

Optimisation robuste des macro/microgéométries de denture pour minimiser l'excitation vibratoire générée par l'engrènement

P. Garambois, E. Rigaud, J. Perret-Liaudet

*LTDS UMR 5513, Ecole Centrale de Lyon, 36 avenue Guy de Collongue, 69134 Ecully Cedex
{pierre.garambois,emmanuel.rigaud,joel.perret-liaudet}@ec-lyon.fr*

Résumé — L'objectif de ce papier est de présenter une méthode d'optimisation de macro et microgéométrie de denture qui permet de minimiser les excitations périodiques et paramétriques qui sont générées par les engrènements, en tenant compte de la robustesse des solutions aux défauts de fabrication. Cette méthode met en oeuvre un modèle analytique de flexion de denture et un algorithme génétique de type NSGA-II. La méthode est illustrée sur l'engrènement inverseur d'une chaîne cinématique qui présente de deux arbres contra-rotatifs.

Mots clés — optimisation macro/micro géométrique de denture, modèle analytique de flexion, algorithme génétique

1 Introduction et principes de l'optimisation

Les systèmes mécaniques qui présentent des transmissions par engrènements sont le siège d'excitations internes qui peuvent déboucher sur un comportement vibro-acoustique gênant pour ses utilisateurs [1]. On retient généralement comme source d'excitation l'Erreur Statique de Transmission (EST) $\delta(t)$ qui correspond à l'écart entre la position réelle de la roue menée et sa position théorique [2, 3]. Cette excitation est due aux déformations élastiques des dents sous l'effet du couple de charge et aux écarts microgéométriques de l'engrènement (volontaires dans le cas des corrections de dentures et involontaires dans le cas des défauts).

L'EST est à l'origine d'une fluctuation de la raideur d'engrènement $k(t)$ qui constitue une source d'excitation paramétrique. En régime stationnaire, les excitations sont périodiques (fréquence d'engrènement $f_e = Zf_r$, avec Z le nombre de dents et f_r la fréquence de rotation). Elles est à l'origine de surcharges dynamiques sur les dentures qui se transmettent à toutes les composantes de la chaîne cinématique et au carter : l'état vibratoire de ce dernier est à l'origine du bruit de sirènement [1, 3].

Le calcul de l'EST nécessite la connaissance de la macrogéométrie de l'engrènement, des caractéristiques de souplesse des dentures, de leur microgéométrie et de la déformation locale du contact de Hertz. Le calcul de l'EST des engrènements à axes fixes parallèles est désormais bien maîtrisé [4, 5], de même que le calcul de la raideur d'engrènement [2, 6, 7, 8]. La souplesse des dentures est généralement obtenue à partir d'un modèle éléments finis des roues dentées.

La sensibilité de l'EST à la microgéométrie a été largement étudiée [9, 10, 11, 12], de même que l'influence de la flexion du corps de roue et des couplages entre les différentes dents en prise dans le processus d'engrènement [3]. Des corrections microgéométriques peuvent également permettre de modifier la répartition du chargement sur les dents en prises et ainsi modifier les contraintes et l'usure générées par le processus d'engrènement [13, 14]. Ces corrections ont également été utilisées pour minimiser les fluctuations d'EST et ainsi la réponse vibro-acoustique de la chaîne cinématique induite [10, 11, 15]. La variabilité des excitations générées par les défauts de fabrication des dentures a également été étudié [16].

L'objectif de ce travail est ainsi de présenter une méthode d'optimisation multi-objectifs appliquée aux engrènements basée sur l'utilisation d'un algorithme génétique qui vise à minimiser les excitations générées par l'engrènement en jouant sur des paramètres à la fois macro et microgéométriques, tout en prenant en compte la robustesse des solutions liée aux défauts de fabrication par des simulations de Monte Carlo. Les deux objectifs que nous fixons sont la minimisation de la moyenne de la densité de

probabilité des valeurs efficaces décrivant les fluctuations de l'EST et de la raideur d'engrènement. Les paramètres de l'optimisation sont d'une part macrogéométriques (choix du module et de l'angle de pression l'outil de taillage des dentures, angle d'hélice, saillie des dents) et d'autre part microgéométriques (bombé d'hélice et dépouille en tête).

L'utilisation d'un algorithme génétique nécessite l'évaluation des fonctions objectifs pour chaque individu de la population. En l'occurrence, il s'agit, pour chaque engrenage testé, d'effectuer un tirage de Monte Carlo aléatoire des défauts et de calculer l'EST et la raideur d'engrènement pour chaque cas de Monte Carlo, les objectifs étant la moyenne de la densité de probabilité obtenue par tirage de Monte Carlo. Il est donc nécessaire d'utiliser un modèle de reconstruction de l'EST compatible avec la problématique de répétition du calcul un grand nombre de fois. Dans cette optique, un modèle analytique de flexion de dent a été mis en place, et permet de reconstruire la souplesse des lignes de contacts plus rapidement qu'en utilisant un modèle éléments-finis qui nécessite par ailleurs d'être maillé. Ce modèle couple un modèle analytique de plaque épaisse et une approximation de Ritz de la déflexion de la dent.

Dans un premier temps, nous présentons la caractérisation des excitations générées par une transmission par engrenage. Par la suite, nous définissons les paramètres et objectifs de l'optimisation, puis l'algorithme génétique utilisé. Enfin, nous présentons un exemple d'optimisation sur une pompe à vide et un engrenage inverseur.

2 Caractérisation des excitations générées par une transmission par engrenage

2.1 Erreur Statique de Transmission (EST(t))

Le calcul de l'Erreur Statique de Transmission (EST) d'un engrenage sous une charge F , correspondant à l'effort total s'exerçant sur l'ensemble des couples de dents en prise, est relativement bien maîtrisé [3]. Il s'appuie sur la résolution des équations qui décrivent le contact statique entre les dentures. La figure 1 schématise les excitations liées à l'engrenage.

Pour chaque position angulaire θ de la roue menante, une analyse cinématique du fonctionnement de l'engrenage permet de déterminer les lignes théoriques de contact (lieu des contacts potentiels sur les surfaces des dents en prise dans le plan d'action). Celles-ci sont discrétisées, afin d'introduire une matrice de souplesse \mathbf{H} qui relie les déformations aux efforts appliqués au niveau des points discrets. La matrice \mathbf{H} est calculée à partir d'un calcul préalable des matrices de souplesse des roues dentées par la méthode des éléments-finis. Tous les phénomènes physiques qui contribuent à la déformation en flexion des dents chargées doivent être pris en compte. L'influence de l'élasticité du corps de roue et les interactions entre les différents couples de dents présents simultanément dans la zone de contact sont notamment d'autant plus grandes que les corps de roue sont minces [4, 5]. On intègre également les déformations locales de type Hertz dans la matrice \mathbf{H} . Les corrections de denture et les défauts de géométrie sont introduits par l'intermédiaire d'un vecteur \mathbf{e} qui décrit les écarts initiaux séparant les dents. Ce vecteur \mathbf{e} tient également compte des erreurs de parallélisme des roues dentées qui résultent des déformations élasto-statiques de l'ensemble de la transmission. La résolution des équations de contact permet alors d'accéder au rapprochement de corps rigides global des dents et aux charges réparties \mathbf{H} , pour chacune des positions successives θ . Le système d'équations sous contraintes qui gère les déformations élastostatiques de l'engrenage et permet de retrouver l'EST $\delta(\theta)$ s'écrit alors :

$$\begin{cases} \mathbf{HP} = \delta(\theta)\mathbf{1} - \mathbf{e} \\ \mathbf{1}^T \mathbf{P} = F \end{cases} \quad (1)$$

sous les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{HP} + \delta(\theta)\mathbf{1} \geq \mathbf{e} \\ P_i \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

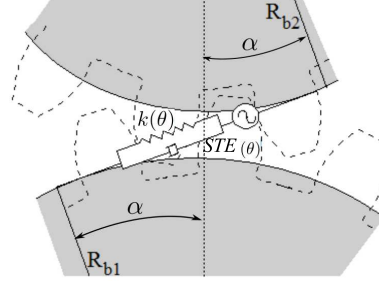
avec $\delta(\theta)$ l'erreur de positionnement de la roue à l'angle θ (rapprochement des corps rigides), \mathbf{H} la matrice de souplesse de la dent, \mathbf{P} la charge répartie sur les lignes de contact des dents en prise (composantes P_i) et \mathbf{e} les corrections de denture et les défauts de géométrie.

2.2 Raideur d'engrènement $k(t)$

La caractérisation de l'EST permet d'évaluer la raideur d'engrènement pour chaque position angulaire θ , à partir du calcul de la dérivée de la force F transmise par rapport à l'EST $\delta(\theta)$:

$$k(\theta) = \frac{\partial F}{\partial \delta(\theta)} \quad (3)$$

Des calculs successifs pour chaque position angulaire permettent d'évaluer les fluctuations périodiques de la raideur qui constituent la seconde source d'excitation paramétrique de la transmission.



$k(\theta)$: Parametric excitation of the meshing process
 $STE(\theta)$: Static Error Transmission (displacement excitation)

FIGURE 1 – Excitation d'une transmission par engrenage

2.3 Modèle analytique de flexion de dent

L'enjeu principal d'un calcul d'optimisation par méthodes métaheuristiques réside dans le temps de calcul des objectifs. Dans notre cas, la résolution du système d'équations (1,2) est relativement rapide. En revanche, c'est la construction de la matrice \mathbf{H} qui décrit la souplesse des lignes de contact (cf. section 2) qui peut être longue. Elle est généralement reconstituée à l'aide d'un modèle éléments finis des dents, et nécessite non seulement un grand nombre d'inversions de matrice, mais aussi un nouveau maillage pour chaque macrogéométrie, ce qui est rédhibitoire.

Pour résoudre ce problème, nous avons mis en place un modèle analytique qui permet de calculer rapidement les souplesses des lignes de contact. Pour cela, la dent est modélisée par une plaque épaisse d'épaisseur variable $h(x)$ en utilisant une théorie de Reissner-Mindlin [17, 18] où l'épaisseur de la plaque correspond à l'épaisseur de la dent. La figure 2 schématise le modèle simplifié utilisé. La flèche de la plaque représente la flexion de la dent.

On définit ainsi l'énergie de déformation W_{def} d'une plaque de surface S dans un plan (x, y) soumise à un effort $F(x_0, y_0)$ au point (x_0, y_0) :

$$W_{def} = \iint_S \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - w(x_0, y_0) * F(x_0, y_0) \quad (4)$$

avec $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ respectivement les déformations et contraintes généralisées de la plaque :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \{ \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{xy} \quad \varepsilon_{xz} \quad \varepsilon_{yz} \} \quad (5)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T = \{ M_{xx} \quad M_{yy} \quad M_{xy} \quad M_{xz} \quad M_{yz} \} \quad (6)$$

Par ailleurs, le vecteur déplacement de la plaque $u(x, y)$ en un point de coordonnées (x, y) est approximé par la méthode de Ritz :

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{Bmatrix} w(x, y) \\ \theta_x(x, y) \\ \theta_y(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_w x + b_w xy + c_w x^2 + d_w x^3 \\ a_{\theta_x} x + b_{\theta_x} xy + c_{\theta_x} x^2 + d_{\theta_x}^3 \\ a_{\theta_y} x + b_{\theta_y} xy + c_{\theta_y} x^2 + d_{\theta_y}^3 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

avec $w(x, y)$ la flèche de la plaque dans la direction z , $\theta_x(x, y)$ et $\theta_y(x, y)$ les rotations de section autour de l'axe x et y , et $a_w, b_w, c_w, d_w, a_{\theta_x}, b_{\theta_x}, c_{\theta_x}, d_{\theta_x}, a_{\theta_y}, b_{\theta_y}, c_{\theta_y}$ et d_{θ_y} les coefficients de Ritz qui définissent le polynôme de chacune des 3 composantes de $\mathbf{u}(x, y)$.

L'application des équations de Lagrange aux équations 4 permet de retrouver les coefficients de Ritz et ainsi d'obtenir une formule analytique de la flexion de la plaque $\mathbf{u}(x,y)$ qui dépend des caractéristiques géométriques de la plaque rectangulaire (c'est-à-dire de la macrogéométrie des dents), des paramètres matériaux, de la position sur la plaque (x,y) (points de la ligne de contact où l'on souhaite observer la flexion), de la position d'application de la force F (points de la ligne de contact où la force est appliquée) et de son intensité. Ainsi, on peut remonter très rapidement aux coefficients de la matrice de souplesse des lignes de contact \mathbf{H} pour les N positions de la période d'engrènement. Cette méthode permet de reconstruire, pour chaque engrenage testé, l'EST et la raideur d'engrènement en un temps environ 1000 fois plus petit que dans un cas utilisant un modèle éléments-finis des dents.

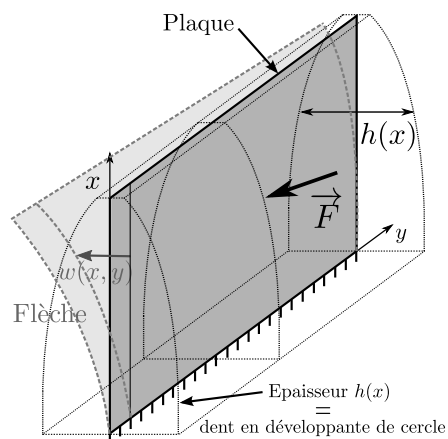


FIGURE 2 – Schéma du modèle analytique de flexion de dent

3 Définition des paramètres et objectifs de l'optimisation

3.1 Paramètres

Les paramètres de l'optimisation sont choisis sous certaines contraintes, à savoir :

- la transmission correspond à un engrenage inverseur (donc $Z_1 = Z_2$) avec les deux roues identiques,
- l'entraxe est imposé entre les deux roues,
- le jeu de dentures est imposé,
- la continuité du mouvement est assurée sans interférences,
- avec une résistance mécanique suffisante.

Sous ces conditions, les paramètres de l'optimisation sont à la fois macrogéométriques, à savoir :

- le choix de l'outil de taillage, qui définit le module m et l'angle de pression α ,
- l'angle d'hélice β ,
- le nombre de dents Z (avec $Z_1 = Z_2 = Z$),
- la saillie h_a ,

et microgéométriques, à savoir :

- un bombé d'hélice parabolique et symétrique,
- une dépouille en tête, définie par 2 paramètres qui sont la dépouille elle-même et sa profondeur.

Ainsi, un engrenage testé est une combinaison d'une macrogéométrie et d'une correction microgéométrique, qui vérifie les contraintes précédemment citées.

3.2 Objectifs robustes

Pour chaque engrenage testé par l'algorithme, une simulation de Monte-Carlo est effectuée pour modéliser l'existence de défauts de fabrication dans une classe de qualité définie. Le choix de 1000 tirages offre un bon compromis entre précision (3%) et temps de calcul. Les défauts pris en compte sont :

- les erreurs de profil (linéaire et parabolique),
- les erreurs d'hélice (linéaire et parabolique),
- les erreurs de parallélisme entre les roues.

Pour chacun des 1000 tirages aléatoires effectués, on reconstruit l'évolution de l'EST et de la raideur d'engrènement sur une période d'engrènement (cf. section 2.1), et on calcule la valeur efficace de la fluctuation de ces deux signaux. On peut ainsi reconstruire une densité de probabilité de fluctuation d'EST et de raideur. Les objectifs de l'optimisation sont les suivants :

- minimiser m_{ste} la moyenne de la densité de probabilité (PDF) des valeurs efficaces décrivant les fluctuations de l'EST (la PDF est construite à partir des 1000 simulations de Monte-Carlo)
- minimiser m_k la moyenne de la densité de probabilité des valeurs efficaces décrivant les fluctuations de raideur (la PDF est construite à partir des 1000 simulations de Monte-Carlo)

Chaque individu de l'algorithme d'optimisation est donc une combinaison d'une macro et microgéométrie pour laquelle une simulation de Monte Carlo de 1000 tirages de défaut aléatoires est faite, et les objectifs sont des moyennes des EST et raideur d'engrènement sur ces 1000 tirages (c'est-à-dire une valeur moyenne des excitations qui prend en compte la variabilité due aux défauts de fabrication).

4 Algorithme génétique utilisé

L'algorithme génétique utilisé, NSGA-II [19, 20], s'inspire de l'évolution des espèces dans leur cadre naturel, et consiste à faire évoluer des populations dont les individus, solutions de notre problème, tendent à s'améliorer en vue de nos objectifs au fur et à mesure que les générations se succèdent. Dans ce cadre, les termes utilisés pour expliquer son fonctionnement sont empruntés à la biologie, à savoir :

- une population est un ensemble d'individus (ici, un ensemble d'engrenages solutions du problème),
- un individu est une solution au problème (ici, un engrenage qui vérifie le problème),
- une génération est une itération de l'algorithme et correspond à une population.

Le fonctionnement de l'algorithme (cf. figure 3) se fait en 5 étapes :

- création d'une population initiale,
- calcul des objectifs pour chaque individu de la population (étape "d'évaluation"),
- création de nouveaux individus par mutations et/ou croisements,
- formation d'une nouvelle population avec d'éventuels nouveaux individus,
- répétition du processus sur plusieurs générations.

Les calculs ont été fait avec des populations de 100 engrenages sur 200 générations. La population finale qui nous intéresse regroupe plusieurs engrenages qui sont tous des compromis vis-à-vis des deux objectifs que nous avons fixés, à savoir la minimisation de la fluctuation de l'EST et de la raideur. Cette notion de compromis est essentiel dans la mesure où une modification des paramètres peut déboucher sur une augmentation de l'un et une diminution de l'autre. Généralement la visualisation de cette notion de compromis débouche sur une représentation sous forme de front de Pareto que nous utiliserons dans la partie résultat suivante.

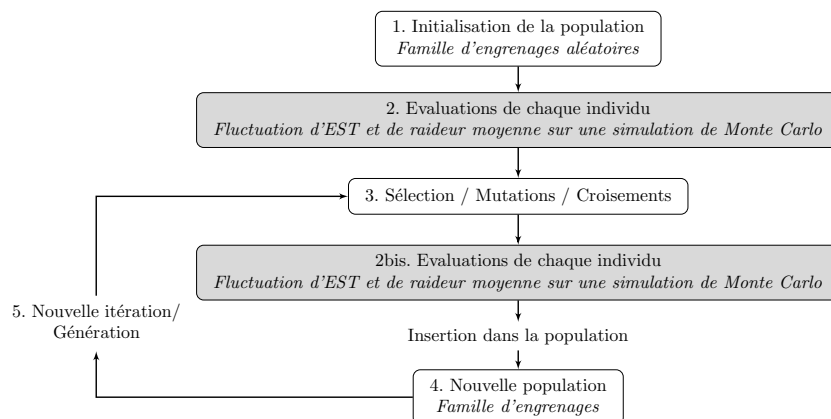


FIGURE 3 – Fonctionnement de l'algorithme génétique NSGA-II

5 Application

Nous prenons ici l'exemple d'une chaîne cinématique composée de deux arbres contra-rotatifs animés par un engrenage inverseur. L'entraxe de fonctionnement est $a = 38$ mm, le couple à transmettre est $C = 10$ N.m, et le jeu fonctionnel est imposé. Les résultats sont présentés uniquement pour un outil de taillage fixé (module $m = 2$ mm et angle de pression $\alpha = 20^\circ$ (paramètre de l'outil fixé).

La figure 4 donne le front de Pareto obtenu à la dernière génération de l'algorithme. Chaque point est un engrenage optimisé, défini en abscisse par m_k la moyenne de la PDF des valeurs efficaces de la fluctuation de raideur et en ordonnée par m_{ste} la moyenne de la PDF des valeurs efficaces de la fluctuation d'EST (pour 1000 tirages de défauts aléatoires). Cette courbe présente également un aperçu de la dispersion via les écarts-types σ_{ste} et σ_k de chaque engrenage (correspondant respectivement à l'écart-type de la PDF des valeurs efficaces des fluctuations d'EST et respectivement de raideur pour l'engrenage représenté par son point). La prise en compte de cette dispersion montre qu'il est nécessaire d'élargir le front de Pareto à des points/engrenages qui ne sont pas nécessairement inclus dans ce front mais qui présentent un intérêt en terme de performances mais aussi possiblement en terme d'espace de conception possibles.

Dans ce sens, la figure 5 présente les engrenages optimums générés par l'algorithme dans le cas d'un front de Pareto "élargi" sous forme d'un nuage de points composé de plus d'engrenages. Par souci de lisibilité, la figure ne donne pas d'aperçu de la dispersion.

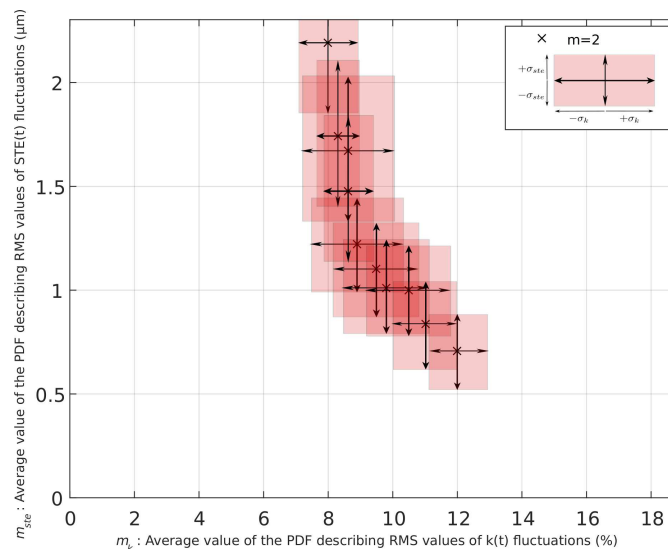


FIGURE 4 – Front de Pareto pour l'outil de taillage ($m = 2$ mm et $\alpha = 20^\circ$)

L'engrenage initial était caractérisé par une moyenne de la PDF des fluctuations de raideur de 16% et une moyenne de la PDF des fluctuations d'EST de $3 \mu\text{m}$. L'optimisation nous a permis d'obtenir plusieurs engrenages qui sont caractérisés par des moyennes de PDF fluctuations de raideur entre 8 et 12 % et des moyennes de PDF des fluctuations d'EST entre 0.5 et $2.5 \mu\text{m}$.

Le tableau 5 donne 4 engrenages intéressants qui caractérisent bien le type de résultats que l'on peut obtenir (cf. points bleus dans le graphique 4).

Les trois engrenages sélectionnés ont des moyennes de la PDF des fluctuations de raideur proches (entre 8.3 et 9.3%), et des moyennes de la PDF des fluctuations d'EST similaires (entre 1.4 et 1.7 mm), mais présentent toutefois des géométries différentes. Le premier engrenage a un angle d'hélice faible, un coefficient de déport quasi nul, un coefficient de saillie faible et ne présente pas de corrections microgéométriques. Le deuxième engrenage a un coefficient de déport légèrement plus important et présente une correction microgéométrique correspondant à un bombé d'hélice. Le troisième engrenage a un coefficient d'hélice plus important (20°), un coefficient de déport non-négligeable, un coefficient de saillie plus classique et présente une correction qui correspond à une dépouille en tête de dent.

Le quatrième engrenage présente l'avantage d'avoir une fluctuation d'EST plus faible que les trois autres, avec néanmoins une fluctuation de raideur qui dépasse les 10%. Ses paramètres sont également différents,

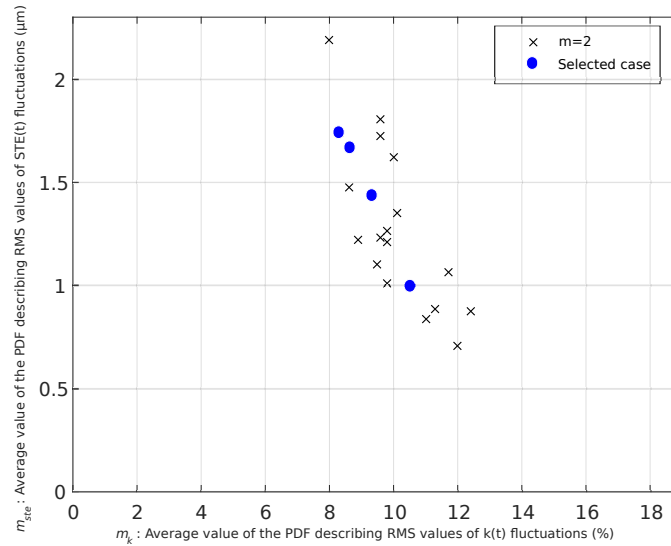


FIGURE 5 – Front de Pareto "élargi" pour l'outil de taillage ($m = 2$ mm et $\alpha = 20^\circ$)

avec un coefficient d'hélice de 25° , un coefficient de saillie très classique et une correction microgéométrique qui correspond à une dépouille en tête.

La responsabilité revient au designer/concepteur de choisir l'engrenage qui correspond le plus à ses attentes aussi bien en terme d'objectifs que de configuration, et de fabrication. L'utilisateur devra également prendre en compte le système auquel il est intégré pour déterminer l'objectif à privilégier.

TABLE 1 – Sélection de 4 engrenages optimums

Outil		Paramètres macrogéométriques			Paramètres microgéométriques			Objectifs		Robustesse		
Module (mm)	Angle Pres. ($^\circ$)	Dents	Coeff. départ	Hélice ($^\circ$)	Coeff. saillie	Bom. HéL. (μm)	Dép. (μm)	Prof. Dép. mm	RMS Raid. m_k (%)	RMS EST. m_{ste} (μm)	σ_{ste} (%)	σ_k (μm)
2	20	19	-0.036	5	0.590	0	0	0.000	8.3	1.741	0.6	0.34
2	20	18	0.408	10	0.688	5	0	0.000	8.6	1.670	0.8	0.34
2	20	17	0.521	20	0.795	0	5	0.409	9.3	1.439	1.4	0.23
2	20	16	0.804	25	0.903	0	5	0.431	10.5	0.997	1.2	0.20

6 Conclusion

Ce papier présente une méthode d'optimisation multi-objectifs robuste des engrenages qui vise à minimiser les excitations générées par le processus d'engrènement en jouant sur des paramètres à la fois macro et microgéométriques. Cette méthode utilise un algorithme génétique de type NSGA-II ainsi qu'un modèle analytique de flexion de denture basé sur une approximation "plaques épaisses" des dents couplé à un modèle de Ritz, qui permet de reconstruire rapidement les évolutions des erreurs statiques de transmission et de la raideur d'engrènement. Ce modèle permet une reconstitution des excitations du processus d'engrènement environ 1000 fois plus rapide qu'avec un modèle éléments finis. Les objectifs prennent en compte la robustesse des solutions aux défauts de fabrication en effectuant, au sein même de l'algorithme génétique et pour chaque engrenage, une simulation de Monte-Carlo de 1000 tirages de défauts aléatoires. L'algorithme fournit ainsi des engrenages qui sont autant de compromis vis-à-vis des 2 objectifs que sont : la moyenne de la PDF des valeurs efficaces de la fluctuation d'erreur de transmission et la moyenne de la PDF des valeurs efficaces de la de la raideur d'engrènement. Cette méthode permet de fournir à l'utilisateur un outil d'aide à la décision pour choisir une solution robuste d'engrenage qui génère moins d'excitations, en fonction des paramètres macro et microgéométriques préférables et de son cas d'utilisation.

Remerciements

Les auteurs sont membres du LabCom LADAGE (LABoratoire de Dynamique des engrenAGES), créé par le LTDS et la société VIBRATEC et soutenu par l'Agence Nationale de la Recherche dans

le cadre du programme ANR-14-LAB6-0003. Ils sont également membres du Labex CeLyA (Centre Acoustique Lyonnais). Ce travail a été réalisé dans le cadre du projet ARPE (Acoustique et vibRation des Pompes à vide, FUI AAP 19) en collaboration avec les sociétés PFEIFFER VACUUM, VIBRATEC et INOPRO.

Références bibliographiques

Références

- [1] Didier Rémond, Philippe Vexex, and Jean Sabot. Comportement dynamique et acoustique des transmissions par engrenages : synthèse bibliographique. *Publication CETIM*, 1993.
- [2] Emmanuel Rigaud. *Interactions dynamiques entre denture, lignes d'arbres, roulements et carter dans les transmissions par engrenages*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 1998.
- [3] DB Welbourn. Fundamental knowledge of gear noise : a survey. Technical report, 1979.
- [4] Emmanuel Rigaud and Denis Barday. Modélisation et analyse de l'erreur statique de transmission d'un engrenage. influence des déformations des roues et interactions entre les couples de dents en prise. *Mécanique industrielle et matériaux*, 51 :58–60, 1998.
- [5] Emmanuel Rigaud and Denis Barday. Modelling and analysis of static transmission error. effect of wheel body deformation and interactions between adjacent loaded teeth. In *4th world congress on gearing and power transmission, Paris*, volume 3, pages 1961–1972, 1999.
- [6] Emmanuel Rigaud, Jean Sabot, and Joël Perret-Liaudet. Effect of gearbox design parameters on the vibratory response of its housing. In *4th World Congress on Gearing and Power Transmission, Paris*, volume 3, pages 2143–2148, 1999.
- [7] Alexandre Carbonelli. *Caractérisation vibro-acoustique d'une cascade de distribution poids lourd*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2012.
- [8] Alexandre Carbonelli, Emmanuel Rigaud, and Joël Perret-Liaudet. Vibro-acoustic analysis of geared systems - predicting and controlling the whining noise. In *Automotive NVH Technology*, pages 63–79. Springer, 2016.
- [9] M Umeyama. Effects of deviation of tooth surface errors of a helical gear pair on the transmission error. *Nippon Kikai Gakkai Ronbunshu, C Hen/Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Part C*, 61(587) :3101–3107, 1995.
- [10] Syuhei Kurokawa, Yasutsune Ariura, and Masaru Ohtahara. Transmission errors of cylindrical gears under load-influence of tooth profile modification and tooth deflection. *American Society of Mechanical Engineers, Design Engineering Division (Publication) DE*, 88 :213–217, 1996.
- [11] Alexander L Kapelevich and Roderick E Kleiss. Direct gear design for spur and helical involute gears. *Gear Technology*, 19(5) :29–35, 2002.
- [12] CH Wink and AL Serpa. Investigation of tooth contact deviations from the plane of action and their effects on gear transmission error. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C : Journal of Mechanical Engineering Science*, 219(5) :501–509, 2005.
- [13] Raynald Guilbault, Claude Gosselin, and Louis Cloutier. Helical gears, effects of tooth deviations and tooth modifications on load sharing and fillet stresses. *Journal of Mechanical Design*, 128(2) :444–456, 2006.
- [14] A Kahraman, P Bajpai, and NE Anderson. Influence of tooth profile deviations on helical gear wear. *Journal of Mechanical Design*, 127(4) :656–663, 2005.
- [15] Lars Vedmar. *On the design of external involute helical gears*. na, 1981.
- [16] N Driot, E Rigaud, J Sabot, and J Perret-Liaudet. Allocation of gear tolerances to minimize gearbox noise variability. *Acta Acustica united with Acustica*, 87(1) :67–76, 2001.
- [17] E. Reissner. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 12 :69–76, 1945.
- [18] E. Reissner. On a variational theorem in elasticity. *Journal of Mathematics and Physics*, 29 :90–95, 1950.
- [19] K. Deb, S. Agrawal, A. Pratap, and T. Meyarivan. A fast elitist non-dominated sorting genetic algorithm for multi-objective optimization : Nsga-2. *Notes in Computer Science*, 2000.
- [20] K. Deb, A. Pratap, S. Agrawal, and T. Meyarivan. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm : Nsga-2. *Transactions on evolutionary computation*, 6 (2), 2002.