

User Element dédié au modèle de mètre ruban 1D à section flexible: implémentation et comparaison avec des éléments de coques.

M. Martin^{1,2}, S. Bourgeois¹, B. Cochelin¹, J. Ducarne², F. Guinot²

¹ LMA, Centrale Marseille, CNRS, UPR 7051, Aix-Marseille Univ, F-13451 Marseille, France
Martin@lma.cnrs-mrs.fr; {Stephane.Bourgeois, Bruno.Cochelin}@centrale-marseille.fr

² Thales Alenia Space, Cannes, France, {Julien.Ducarne, Francois.Guinot}@thalesaleniaspace.com

Résumé — Des modèles de poutres à section flexible utilisés pour caractériser le comportement de mètres rubans sous sollicitations mécaniques ont été développés précédemment ([4],[8],[9]). Un enrichissement de ces modèles est proposé ici menant à des résultats numériques très proches de ceux obtenus avec des modèles de coques qui sont généralement choisis comme référence. Un élément fini spécifiquement dédié au modèle de poutre à section flexible enrichi est développé et implémenté dans un code commercial afin qu'il soit utilisé dans le cadre de l'analyse de structures.

Mots clés — mètres rubans, poutre à section flexible, éléments finis

1 Introduction

L'augmentation du nombre de structures spatiales déployables à base de mètres ruban ([3],[7]) a nécessité le développement de modèles permettant de comprendre le comportement original de ces structures. Les modèles de coques sont bien adaptés à la modélisation du comportement des rubans car ces derniers présentent des profils très élancés. Ces modèles sont généralement résolus numériquement à l'aide de code de calcul par éléments finis donnant des résultats très précis [11]. Mais à cause du comportement fortement non linéaire du ruban, le pilotage des simulations numériques est complexe et rend difficile l'obtention de résultats.

Pour palier ce problème, un modèle de poutre à section flexible a été développé pour rendre compte du comportement des rubans. Une première version uniquement dédiée au comportement du ruban restreint à son plan de symétrie longitudinal a été développée par Guinot *et al.* [4]. Ce modèle a ensuite été amélioré et étendu aux mouvements 3D du ruban comme la torsion ou la flexion transverse. Pour cela Picault *et al.* ([8],[9]) y ont introduit un paramètre de gauchissement de torsion.

Ces deux versions du modèle ont été implémentées dans le code de calcul Comsol [1], permettant de démontrer leur capacité à reproduire les comportements complexes du ruban. Cependant, l'utilisation de ce code ne permet pas d'utiliser des méthodes de continuation pour le suivi de branches de bifurcation. Marone-Hitz s'est penchée sur l'implémentation numérique du modèle dans le logiciel de continuation DiaManLab permettant de tracer les diagrammes de bifurcation très complexes du comportement de ruban [5]. Des problèmes numériques liés au comportement local du ruban ont été étudiés grâce à cet outil et une explication de ces instabilités numériques a récemment été proposée par Martin *et al.* [6]. Dans l'optique d'utiliser ces modèles pour le dimensionnement de structures spatiales, le choix d'une implémentation dans un code de calcul déjà utilisé dans ce cadre présente de nombreux avantages : possibilité de faire des structures complexes, utilisation des solveurs déjà paramétrés. On s'est donc orienté vers l'implémentation d'un nouvel élément dédié à ces modèles dans Abaqus via la subroutine UEL (User Element [2]) qui est adaptée.

Dans la première partie de ce papier, les différentes hypothèses menant à la création du modèle de poutre à section flexible utilisées et les dernières améliorations apportées sont présentées. Le modèle est ensuite discrétisé et implémenté via la subroutine UEL disponible dans Abaqus, puis il est comparé aux éléments de coques déjà présents dans Abaqus sur des essais de flexion dans le plan.

2 Modèle de poutre à section flexible

Les grandes étapes de la création du modèle de poutre à section sont rappelées ici, pour un historique complet, le lecteur est invité à lire les articles de Guinot *et al.* [4] et de Picault *et al.* ([8],[9]).

2.1 Cinématique du modèle

Le ruban peut être assimilé dans sa configuration initiale à une poutre de section mince semi-circulaire. La ligne moyenne de cette poutre est dirigée selon le vecteur e_1 et passe par le barycentre de chacune des sections du ruban, O étant le barycentre d'une des extrémités (voir Figure 1). Le vecteur e_3 est défini tel que le plan (O, e_1, e_3) soit le plan de symétrie longitudinal du ruban et le vecteur e_2 est tel que (e_1, e_2, e_3) soit un repère orthonormé direct. La coque est paramétrée par deux abscisses curvilignes s_1 et s_2 , le long de la ligne moyenne et le long de la courbe section.

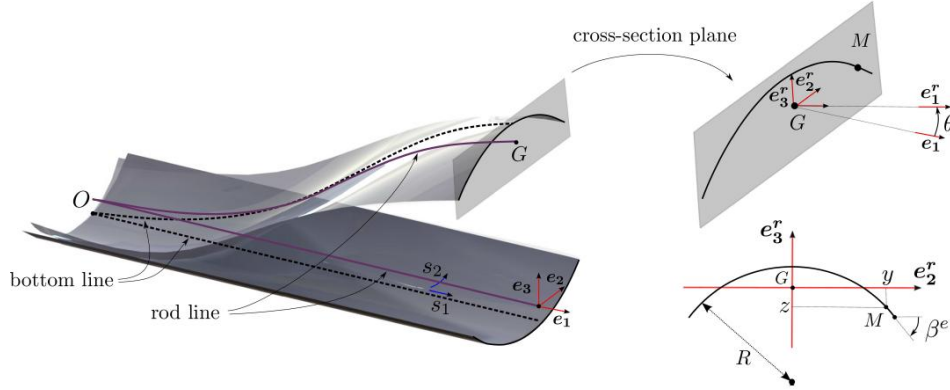


FIGURE 1 – Cinématique du ruban ([4])

On part d'un modèle de coque qu'on réduit en faisant les trois hypothèses suivantes :

1. La courbe section reste contenue dans le plan orthogonal à la ligne moyenne,
2. La courbe section est inextensible et conserve sa forme semi-circulaire,
3. La ligne moyenne reste dans le plan (O, e_1, e_3) .

Soit M un point de la surface moyenne, sa position est donnée par le vecteur OM défini ci après :

$$OM(s_1, s_2) = OG(s_1) + GM(s_1, s_2) \quad (1)$$

où G est le barycentre de la section à laquelle appartient M . On ne s'intéresse qu'aux mouvements plans pour lesquels le ruban reste symétrique par rapport au plan (O, e_1, e_3) .

$$\begin{cases} OG &= (s_1 + u_1(s_1))e_1 + u_3(s_1)e_3 \\ GM &= y(s_1, s_2)e_2 + z(s_1, s_2)e_3^r(s_1) \\ y(s_1, s_2) &= \frac{a}{\beta^e(s_1)} \sin\left(\beta^e(s_1) \frac{s_2}{a}\right) \approx s_2 \\ z(s_1, s_2) &= \frac{a}{\beta^e(s_1)} \left[\frac{\sin(\beta^e(s_1))}{\beta^e(s_1)} - \cos\left(\beta^e(s_1) \frac{s_2}{a}\right) \right] \approx \beta^e(s_1) \left(\frac{s_2^2}{2a} - \frac{a}{6} \right) \end{cases} \quad (2)$$

avec $u_1(s_1)$ et $u_3(s_1)$ les déplacements des points de la ligne moyenne, y et z les coordonnées du point M dans le repère local (G, e_1^r, e_2^r, e_3^r) qui suit la section dans son mouvement de rotation et $\beta^e(s_1) = a/R(s_1)$ l'angle d'ouverture de la section lié à la courbure transverse. Les approximations sur y et z sont obtenues en supposant que l'angle $\beta^e(s_1)$ reste petit, ce qui est le cas pour des profils de section très évasés. Les paramètres cinématiques doivent respecter la contrainte d'orthogonalité de la section par rapport à la ligne moyenne :

$$e_3^r \cdot OG_{,1} = 0 \quad (3)$$

2.2 Énergie de déformation du modèle de poutre à section flexible

Les hypothèses cinématiques sont introduites dans l'énergie de déformation de la coque et on fait les hypothèses que cette coque ne subit que des petites déformations élastiques et ne travaille en membrane qu'en traction-compression dans le sens longitudinal du ruban. On obtient alors l'énergie de déformation élastique du ruban donnée par l'équation 4.

$$U_e = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-a}^a (Ae_{11}^2 + D(k_{11}^2 + k_{22}^2 + 2\nu k_{11} + k_{22} + 2(1-\nu)k_{12}^2)) ds_2 ds_1. \quad (4)$$

où A et D sont les raideurs de tension et de flexion de la coque et où les contraintes membranaires et de flexion sont données par :

$$\begin{cases} e_{11} = e^r + zk^r + e^s, \\ k_{11} = -k^r + k_{11}^s, \\ k_{22} = k_{22}^s, \\ k_{12} = k_{12}^s. \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} e^r = u_{1,1} + \frac{1}{2}(u_{1,1}^2 + u_{3,1}^2), \\ e^s = \frac{1}{2}z_{,1}^2, \\ k_{11}^s = z_{,11}, \\ k_{22}^s = z_{,22} - z_{0,22}, \\ k_{12}^s = z_{,12}. \end{cases} \quad (5)$$

Soit X une variable cinématique, l'exposant X^r fait référence à un comportement de type rod et X^s fait référence au comportement de la courbe section. k^r est donc la courbure longitudinale de la poutre à section flexible. Dans les équations précédentes l'indice $j \in [1, 2]$ de $X_{,j}$ correspond à la dérivée de X par rapport à l'abscisse curviligne s_j .

2.3 Enrichissement de la cinématique de coque

Le profil de la section ne reste pas parfaitement circulaire lorsqu'elle se déforme sous l'influence de sollicitations mécaniques. Le modèle initial peut alors être parfois mis en défaut car cette cinématique simplifiée conduit à une surestimation de la raideur dans certains cas. On choisit alors d'introduire une approximation plus riche du terme de courbure transverse κ . La méthode de Ritz associée à une base de polynômes orthogonaux $P^i(s_2)$ (Legendre ici) d'ordre i pair permet de donner une décomposition de cette courbure sous la forme :

$$\kappa(s_1, s_2) = \sum_{i=0}^N \kappa^i(s_1) P^i(s_2) \quad (6)$$

À l'instant initial, la courbure transverse est connue $\kappa = \frac{1}{R_0} P^0$ avec $P^0 = 1$ le premier polynôme de Legendre. En intégrant dans la section les polynômes $P^i(s_2)$, on obtient les polynômes $Q^i(s_2)$ qui permettent d'écrire le paramètre β .

$$\beta(s_1, s_2) = \kappa^i(s_1) Q^i(s_2) \quad (7)$$

Si l'angle β reste petit, c'est à dire pour des rubans ayant une section très ouverte, on peut écrire $z_{,2} = \beta$. Ainsi, en notant $R^i(s_2)$ les polynômes issus de l'intégration dans la section des $Q^i(s_2)$, on obtient une nouvelle expression de z :

$$z(s_1, s_2) = \kappa^i(s_1) R^i(s_2) \quad (8)$$

Cette expression est ensuite réintroduite dans l'énergie de déformation élastique donnée par les équations (4) et (5).

3 Discrétisation éléments finis

Le nombre de paramètres nécessaire à la discrétisation éléments finis de ce modèle de poutre dépend du nombre de paramètres $\kappa^i(s_1)$ d'enrichissement de la section. Prendre $N = 3$ permet d'obtenir un élément avec un nombre restreint de degrés de liberté et dont la cinématique de section est suffisamment enrichie. Les rotations de la section sont paramétrées par des quaternions unitaires [12] et l'hypothèse stipulant que la ligne moyenne reste dans le plan (O, e_1, e_3) permet de restreindre ces quaternions

unitaires à seulement deux composantes q_0 et q_2 . Il convient d'introduire un multiplicateur de Lagrange L_q qui permet de prendre en compte la contrainte unitaire des quaternions. Les déplacements u_1 et u_3 selon les axes e_1 et e_3 sont aussi des degrés de liberté actifs et un second multiplicateur de Lagrange L_t lié à la contrainte d'orthogonalité vient compléter les degrés de liberté de l'élément. Les interpolations choisies pour chacun des paramètres sont répertoriées dans le tableau Tableau 1.

TABLE 1 – Tableau des interpolations

DDL	u_1, u_3	q_0, q_2	κ^i	L_t	L_q
Polynômes	Lagrange	Hermite	Hermite	Lagrange	Hermite
Ordre	1	3	3	1	3

La discrétisation du modèle ainsi que le choix des interpolations pour les paramètres mènent à un élément 1D à deux nœuds possédant 30 degrés de liberté. Cet élément est implémenté dans le code de calcul Abaqus via la subroutine User Element dédiée permettant ainsi de profiter des solveurs disponible par défaut dans ce logiciel. A l'aide des éléments déjà implémentés dans Abaqus on peut aussi envisager la modélisation de structures multi-rubans. On se limite à des essais statiques avec un pilotage par longueur d'arc de type Riks [10] dans un premier temps. Seuls la matrice tangente et le vecteur second membre sont à définir pour implémenter l'élément dans Abaqus. L'élément de poutre à section flexible développé ici est ensuite nommé REFleXS-2D pour Rod Element with Flexible X-Section en comportement plan (2D), où X signifie Cross.

4 Comparaisons entre modèle de coques et modèles de poutre à section flexible

L'élément de coques linéaire S4R présent dans Abaqus et l'élément REFleXS-2D sont comparés à travers deux essais faisant intervenir les mécanismes responsables de la formation de plis. Dans les deux cas, le ruban utilisé est le même et possède les propriétés énumérées dans le tableau 2.

TABLE 2 – Propriétés mécaniques du ruban de référence

Longueur L (mm)	Demi-largeur a (mm)	Épaisseur h (mm)	Angle d'ouverture β_0^c (rad)	Module d'Young E (MPa)	Coefficient de Poisson ν
1000	30	0.15	0.6	210000	0.3

Pour les deux essais, le ruban construit à l'aide d'éléments coques S4R sous Abaqus possède 15000 éléments (30x500) afin d'être sûr de bien modéliser les instabilités. Le ruban obtenu à l'aide du modèle de poutre à section flexible enrichi est discrétisé avec 200 éléments REFleXS-2D et le modèle non enrichi possède 400 éléments. Ces densités de maillage permettent d'atteindre la convergence des calculs pour les deux exemples.

4.1 Flexion pure du ruban

Largelement étudié ([4],[8],[11]), cet essai consiste à appliquer des rotations opposées à chacune des extrémités du ruban. Les sections extrêmes du ruban ne sont pas libres de se déformer et tous les déplacements sont bloqués à ces extrémités sauf le déplacement selon l'axe du ruban pour l'une d'elle. On se restreint à la flexion de type *opposite-sense* où les faces convexes sont en regard à la fin de l'essai. La courbe de référence pour cet essai est la courbe représentant le moment de réaction en fonction de la rotation appliquée à l'une des extrémités du ruban. Elle est tracée sur la Figure 2 pour les trois éléments à comparer. En suivant cette courbe, on remarque bien que l'essai se déroule en quatre temps, la première partie linéaire où le ruban se comporte comme une poutre à section non déformable, la deuxième où la non linéarité apparaît conduisant à un aplatissement local de la section de plus en plus grand au centre du

ruban. Cet aplatissement se poursuit jusqu'à la troisième partie : la formation du pli central. La quatrième partie est représentée par un plateau en fin d'essai, il s'agit de l'accroissement du pli à moment constant, la zone aplatie au centre du ruban devient de plus en plus grande à mesure que l'essai se poursuit.

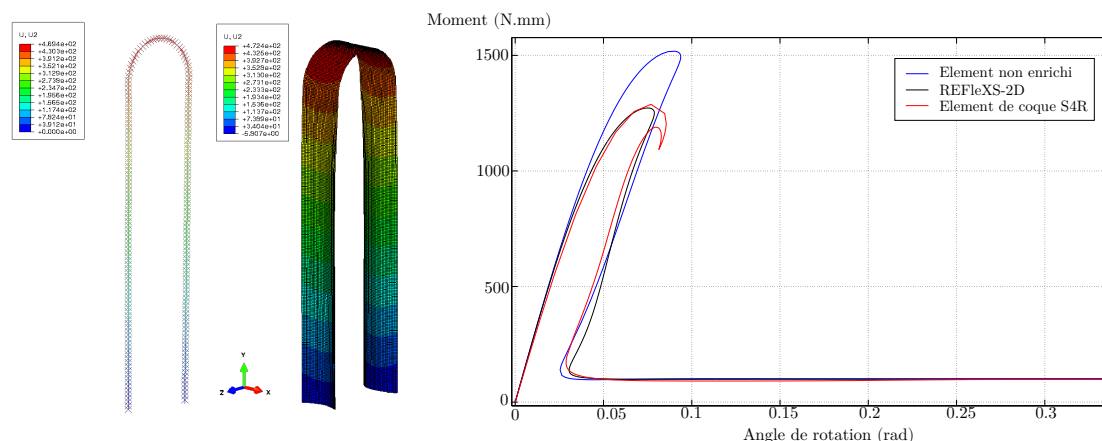


FIGURE 2 – Les déformées en fin d'essai ainsi que les déplacements selon l'axe y sont représentés pour l'élément REFleXS-2D et pour les éléments de coques (à gauche). Courbe représentant le moment mesuré en fonction de l'angle de rotation appliqué pour les trois éléments testés (à droite).

Les courbes de la Figure 2 montrent que l'élément non enrichi du modèle de poutre à section flexible (courbe bleue) est bien plus rigide que l'élément REFleXS-2D (courbe noire). Cette rigidité supplémentaire entraîne une surestimation du moment maximum ainsi que de l'angle de flambage du ruban comparé aux résultats obtenus avec les éléments de coques S4R. L'enrichissement permet d'avoir une très bonne estimation du moment maximum malgré une sous-estimation de l'angle de flambage.

4.2 Ruban encastré avec déplacement imposé à l'autre extrémité

Cet essai consiste à encastrier une des extrémités du ruban et d'imposer un déplacement selon l'axe e_3 de sorte à avoir un pli de type *opposite-sense*, en laissant la rotation et le déplacement selon x libres à cette extrémité. La force de réaction en fonction du déplacement imposé est tracée au cours de l'essai pour les trois éléments testés. On remarque alors que cet essai fait intervenir les mêmes étapes que l'essai précédent : comportement linéaire de type poutre en début d'essai, passage à un comportement non linéaire lié à l'aplatissement de la section, puis formation du pli et croissance de la zone de pli à moment constant. Il y a ici une étape supplémentaire, le pli translate légèrement vers l'extrémité encastrée juste après qu'il se soit formé.

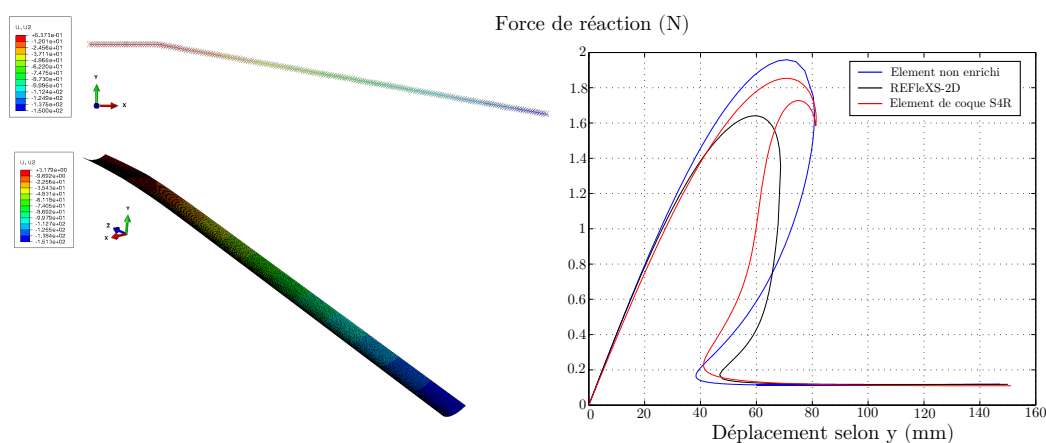


FIGURE 3 – Déformées finales du ruban ainsi que les déplacements selon l'axe y sont représentés pour l'élément REFleXS-2D et pour les éléments de coques (à gauche). Courbe représentant la force de réaction mesurée en fonction du déplacement imposé à l'extrémité du ruban (à droite).

Contrairement à l'essai précédent, on remarque ici que les résultats obtenus à l'aide du modèle non enrichi sont plus proches de ceux obtenus avec les modèles de coque. Cependant, on sait que le diagramme de bifurcation est très complexe pour les essais faisant intervenir des rubans. Il est possible que les branches de bifurcation suivies ne soit pas les mêmes en fonction des éléments utilisés. La formation du pli s'effectue proche de l'extrémité encastree, or les effets de bord ne sont pas bien pris en compte dans le modèle, ce qui peut expliquer la différence si grande entre les éléments coques et l'élément REFleXS-2D. Une campagne d'essais expérimentaux va commencer afin de quantifier le comportement mécanique des rubans sous certaines sollicitations.

5 Conclusion

Un enrichissement de la cinématique de la section a été proposé afin de réduire les écarts en raideur entre les modèles de coques et le modèle de poutre à section flexible. Ce modèle enrichi a été implémenté dans le code de calcul Abaqus via la subroutine UEL afin de comparer les performances de l'élément REFleXS-2D à celles des éléments coques linéaires plus classiques. Il a ainsi été montré que pour certains essais, l'enrichissement du modèle permettait d'obtenir des résultats plus proches de ceux obtenus par les modèles de coques considérés comme étant plus fiables. Pour d'autres essais faisant intervenir les mêmes mécanismes de formation de pli, le modèle enrichi donne des résultats plus éloignés des modèles de coques. La complexité du diagramme de bifurcation des essais faisant intervenir des rubans explique peut être ces différences, les modèles ne suivent pas forcément les mêmes branches. Une campagne d'essais expérimentaux sur des rubans va débiter afin de valider le modèle. On envisage ensuite de modéliser des structures déployables plus complexes de mécanismes à base de rubans, faisant de l'élément REFleXS-2D un outil numérique utilisable dans un environnement industriel.

Références

- [1] COMSOL AB, COMSOL Multiphysics User's Guide v4.2, Stockholm, Sweden, September 2011.
- [2] Dassault Systèmes, Abaqus User Subroutines Reference Guide, 2016.
- [3] R. Gardi, G. Pica. *Realization and preliminary tests on an innovative deployable structure for a high resolution telescope for microsatellite*. Proceedings of SPIE's Europe International Symposium, 2004.
- [4] F. Guinot, S. Bourgeois, B. Cochelin, L. Blanchard. *A planar rod model with flexible thin-walled cross-sections. Application to the folding of tape springs*. Int. J. Solids Structures, 49 (1), 73-86, 2012.
- [5] P. Marone-Hitz. *Modélisation de structures spatiales déployées par des mètres ruban : vers un outil métier basé sur des modèles de poutre à section flexible et la méthode asymptotique numérique*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale Marseille, 2014.
- [6] M. Martin, S. Bourgeois, B. Cochelin, F. Guinot. *Tape spring rod model as a regularised Ericksen's bar involving propagating instabilities*. 24th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Montréal, Août 2016.
- [7] S. Pellegrino. *CRTS reflectors*. Technical report, Department of Engineering, Univeristy of Cambridge, 2002.
- [8] E. Picault, P. Marone-Hitz, S. Bourgeois, B. Cochelin, F. Guinot. *A planar rod model with flexible cross-section for the folding and the dynamic deployment of tape springs : improvements and comparisons with experiments*. Int. J. Solids Structures, 51 (18), 3226-3238, 2014.
- [9] E. Picault, S. Bourgeois, B. Cochelin, F. Guinot. *A rod model with thin-walled flexible cross-section : Extension to 3D motions and application to 3D foldings of tape springs*. Int. J. Solids Structures, 84 (18), 64-81, 2016.
- [10] E. Riks. *An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems*. International Journal of Solids and Structures, 15 :529-551, 1979.
- [11] K.A. Seffen, S. Pellegrino. *Deployment dynamics of tape springs*. Proceedings of the Royal Society of London A, 455 :1003-1048, 1999.
- [12] E. Zupan, M. Saje, D. Zupan. *On a virtual work consistent three-dimensional Reissner-Simo beam formulation using the quaternion algebra*. Acta Mech. 224, 1709-1729, 2013.