$

La formulation mixte consiste à introduire une nouvelle inconnue d'interface :

$$\mu_b^{(s)} = \lambda_b^{(s)} + Q_b^{(s)} u_b^{(s)}$$

où $Q_b^{(s)}$ est un paramètre de la méthode, homogène à une rigidité. La matrice $Q_b^{(s)}$ doit vérifier des propriétés de symétrie, définition et positivité, et peut être interprétée comme une impédance ajoutée à l'interface locale, par sous-domaine.

Les équilibres locaux (2) peuvent être reformulés avec la nouvelle inconnue d'interface $\mu_b^{(s)}$:

$$f_{int}^{(s)}(u^{(s)}) + f_{ext}^{(s)} + t^{(s)T} \left(\mu_b^{(s)} - Q_b^{(s)} u_b^{(s)} \right) = 0 \quad \forall s \in \{1, \dots, N_s\} \quad (3)$$

et on fait l'hypothèse, vérifiée au moins localement [15], de la possibilité de définir un analogue mixte non linéaire $H_{nl}^{(s)}$ du complément de Schur classique :

$$u_b^{(s)} = H_{nl}^{(s)} \left(\mu_b^{(s)}; Q_b^{(s)}, f_{ext}^{(s)} \right)$$

Les conditions de transmission peuvent être réécrites en fonction des inconnues $\mu_b^{(s)}$ et $u_b^{(s)}$, et regroupées en une unique équation :

$$A^{(s)T} \left(\sum_s A^{(s)} Q_b^{(s)} A^{(s)T} \right)^{-1} \sum_s A^{(s)} \mu_b^{(s)} - u_b^{(s)} = 0 \quad \forall s \in \{1, \dots, N_s\}$$

Finalement, le problème non linéaire condensé sur l'interface devient :

$$R_b^{(s)} \equiv A^{(s)T} \left(\sum_s A^{(s)} Q_b^{(s)} A^{(s)T} \right)^{-1} \sum_s A^{(s)} \mu_b^{(s)} - H_{nl}^{(s)} \left(\mu_b^{(s)}; Q_b^{(s)}, f_{ext}^{(s)} \right) = 0 \quad (4)$$

Le résidu non linéaire d'interface $R_b^{(s)}$ est ainsi calculé à partir des résolutions non linéaires locales (3).

3.2 Stratégie de résolution

3.2.1 Algorithme Newton-Krylov

La méthode de sous-structuration et condensation non linéaires consiste à résoudre le problème d'interface (4) au lieu du problème global (1). Trois étapes sont impliquées dans le processus de résolution :

- Les solutions locales des équilibres non linéaires (3) sont déterminées grâce à des algorithmes de Newton locaux, en parallèle sur différents processeurs, et assemblées pour construire le résidu d'interface non linéaire $R_b^{(s)}$.
- Un algorithme global de Newton est appliqué au problème (4), produisant ainsi un problème tangent linéarisé de grande taille, dont la structure est celle d'un problème DD linéaire.
- Un solveur de Krylov préconditionné est utilisé pour résoudre le problème tangent associé

L'algorithme de Newton global, avec les notations précédentes, peut être formalisé par (5) :

$$\begin{cases} \frac{\partial R_b^{(s)}}{\partial \mu_b^{(s)}} d\mu_b^{(s)} + R_b^{(s)} = 0 \\ \mu_b^{(s)} + = d\mu_b^{(s)} \end{cases} \quad (5)$$

Le problème tangent associé devient :

$$\forall s \in \{1, \dots, N_s\}, \quad \left(A^{(s)T} \left(\sum_s A^{(s)} Q_b^{(s)} A^{(s)T} \right)^{-1} \sum_s A^{(s)} - H_t^{(s)} \right) d\mu_b^{(s)} = -R_b^{(s)} \quad (6)$$

3.2.2 Seconde formulation

La formulation (6) du problème tangent d'interface s'apparente à la méthode FETI2LM [16]. On dispose également d'une formulation équivalente du problème (4) : en effet, l'inconnue d'interface $\mu_b^{(s)}$ peut être mise en bijection avec un couple d'inconnues (F_B, v_A) , où F_B est une réaction nodale d'interface auto-équilibrée, et v_A un déplacement d'interface continu, ces deux grandeurs satisfaisant à la relation :

$$\mu_b^{(s)} = B^{(s)T} F_B + Q_b^{(s)} A^{(s)T} v_A \quad \forall s \in \{1, \dots, N_s\}$$

Le problème tangent (6) devient alors, en fonction des inconnues F_B et v_A :

$$\sum_s A^{(s)} S_t^{(s)} A^{(s)T} d v_A = \sum_s A^{(s)} \left(Q_b^{(s)} + S_t^{(s)} \right) b_m^{(s)} \quad (7)$$

où $S_t^{(s)}$ est l'opérateur tangent de Schur primal, et le vecteur $b_m^{(s)}$ vaut :

$$b_m^{(s)} = H_{nl}^{(s)} \left(\mu_b^{(s)}; Q_b^{(s)}, f_{ext}^{(s)} \right) - A^{(s)T} v_A \quad \forall s \in \{1, \dots, N_s\}$$

On reconnaît dans l'équation (7) la forme exacte d'un problème de type BDD. Il peut ainsi être résolu par les solveurs dédiés.

4 Choix de l'impédance d'interface

4.1 Choix optimal en linéaire

Dans le cadre d'une résolution linéaire par méthode DD avec conditions d'interface mixtes, une valeur optimale du paramètre $Q_b^{(s)}$ existe et est simple à exprimer. En effet, les équilibres locaux (2) deviennent, pour des problèmes linéaires, pour toute structure $\Omega^{(s)}$:

$$u_b^{(s)} = H_l^{(s)} \left(\mu_b^{(s)}; Q_b^{(s)}, f_{ext}^{(s)} \right) = t^{(s)} \left(K^{(s)} + t^{(s)T} Q_b^{(s)} t^{(s)} \right)^{-1} t^{(s)T} \mu_b^{(s)} + b_m^{(s)}$$

Il est évident dans ce cas que pour une sous-structure $\Omega^{(j)}$ donnée, définir la matrice $Q_b^{(j)}$ comme le complément de Schur du complémentaire $\Omega^{(\bar{j})}$ de $\Omega^{(j)}$ dans Ω , condensé sur l'interface $\Gamma^{(j)}$, permet de transformer l'équilibre local sur $\Omega^{(j)}$ en équilibre global sur Ω , avec pour conditions aux limites les conditions sur $\Gamma^{(j)}$. La résolution linéaire converge alors en autant d'itérations que nécessaire pour la propagation du second membre à travers la structure entière : par exemple pour deux sous-domaines, on a convergence en au plus deux itérations.

$$\begin{cases} Q_{b,S}^{(j)} & \equiv S_l^{(\bar{j})} \\ & = K_{bb}^{(\bar{j})} - K_{bi}^{(\bar{j})} K_{ii}^{(\bar{j})^{-1}} K_{ib}^{(\bar{j})} \end{cases} \quad (8)$$

Le calcul de $Q_{b,S}^{(j)}$ définie en (8) est bien entendu proscrit dans le cadre des méthodes de résolution parallèles, car il nécessite la donnée et la manipulation de grandeurs matricielles globales. Toutefois, différentes stratégies d'approximation ont été développées, et sont aujourd'hui utilisées, dans le contexte linéaire mais également dans le cadre des méthodes avec condensation et sous-structuration non linéaires.

4.2 Approximations courte distance et longue distance

De façon simple, on peut assigner à la matrice d'impédance d'interface d'une sous-structure $\Omega^{(j)}$ la valeur de la rigidité d'interface des sous-domaines voisins de $\Omega^{(j)}$:

$$K_{bb}^{neigh(j)} \equiv A^{(j)T} \sum_{s \in neigh(j)} A^{(s)} K_{bb}^{(s)} A^{(s)T} A^{(j)} \quad (9)$$

où les sous-structures d'exposant $s \in neigh(j)$ sont celles qui possèdent au moins un noeud en commun avec la sous-structure $\Omega^{(j)}$, et la matrice $K_t^{(s)}$ correspond à l'opérateur de rigidité tangent du sous-domaine $\Omega^{(s)}$.

L'expression (9) est utilisée de façon classique pour les méthodes NLSC avec conditions d'interface mixtes [9, 10, 11, 8] : en effet, la structure creuse bloc-diagonale des termes $K_{tbb}^{(s)}$ rend leur assemblage entre voisins peu coûteux. De plus, cette expression ne requiert pas de calcul additionnel, puisque les matrices locales tangentes $K_t^{(s)}$ sont calculées à chaque itération de Newton locale.

Cependant, l'information apportée par la grandeur $K_{bb}^{neigh(j)}$ sur la réponse de la structure à l'excitation imposée sur $\Gamma^{(j)}$ reste très locale, et est incapable de rendre compte de domaines de formes complexes ou inhomogènes par exemple.

De plus, l'estimation réalisée dans l'expression (9) de la rigidité du complémentaire $\Omega^{(\bar{j})}$ est sur-évaluée, et dans certains cas, notamment celui des structures élancées, insuffisante pour exploiter les performances offertes par l'approche mixte.

On se heurte à ces limites pour tous les types d'approximation dites de *courte distance* de la matrice d'impédance d'interface.

Dans divers contextes, la littérature fournit d'autres types d'approximation, dites *longue distance*, principalement basées sur des techniques d'homogénéisation multi-échelle [13, 14]. Dans ce contexte, le complément de Schur est approximé par projection sur une base macroscopique de dimension faible Π :

$$Q_{b,L}^{(j)} \equiv \Pi S_t^{(\bar{j})} \Pi^T$$

Typiquement, cet espace macroscopique comprend les modes rigides d'interface, et parfois d'autres champs, de type affine, tels que les déformations de traction et de cisaillement unitaires. L'intérêt de ces approximations réside dans l'introduction, dans les équilibres locaux de chaque sous-structure, d'information sur ses interactions avec le reste de la structure, même lointaine. Leur faible coût de calcul est également un avantage : elles ne nécessitent que quelques résolutions locales et assemblages. Cependant, elles pêchent par leur manque d'information locale [12] : en effet, la projection du complément de Schur dans une base macroscopique de dimension faible ne permet pas de rendre compte avec assez de précision des interactions d'une sous-structure avec son environnement proche, pourtant souvent prédominantes en termes d'impact mécanique sur l'évolution d'un sous-domaine donné.

Ainsi, les méthodes *courte distance* ou *longue distance* seules ne suffisent pas toujours à obtenir des performances satisfaisantes : les meilleures approximations possibles de l'impédance d'interface feraient a priori intervenir une combinaison des deux types de méthodes sus-mentionnés, prenant en compte à la fois les interactions *courte* et *longue distance*. Les premiers travaux de [12] notamment, ont permis d'introduire une version couplée d'approximation, dans le cadre des méthodes globales/locales de résolution.

Une nouvelle méthode sera proposée lors de la conférence, mettant en jeu les phénomènes d'interactions à courte et longue distance à la fois, et particulièrement adaptée au calcul non linéaire parallèle. Son efficacité sera évaluée sur différents cas test.

L'expression associée de l'impédance d'interface sera notée, dans la suite de ce document, $Q_{b,G}^{(j)}$.

5 Résultats

5.1 Analyse spectrale

Les conclusions d'une analyse spectrale des différentes approximations de la matrice d'impédance d'interface $S_t^{(\bar{j})}$, $K_{bb}^{neigh(j)}$ et $Q_{b,G}^{(j)}$ sont représentées sur la figure 2 pour le sous-domaine SD8 du cas test de la figure 1. Une poutre bi-matériaux y est sollicitée en flexion par déplacement imposé incrémental sur le bord défini par $x = W$:

$$u_D = [0.1, 0.15, 0.2, 0.22, 0.3, 0.35, 0.4] u_{max}$$

$$u_{max} = -1$$

La sous-structuration définit 30 sous-domaines rectangulaires, chacun d'entre eux étant associé à un matériau. Les caractéristiques géométriques et matériau de la poutre sont renseignées dans le tableau 1.

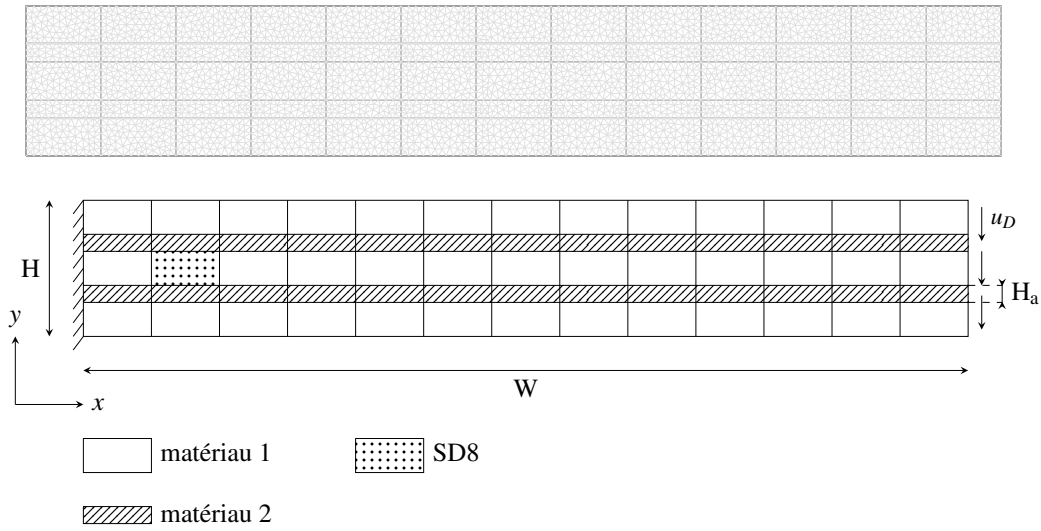


FIGURE 1 – Poutre bi-matériaux : maillage et chargement

Paramètres matériaux		
	Matériau 1	Matériau 2
Module d'Young	$E_1 = 210e6$	$E_2 = 100e6$
Limite élastique	$\sigma_{0_1} = 420e3$	$\sigma_{0_2} = 200e3$
Coefficient d'écroutissage linéaire	$h_1 = 1e3$	$h_2 = 1e3$
Paramètres géométriques		
Longueur	$W = 13$	
Hauteur	$H = 2$	
Hauteur d'une armature	$H_a = 0.25$	
Longueur caractéristique du maillage	$l_e = 0.1$	

TABLE 1 – Paramètres matériau et géométriques

L'expression $Q_b^{(j)} = K_{bb}^{neigh(j)}$ correspond à la courbe K de la figure 2, l'expression $S_t^{(\bar{j})}$ à la courbe S , et la nouvelle expression implémentée $Q_{b,G}^{(j)}$ correspond à la courbe G . Les spectres sont déterminés au dernier incrément de chargement, soit $u_D = 0.4u_{max}$.

On peut remarquer que la courbe associée à la nouvelle expression $Q_{b,G}^{(j)}$ se rapproche fortement, voire est inférieure pour certaines parties du spectre, à celle de l'expression $S_t^{(\bar{j})}$ – optimale en linéaire. Bien que cette dernière ne soit pas nécessairement optimale pour les problèmes mécaniques non linéaires, on peut affirmer que pour des niveaux de plasticité cumulée raisonnables, elle s'en approche.

L'expression $K_{bb}^{neigh(j)}$, quant à elle, semble comme attendu bien trop rigide comparée à l'expression $S_t^{(\bar{j})}$. Les conclusions préliminaires de cette étude, à confirmer par une étude en nombre d'itérations à convergence, tendent à montrer que l'expression $Q_{b,G}^{(j)}$ permet de simuler de façon relativement correcte l'environnement de la sous-structure $\Omega^{(8)}$.

5.2 Nombres d'itérations

Les résultats, en termes d'itérations cumulées, et pour différentes méthodes de résolution, sont renseignés dans le tableau 2. Les itérations du solveur de Krylov sont directement proportionnelles au nombre de communications de l'algorithme – que l'on cherche à minimiser – tandis que les itérations globales sont liées au nombre de calculs des opérateurs tangents : on s'intéressera donc ici à ces deux types d'ité-

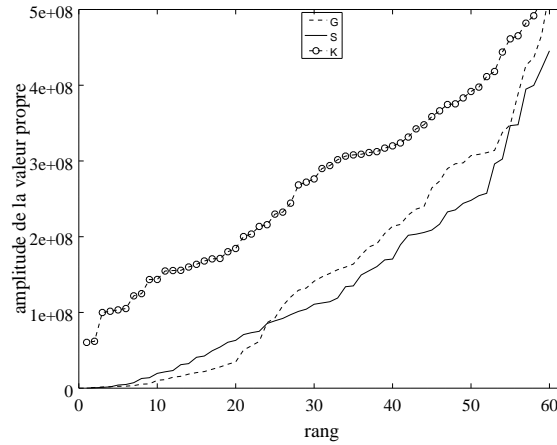


FIGURE 2 – Spectres pour différentes expressions de $Q_b^{(s)}$, au dernier incrément de chargement, pour le SD8 de la poutre bi-matériaux

rations. Sont comparées dans le tableau 2 la méthode dite *classique*, de type NKS, dont la relocalisation est seulement linéaire, ainsi que les méthodes NLSC primale [8] et mixte. Les trois expressions précédemment évoquées $S_t^{(j)}$, $Q_{b,G}^{(j)}$ et $K_{bb}^{neigh(j)}$ sont également étudiées.

increment	Itérations de Krylov cumulées							Itérations globales cumulées
	0.1	0.15	0.2	0.22	0.3	0.35	0.4	
classique	23	95	197	304	468	644	828	27
primal NLSC	23	119	222	330	498	677	866	28
mixte NLSC ^a	23	95	198	278	446	587	775	25
mixte NLSC ^b	23	95	198	278	409	550	697	23
mixte NLSC ^c	23	95	201	311	447	591	782	25

Gains : méthodes NLSC versus méthode classique (%)								
primal/classique	0	-25.3	-12.7	-8.6	-6.4	-5.1	-4.6	-3.7
mixte ^a /classique	0	0	-0.5	8.6	4.7	8.9	6.4	7.4
mixte ^b /classique	0	0	-0.5	8.6	12.6	14.6	15.8	14.8
mixte ^c /classique	0	0	-2.0	-2.3	4.5	8.2	5.6	7.4

Gains : méthode NLSC mixte ^b versus méthodes NLSC mixtes ^{a c} (%)								
mixte ^b /mixte ^a	0	0	0	0	8.3	6.3	10.1	8.0
mixte ^b /mixte ^c	0	0	1.5	10.6	8.5	6.9	10.9	8.0

- a. Impédance d'interface $K_{bb}^{neigh(j)}$
- b. Impédance d'interface $Q_{b,G}^{(j)}$
- c. Impédance d'interface $S_t^{(j)}$

TABLE 2 – Résultats pour la poutre bi-matériaux et différentes approches : itérations cumulées du solveur de Krylov

On peut remarquer que sur ce cas précis, la méthode NLSC primale n'apporte pas d'amélioration, par comparaison avec la méthode classique. En effet, étant donnée l'hétérogénéité du matériau, de l'information additionnelle sur le reste de la structure dans les équilibres locaux est nécessaire pour obtenir de bonnes initialisations des conditions d'interface, et ne pas dégrader la convergence.

La méthode NLSC mixte, couplée à la version $Q_b^{(j)} = K_{bb}^{neigh(j)}$ de l'impédance d'interface, permet d'at-

teindre par comparaison à la méthode classique des gains de 8 ou 9% pour le solveur DD au cours de la résolution, et de 7.4% pour le solveur de Newton global au terme de la résolution – gains comparables ici à ceux obtenus avec la version $Q_b^{(j)} = S_t^{(\bar{j})}$ de l'impédance d'interface.

La méthode mixte couplée à la nouvelle expression de l'impédance d'interface $Q_{b,G}^{(j)}$ permet en revanche d'atteindre environ 15 à 16% de gains au cours de la résolution pour les deux types de solveurs, comparée à la méthode classique, ce qui double quasiment les gains des deux autres versions – $K_{bb}^{neigh(j)}$ et $S_t^{(\bar{j})}$.

6 Conclusion

Une nouvelle méthode d'évaluation de l'impédance d'interface a été développée, couplant des interactions *courte distance* et *longue distance*. Elle a permis, sur des problèmes mécaniques non linéaires, de mieux représenter l'environnement de chaque sous-structure, et ainsi d'améliorer les performances de la méthode mixte avec sous-structuration et condensation non linéaires.

Références

- [1] MA. Crisfield *A faster modified Newton-Raphson iteration*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, 267-278, 1979
- [2] Jr. Dennis, E. John, J. John *Quasi-Newton methods, motivation and theory*, SIAM review, SIAM, 46-89, 1977
- [3] L. Zhang, D. R. J. Owen *A modified secant Newton method for non-linear problems*, Computers & Structures, 543-547, 1982
- [4] J. Mandel *Balancing domain decomposition*, Communications in numerical methods in engineering, Wiley Online Library, 233-241, 1993
- [5] P. Le Tallec *Domain decomposition methods in computational mechanics*, Computational mechanics advances, Elsevier, 121-220, 1994
- [6] P. Gosselet, C. Rey *Non-overlapping domain decomposition methods in structural mechanics*, Archives of computational methods in engineering, Springer, 515-572, 2006
- [7] D. Rixen, C. Farhat *A simple and efficient extension of a class of substructure based preconditioners to heterogeneous structural mechanics problems*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 489-516, 1999
- [8] C. Negrello, P. Gosselet, C. Rey, J. Pebrel *Substructured formulations of nonlinear structure problems – influence of the interface condition*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Wiley Online Library, 2016
- [9] J. Pebrel, C. Rey, P. Gosselet *A nonlinear dual-domain decomposition method : Application to structural problems with damage*, International Journal for Multiscale Computational Engineering, 2008
- [10] P. Cresta, O. Allix, C. Rey, S. Guinard *Nonlinear localization strategies for domain decomposition methods : Applications to post-buckling analyses*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, 1436-1446, 2007
- [11] J. Hinojosa, O. Allix, P.A. Guidault, P. Cresta *Domain decomposition methods with nonlinear localization for the buckling and post-buckling analyses of large structures*, Advances in Engineering Software, Elsevier, 13-24, 2014
- [12] L. Gendre, O. Allix, P. Gosselet *A two-scale approximation of the Schur complement and its use for non-intrusive coupling*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Wiley Online Library, 889-905, 2011
- [13] P. Ladevèze, D. Dureisseix *A micro/macro approach for parallel computing of heterogeneous structures*, International Journal for Computation Civil and Structural Engineering, 18-28, 2000
- [14] P.A. Guidault, O. Allix, L. Champany, J.P. Navarro *A two-scale approach with homogenization for the computation of cracked structures*, Computers & Structures, Elsevier, 1360-1371, 2007
- [15] P. Ciarlet *Linear and nonlinear functional analysis with applications*, Siam, 2013
- [16] F.X. Roux *A FETI-2LM method for non-matching grids*, Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XVIII., Springer Berlin Heidelberg, 121-128, 2009
- [17] C. Negrello, P. Gosselet, C. Rey *Mixed boundary conditions in substructured formulations of nonlinear structure problems – evaluation of the interface impedance*, en cours de rédaction, 2017