

Une stratégie générale d'optimisation de structures composites — Application aux matériaux sandwich

C. Julien¹, F.X. Irisarri¹, D. Bettebghor¹,
F. Lavelle², K. Mathis².

¹ Onera, Département Matériaux et Structures {cedric.julien, francois-xavier.irisarri, dimitri.bettebghor}@onera.fr

² CNES, Direction des Lanceurs, florian.lavelle@cnes.fr

Résumé — Ces travaux décrivent une stratégie générale mise en place pour optimiser des structures composites stratifiées. Cette stratégie repose sur trois étapes d'optimisation successives : i/ l'optimisation continue en épaisseur et en rigidité locale du matériau homogénéisé équivalent, ii/ la recherche de la table de drapage optimale qui réalise au mieux ces optimums théoriques et iii/ la vérification de la faisabilité de la solution discrète, au regard des contraintes du problème d'optimisation (ex : contraintes mécaniques, de procédé, de coûts, etc...). Cette stratégie est ici appliquée et validée sur une structure industrielle : le SYLDA Ariane 5.

Mots clés — optimisation, composite, sandwich, spatial.

1 Introduction

L'optimisation structurale des composites stratifiés est un sujet considéré comme mature en ce qui concerne l'optimisation directe d'un empilement de plis unidirectionnels pour satisfaire aux critères mécaniques classiques [2]. Malgré cela, ces méthodes restent peu utilisées par les industriels en bureau d'études, pour la principale raison que ces travaux ignorent la réalité technologique des pièces composites qui sont effectivement réalisées. En effet, celles-ci possèdent le plus souvent des épaisseurs variables le long de la structure, afin de suivre les chemins d'efforts d'une part, et de présenter un surplus d'épaisseur dans les zones d'introduction d'effort d'autre part. Ainsi, de multiples travaux (voir [3] par ex.) ont montré les gains qui pouvaient être obtenus en optimisant simultanément les épaisseurs et la rigidité du matériau. Cependant, ces travaux se heurtent à la difficulté de prendre en compte la faisabilité des solutions trouvées. En particulier, les variations d'épaisseur de la structure stratifiée sont obtenues par des arrêts et reprises de plis conçues selon un grand nombre de règles de conception empiriques supplémentaires [7].

Dans cet article, nous proposons une stratégie globale d'optimisation de structures composites munies d'arrêts et de reprises de plis. Cette stratégie, décrite dans la Section 2, s'articule autour de trois étapes successives. La première étape permet de minimiser la masse de la structure en déterminant les variations optimales d'épaisseur et de rigidité, au regard de contraintes mécaniques telles que le flambement ou la première rupture de plis. Dans cette étape, le matériau est décrit comme un matériau homogène équivalent, et cette homogénéisation tout à fait générale est décrite en détail dans la Section 3. La deuxième étape se base sur un algorithme évolutionnaire de *laminare blending* pour retrouver les empilements au niveau local, tandis que la troisième étape vise à retravailler ces empilements afin de respecter les contraintes mécaniques. La Section 4 montre les résultats obtenus en appliquant cette stratégie sur une structure industrielle réelle, le SYLDA d'Ariane 5.

2 Stratégie d'optimisation

La Figure 1 montre le schéma de principe de la stratégie d'optimisation qui est présentée ici. On retrouve le principe de la stratégie indirecte à deux étapes (comme dans [5]), qui consiste à considérer dans un premier temps le composite stratifié comme un matériau homogène équivalent dont on vient

optimiser les propriétés locales de rigidité et/ou l'épaisseur sous les contraintes mécaniques liées à la structure, généralement issues du cahier des charges. La recherche des empilements optimaux — nombre et orientations des plis — s'effectue dans un deuxième temps, en prenant comme objectifs les rigidités équivalentes solutions de la première étape, et en respectant des contraintes liées à la faisabilité du composite, telles que la symétrie miroir ou l'équilibre. Toutefois, la stratégie proposée ici présente un certain nombre d'originalités que nous allons détailler.

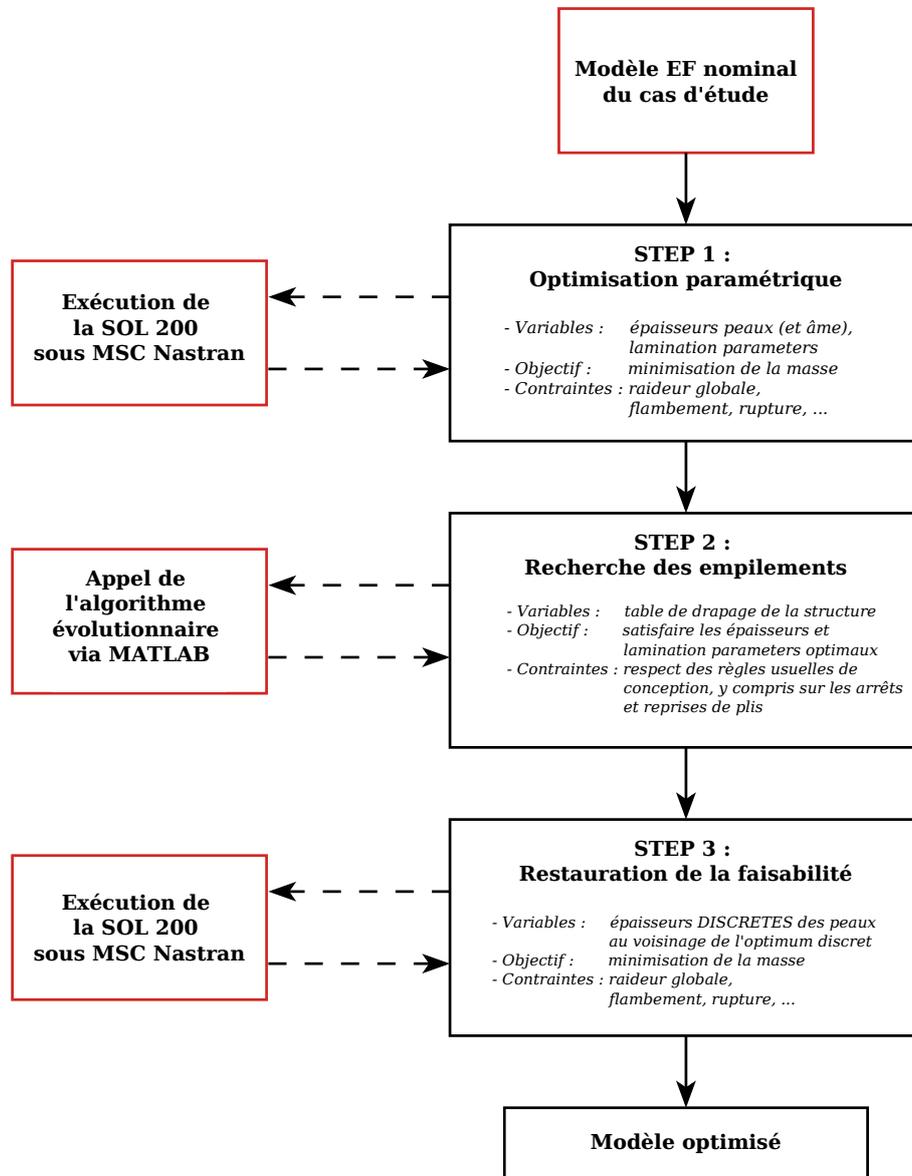


FIGURE 1 – Schéma de principe de la stratégie d'optimisation

Étape 1 : Optimisation continue des épaisseurs et rigidités locales. Dans ce travail, nous avons fait le choix d'exploiter un outil commercial de calcul de sensibilités et d'optimisation par gradient, en l'occurrence la SOL 200 du solveur EF MSC Nastran. Utiliser cet outil garantit en effet une efficacité numérique qui permet de travailler sur des modèles EF allant jusqu'à plusieurs millions de ddl dans des temps de calcul raisonnables. Précisément, cette première étape prend en entrée le modèle EF "nominal" de la solution à améliorer.

Ce modèle doit faire apparaître le zonage de la structure, c'est-à-dire sa subdivision en zones. Ainsi, à chaque zone correspond une épaisseur et une raideur locale, et c'est le choix et la répartition des zones qui fait *in fine* apparaître des variations d'épaisseur le long de la structure.

Dans chaque zone, le matériau est décrit comme une coque épaisse munie d'un unique matériau anisotrope. Un des points clés de cette étape réside donc dans le schéma d'homogénéisation du ma-

tériau composite qui aboutit à la définition de ce matériau équivalent, complètement décrit par un jeu de variables continues. Plus de détails sur l’homogénéisation du matériau, notamment dans le cas d’un matériau sandwich, sont donnés dans la Section 3.

Le problème d’optimisation qui est traité à cette étape est celui posé par le cahier des charges de la structure, c’est-à-dire la minimisation, en fonction des variables rappelées ci-dessus, d’une fonction de coût — typiquement la masse totale de la structure — en respectant des contraintes mécaniques qui dérivent directement du calcul EF (ex : charge critique de flambement, critères de rupture, etc...). c’est la raison pour laquelle cette étape concentre l’essentiel du temps de calcul de la stratégie complète. Par contre, aucune contrainte technologique n’est appliquée à cette étape.

A l’issue de cette première étape, on dispose, pour chaque zone de la structure, d’une épaisseur et d’un jeu de paramètres de rigidité, optimaux au regard du problème mécanique posé.

Etape 2 : Recherche des empilements. Comme rappelé en introduction, l’objectif de la stratégie est d’aboutir à la conception de structures composites à rigidité variable. En pratique, cela implique de développer un algorithme de recherche des empilements qui puisse gérer les arrêts et les reprises de plis le long de la structure, tout en introduisant les règles de conception spécifiques aux composites.

Dans ce travail, nous utilisons l’algorithme proposé par Irisarri et al. [6]. Celui-ci est un algorithme évolutionnaire qui définit chaque individu d’une population non pas comme un unique empilement, mais comme une *table de drapage*. Les tables de drapage décrivent un empilement unique pour chaque nombre de plis dans un intervalle $[n_{min}, n_{max}]$ donné. Ainsi, une fois défini le zonage d’une structure quelconque et la distribution de nombres de plis sur chacune de ces zones, chaque empilement est lu dans la table de drapage à partir du nombre de plis associé. La Figure 2 présente un exemple d’une zone de reprise de plis, ainsi que la table de drapage qui y est associée. La table de drapage contient ainsi une information riche, qui offre le choix des plis à arrêter. De plus, la connaissance de l’ordre des arrêts de plis permet d’évaluer la satisfaction des règles de conception, y compris dans les zones de transition d’épaisseur.

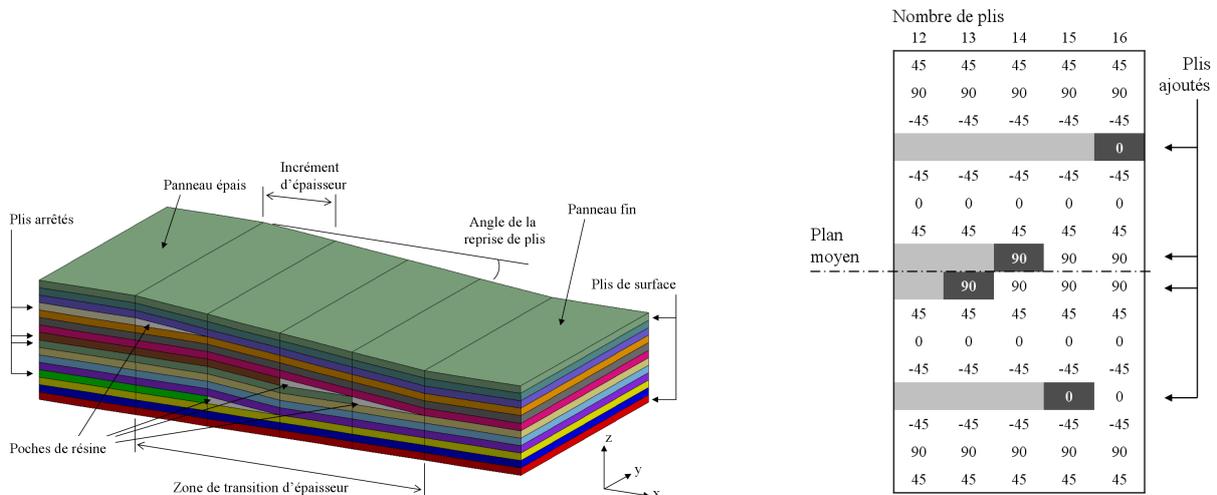


FIGURE 2 – Illustration du concept de table de drapage

Ainsi, connaissant les épaisseurs et *lamination parameters* optimaux pour chaque zone de la structure, issus de l’Etape 1, on construit les tenseurs A, B et D correspondants (cf. 3). L’Etape 2 permet alors de retrouver un empilement pour chaque zone qui minimise la distance — au sens de la divergence de Kullback-Leibler [8] — avec ces tenseurs cibles. Cette étape est très peu coûteuse en temps de calcul car aucune évaluation EF n’est nécessaire.

Etape 3 : restauration de la faisabilité. Lors de l’Etape 2, les épaisseurs réelles des zones issues de l’Etape 1 sont ramenées à un nombre de plis entier dans chaque zone. Cette projection de la solution optimale issue de l’Etape 1 d’un espace continu vers un espace discret s’accompagne de deux difficultés majeures. En premier lieu, si les sensibilités de la fonction objectif sont grandes autour de la solution continue, arrondir celle-ci aux variables discrètes les plus proches peut résulter en une perte d’optimalité.

De plus, les solutions des algorithmes d'optimisation par gradient voient souvent au moins une des contraintes de l'optimisation activée, et par conséquent, la probabilité de violer cette contrainte lors du passage à l'espace discret est non négligeable.

Ainsi, l'objectif de l'Etape 3 — dite de restauration de la faisabilité, au sens du respect des contraintes d'optimisation — est de retravailler le design proposé en sortie de l'Etape 2 pour obtenir une solution admissible au regard du problème mécanique posé. On procède donc à une optimisation similaire à celle de l'Etape 1, à l'exception des points suivants :

- les épaisseurs des éléments coques homogénéisées ne peuvent prendre cette fois que des valeurs discrètes. Afin de ne pas trop s'éloigner de la première solution proposée et de préserver la faisabilité, la plage de variation se limite à ± 1 pli par rapport aux empilements issus de l'Etape 2, et la nouvelle séquence d'empilement y est lue directement.
- les propriétés de rigidité du matériau homogénéisé ne sont plus paramétrées au moyen des *lamination parameters*, mais *via* une approximation de ces propriétés en fonction du nombre de plis, construite au moyen de la table de drapage.

A l'issue de cette étape, on obtient la solution finale qui, dans le cas d'un matériau sandwich, est décrite directement, dans chaque zone, au moyen des épaisseurs des peaux, éventuellement des épaisseurs de l'âme, et des empilements des peaux décrits par la table de drapage, qui s'apparente d'ailleurs aux plans de drapage utilisés dans l'industrie pour fabriquer les structures composites.

3 Paramétrisation du matériau

3.1 Loi de comportement [1]

Dans ce travail, l'ambition est de traiter les cas d'optimisation les plus généraux possible, sans faire *a priori* d'hypothèses sur la nature du matériau. En particulier, on souhaite pouvoir s'intéresser au cas des coques épaisses, éventuellement en matériau sandwich. Dans ce cas, la loi de comportement générale d'un stratifié constitué de plis unidirectionnels est donnée par :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & 0 \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \\ \gamma \end{Bmatrix} \quad (1)$$

où N, M et T sont respectivement les flux d'efforts membranaires, les moments résultants de flexion, et les résultantes de cisaillement transverse, et ε^0, κ et γ sont les déformations du plan moyen, les courbures du plan moyen, ainsi que les déformations en cisaillement transverse. La rigidité du matériau est donnée par les matrices de rigidité de membrane, de couplage, de flexion et de cisaillement transverse du stratifié, qui s'écrivent en fonction de la rigidité du pli élémentaire comme ci-dessous :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N Q_{ij}^{(k)} (z_k - z_{k-1}), \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N Q_{ij}^{(k)} (z_k^2 - z_{k-1}^2), \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N Q_{ij}^{(k)} (z_k^3 - z_{k-1}^3), \\ F_{ij} &= \sum_{k=1}^N C_{ij}^{(k)} (z_k - z_{k-1}), \quad (i, j = 4, 5). \end{aligned} \quad (2)$$

où les termes $Q_{ij}^{(k)}$ correspondent à la matrice de rigidité réduite du pli élémentaire, et les termes $C_{ij}^{(k)}$ à ceux de sa matrice de rigidité complète.

En pratique, dans les codes EF commerciaux, les termes de la matrice \mathbf{F} sont corrigés sur la base d'un raisonnement énergétique sur des cas de flexion cylindrique. Des facteurs correctifs k_{ij} font leur apparition dans la relation qui donne le cisaillement transverse, qui devient :

$$\begin{Bmatrix} T_y \\ T_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{44}F_{44} & k_{45}F_{45} \\ k_{45}F_{45} & k_{55}F_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}. \quad (3)$$

Le calcul de ces facteurs correctifs est complexe et peu documenté dans les codes EF commerciaux. On peut juste observer une forte dépendance de ces facteurs à l'ordre d'empilement du stratifié, ainsi, dans le cas d'un matériau sandwich, qu'au rapport entre les épaisseurs d'âme et de peau.

C'est pourquoi, dans le cadre de ce travail, nous avons choisi de construire un métamodèle pour calculer les termes de la matrice \mathbf{F} . Nous avons construit une base d'apprentissage de 5480 points en faisant varier les empilements, les angles d'orientation, les épaisseurs d'âme et de peau, et en utilisant le module d'homogénéisation de Nastran pour obtenir les facteurs de cisaillement correspondants. A partir de cette base, plusieurs modèles ont été évalués, en fonction de la qualité de l'approximation des termes de cisaillement, mais également de la facilité à implémenter la surface de réponse directement dans un calcul Nastran. C'est finalement un réseau de neurones qui a été retenu, qui permet de calculer directement la matrice de cisaillement transverse connaissant les caractéristiques de la plaque stratifiée/sandwich.

3.2 Les lamination parameters [6]

Les *lamination parameters* (ci-après LP) offrent une représentation condensée et continue des trois matrices de rigidité \mathbf{A} , \mathbf{B} et \mathbf{D} du stratifié, fort pratique pour l'optimisation. Cette représentation associe à chacune de ces matrices un jeu de quatre paramètres sans dimension définis comme des intégrales des orientations $\delta(z)$ des plis dans l'épaisseur du stratifié :

$$V_{[1,2,3,4]}^{A,B,D} = \int_{-h/2}^{h/2} z^{0,1,2} [\cos 2\delta(z), \sin 2\delta(z), \cos 4\delta(z), \sin 4\delta(z)] dz \quad (4)$$

Ainsi, la matrice de rigidité macroscopique du stratifié \mathbf{ABD} est une fonction linéaire des LP, de l'épaisseur totale h du stratifié, et de matrices élémentaires $\Gamma_{i=0..4}$ qui ne dépendent que des modules de l'ingénieur du pli de base :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= h (\Gamma_0 + \Gamma_1 V_1^A + \Gamma_2 V_2^A + \Gamma_3 V_3^A + \Gamma_4 V_4^A), \\ \mathbf{B} &= \frac{h^2}{2} (\Gamma_0 + \Gamma_1 V_1^B + \Gamma_2 V_2^B + \Gamma_3 V_3^B + \Gamma_4 V_4^B), \\ \mathbf{D} &= \frac{h^3}{12} (\Gamma_0 + \Gamma_1 V_1^D + \Gamma_2 V_2^D + \Gamma_3 V_3^D + \Gamma_4 V_4^D). \end{aligned} \quad (5)$$

Comme la réponse des stratifiés en élasticité linéaire est directement fonction des matrices \mathbf{ABD} , les LP peuvent être utilisés avantageusement comme variables d'optimisation en lieu et place des orientations de plis. En outre, les variables d'épaisseurs de plis et de nombre de plis sont remplacées et condensées par la seule épaisseur totale du stratifié. Pour l'optimisation, cette représentation impose néanmoins de travailler avec des empilements composés de plis identiques (même matériau, même épaisseur) uniquement. Par ailleurs, la définition du domaine de définition des LP est complexe, notamment lorsque l'intégralité des douze *lamination parameters* est considérée. Dans ce travail, nous utilisons l'approximation de ce domaine proposée dans [9], qui reste simple à introduire dans un calcul Nastran.

3.3 Homogénéisation matériau dans le cas d'un composite sandwich

Cette section est limitée aux plaques sandwich symétriques, constituées d'une âme épaisse et de deux peaux identiques. Il est alors toujours possible de décrire la rigidité globale d'une plaque sandwich à partir de la relation (1), à condition d'écrire les quatre matrices de rigidité équivalentes comme suit :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= 2A_{ij}^p + h_a Q_{ij}^a \\ B_{ij} &= 0 \\ D_{ij} &= \frac{1}{2} A_{ij}^p \left[(h_p + h_a)^2 + \frac{h_p^2}{3} \right] + Q_{ij}^a \frac{h_a^3}{3} \\ F_{ij} &= 2A_{ij}^p + h_a G_{ij}^a \end{aligned} \quad (6)$$

où les A_{ij}^p sont les composantes de la matrice de membrane de la peau stratifiée, et h_p son épaisseur ; Q_{ij}^a sont les coefficients de la matrice de rigidité réduite de l'âme, G_{ij}^a sont les modules de cisaillement transverse de l'âme et enfin h_a est l'épaisseur de l'âme.

Pour un choix de matériaux donné pour le pli de base des peaux et l'âme, **la rigidité homogénéisée de la plaque sandwich est ainsi uniquement fonction du comportement de membrane de ses peaux.** Les quatre LP en membrane de la peau et les épaisseurs respectives de la peau et de l'âme suffisent donc à décrire complètement le comportement de la plaque sandwich.

4 Application à une structure composite sandwich

4.1 Description du problème d'optimisation

Le cas d'application traité dans ce travail est dérivé d'une structure typique des applications spatiales : le SYLDA Ariane 5. Plus précisément, le modèle considéré, visible sur la Figure 3, reprend les dimensions géométriques de la structure réelle, ainsi que ses chargements et ses critères de dimensionnement.

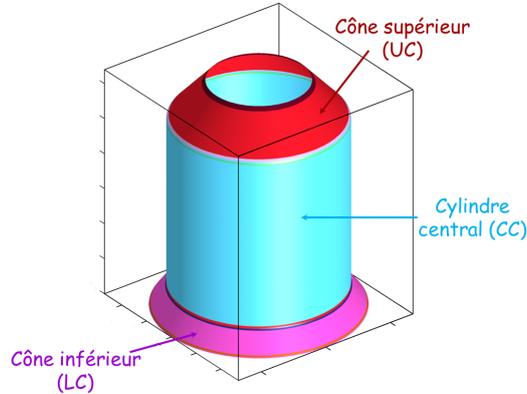


FIGURE 3 – Schéma de principe de la stratégie d'optimisation

Dans le cadre de ce travail, il ne s'agit pas de reproduire le processus de dimensionnement d'une pièce comme le SYLDA, mais plutôt de faire la démonstration des capacités de la stratégie d'optimisation. Ainsi, nous présenterons les résultats d'un processus d'amélioration du SYLDA A5 dans lequel l'objectif est de minimiser la masse totale de la structure, en respectant un critère de raideur globale, qui est une des multiples contraintes à respecter par la structure. Les résultats obtenus du point de vue de la masse notamment, ne peuvent donc pas directement s'interpréter comme un gain éventuel sur la structure réelle, mais restent néanmoins pertinents du point de la stratégie générale et du problème traité.

Le critère de rigidité mentionné ci-dessus est défini par trois cas de charge unitaires, pour lesquels on mesure le déplacement maximal du point d'applications des efforts, afin d'en déduire un terme K_i , $i \in \{1, 4, X\}$ ayant la dimension d'une rigidité. Ces termes doivent alors respecter les bornes suivantes :

$$K_1^{min} \leq K_1 \leq K_1^{min} \quad (7a)$$

$$K_X^{min} \leq K_X \leq K_X^{min} \quad (7b)$$

$$K_4^{min} \leq K_4 \quad (7c)$$

Enfin, les variables d'optimisation sont :

- les paramètres de stratification V_A^{LC} , V_A^{CC} et V_A^{UC} des peaux, respectant leur domaine de définition,
- les épaisseurs t_S^{LC} , t_S^{CC} , t_S^{UC} des peaux, variant dans l'intervalle [0,4 mm ; 1,2 mm],
- les épaisseurs t_C^{LC} , t_C^{CC} , t_C^{UC} des âmes en nid d'abeille, variant dans l'intervalle [1 mm ; 15 mm].

où $\{LC, CC, UC\}$ désignent respectivement le cône inférieur, le cylindre central et le cône supérieur du SYLDA. Soit au total dix-huit variables (douze paramètres de stratification et six épaisseurs).

4.2 Résultats

La Figure 4 montre les résultats de l'Etape 1 d'optimisation continue. On observe notamment qu'un gain significatif en masse est atteignable, de l'ordre de 15%. Ce gain correspond à la perte d'épaisseur des peaux notamment dans le cylindre central, qui a la plus grande superficie, mais également par la disparition quasi-complète des âmes. En effet, les cas de charge unitaires utilisés pour ce cas-test ne sollicitent finalement pas la structure en flexion, ce qui rend superflu la présence de l'âme. Cela est très bien capté par l'optimiseur. Par ailleurs, les *lamination parameters* lus dans le Tableau 1 montrent que les solutions optimales ont leur V_2 et V_4 identiquement nuls, ce qui est caractéristique d'un matériau orthotrope, orienté dans la direction longitudinale du SYLDA

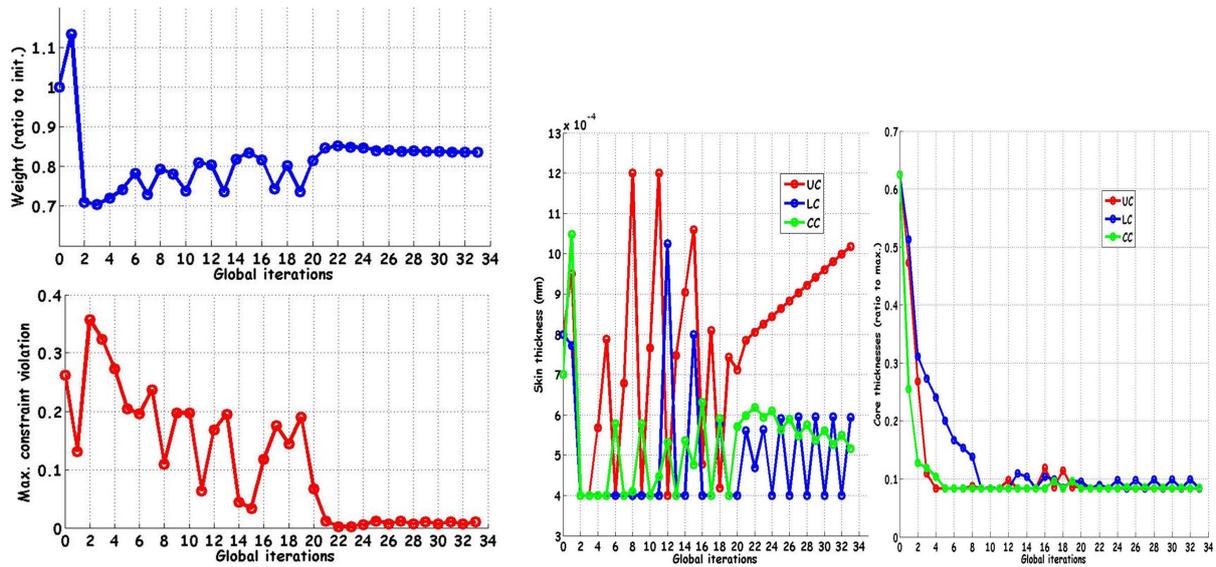


FIGURE 4 – Comportement de l’optimisation en masse, en admissibilité et pour les épaisseurs des sandwichs. La masse est normalisée par rapport à la masse nominale, tandis que les épaisseurs d’âme sont normalisées par rapport au maximum admissible.

A l’issue de cette étape, les paramètres optimaux, qui vont constituer les cibles de l’Etape 2 de recherche des empilements, sont donnés dans le Tableau 1. Après exécution de l’algorithme par tables de drapage, on obtient la table de drapage optimale montrée sur la Figure 5. On y observe les quatre plis à $\pm 30^\circ$ qui constituent le tronc commun de la table de drapage, ainsi que la façon dont les différents plis sont arrêtés pour passer continûment d’un stratifié à douze plis au stratifié de base à quatre plis. Par ailleurs, on a surligné sur cette figure les empilements optimaux trouvés pour les trois zones optimisées de la structure. Néanmoins, ces empilements, comme attendu, violent une des contraintes de l’optimisation. L’Etape 3 de restauration de faisabilité, et les Tableaux 2 et 3 montrent les résultats à l’issue de cette dernière étape.

On obtient finalement une solution qui respecte toutes les contraintes, d’une masse totale inférieure de plus de onze pour cent par rapport au design initial. L’étape de restauration de la faisabilité a donc un "coût" en masse de l’ordre de 4% de la masse initiale. Ce surplus s’explique par la nécessité, de rajouter un pli dans le cône inférieur et le cylindre central, ainsi que de rajouter un peu d’épaisseur au niveau des âmes. De plus, la marge exacte sur la contrainte de raideur K_4 n’est pas connue car cette contrainte a été filtrée par le solveur Nastran, car non critique pour cette optimisation. Néanmoins, le seuil de filtrage des contraintes est fixé à 50%, ce qui donne une valeur indicative.

Zone	t_S (mm)	t_C (mm)	V_A^1	V_A^2	V_A^3	V_A^4
LC	0,594	1,002	0,919	-0,001	0,790	-0,001
CC	0,517	1,015	0,486	-0,001	-0,207	-0,001
UC	1,017	1,001	0,457	-0,002	-0,287	-0,004

TABLE 1 – Valeurs cibles de l’optimisation des empilements pour le cas de raideur globale

Ratio $\frac{\text{Masse}}{\text{Masse}_{init}}$	Marge sur K_1	Marge sur K_X	Marge sur K_4
0.886	0,5%	3,4%	> 50%

TABLE 2 – Performances de la solution optimisée du cas de raideur globale

	CC	LC				UC			
	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	-30	-30	-30	-30	-30	-30	-30	-30	-30
		0	0	0	0	0	0	0	0
						-45	-45	-45	-45
				45	45	45	45	45	45
	30	30	30	30	30	30	30	30	30
								90	90
									90
	30	30	30	30	30	30	30	30	30
					45	45	45	45	45
							-45	-45	-45
			0	0	0	0	0	0	0
	-30	-30	-30	-30	-30	-30	-30	-30	-30

FIGURE 5 – Table de drapage solution pour le cas de raideur globale à trois zones

Zone	Empilement peau	Epaisseur âme (mm)
LC	$[-30/0/45/30/30/0/-30]$	1,71
CC	$[-30/0/30]_s$	1,40
UC	$[-30/0/45/-45/30]_s$	1,59

TABLE 3 – Définition des zones courantes de la structure optimisée pour le cas de raideur

5 Conclusion

Dans ce travail, on a présenté une stratégie générale d’optimisation de structures composites, qui permet, à partir du modèle EF de la pièce à améliorer, de définir le plan de drapage de la pièce, ainsi qu’éventuellement les épaisseurs d’âme, qui permettent de minimiser la masse de la structure tout en respectant le cahier des charges mécaniques.

Il reste désormais à élargir le champ d’application de la méthode, en démontrant par exemple les gains réalisés lorsque l’ensemble des cas de charge et des contraintes sont gérés simultanément.

Références

- [1] J. M. Berthelot. *Matériaux Composites*, Lavoisier, 1992.
- [2] H. Ghiasi, D. Pasini, L. Lessard. *Optimum stacking sequence design of composite materials Part 1 : Constant stiffness design*, Composite Structures (90), Elsevier, 1-11, 2009.
- [3] Z. Gurdal, B.F. Tatting, C.K. Wu. *Variable stiffness composite panels : Effects of stiffness variation on the in-plane and buckling response*, Composites Part A : Applied Science and Manufacturing (39), 911-922, 2008.
- [4] Z. Gurdal, R.T. Haftka, P. Hajela. *Design and optimization of laminated composite materials*, Wiley, 1999.
- [5] F.X. Irisarri, M.M. Abdalla, Z. Gurdal. *Improved Shepard’s Method for the Optimization of Composite Structures*, AIAA Journal (49), 2726-2736, 2011.
- [6] F.X. Irisarri, A. Lasseigne, F.H. Leroy, R. Le Riche. *Optimisation des empilements dans les structures composites stratifiées avec arrêts de plis*, Comptes-tendus des JNC 18, Ecoel Centrale Nantes, 2013.
- [7] MIL-HDBK-17-3F. *Military Handbook, Polymer Matrix Composites*, US Department of Defense, 2002.
- [8] M. Moakher. *On the averaging of symmetric positive-definite tensors*, Journal of Elasticity (82), 273-296, 2006.
- [9] G. Raju, Z. Wu, P.M. Weaver. *On further developments of the feasible region of lamination parameters for composite laminates*, 55th AIAA/ASME/ASCE/AHS/SC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, 2014.