

Métamodèle par POD-RBF pour l'optimisation des procédés de mise en forme.

V.T. Dang, P. Lafon, C. Labergère

LASMIS, ICD, Université de Technologie de Troyes, Troyes, France, {van_tuan.dang, pascal.lafon, carl.labergere}@utt.fr

Résumé — Un méta-modèle est proposé basé sur une combinaison de technique de décomposition aux valeurs propres (POD) et fonction à base radiale (RBF) pour représenter la dépendance des paramètres sur les procédés de mise en forme. L'objectif est de présenter la POD pour la représentation des champs de déplacement après retour élastique. Après avoir trouvé une base réduite et une interpolation de POD coefficient par réseau à RBF permettant l'évaluation d'influence des paramètres sur la qualité de forme de retours élastique et optimisation des paramètres procédés.

Mots clés — décomposition aux valeurs propres (POD), fonction à base radiale (RBF), mise en forme, emboutissage.

1 Introductions

Dans le cadre de système mécanique, l'utilisation raisonnée d'essais expérimentaux pour optimiser les procédés de fabrication est très ancienne. Les progrès de la simulation numérique ont permis de remplacer très avantageusement l'expérimentation par la simulation. Mais en raison des temps de calculs significatifs, surtout pour des modèles fins donc plus prédictifs, il est difficile d'envisager qu'une simulation numérique « haute-fidélité » fine du procédé soit mise en œuvre pour chaque itération du processus d'optimisation. Cette problématique n'est d'ailleurs pas limitée aux procédés de fabrication, elle concerne également tous les problèmes d'optimisation mettant en œuvre des modèles de comportement coûteux à évaluer. Le remplacement du modèle « haute-fidélité » est nécessaire pour réduire le temps de calcul des réponses.

Pour s'affranchir de cette contrainte, les démarches développées dernièrement dans l'optimisation des procédés consistaient à construire un modèle intermédiaire, très rapide à évaluer, à partir d'un nombre limité de simulations numériques du procédé. Il existe de nombreuses techniques pour construire ce modèle intermédiaire dénommé « métamodèle » en fonction des techniques utilisées, et sont disponibles dans la littérature [1], [2]. Dans notre travail, un « méta modèle » est une combinaison POD-RBF.

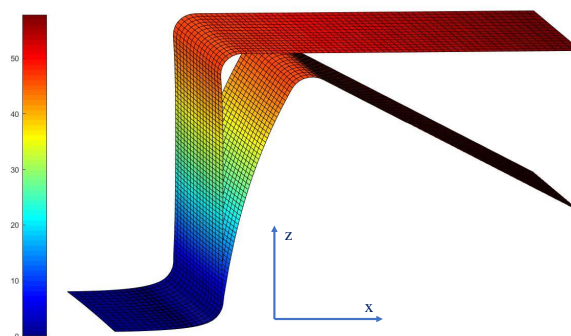


FIGURE 1 – Champ de déplacements de forme emboutie et après retours élastique

L'idée principale consiste à décomposer un champ de déplacements après retours élastique en une

combinaison linéaire de modes restreints, calculés à partir de la matrice de covariance construite avec des clichés des champs d'éléments finis de la simulation « haute-fidélité » (voir figure 1). Sur la base de la « méthode des clichés » [3], on trouve une base réduite orthogonale et le coefficient de POD sera interpolé par RBF sur l'espace des paramètres permettant la description de la dépendance des paramètres sur la variation de la forme de pièce après retour élastique.

Dans les sections suivantes, l'idée principale de la POD est présentée, ensuite la méthode de fonction à base radiale utilisée pour interpoler les coefficients de POD, puis l'application pour le problème d'emboutissage de tôle sont décrites.

2 Méthode de décomposition aux valeurs propres pour le problème paramétrique

Supposons qu'on veuille approcher un champ scalaire $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ sur le domaine $\mathcal{D} \times \Omega$ par une combinaison linéaire finie de fonctions de base $\Psi^k(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) \simeq \mathbf{u}_{moy} + \sum_{k=1}^K \Psi^k(\mathbf{x}) a^k(\boldsymbol{\theta}) \quad (1)$$

où \mathbf{x} est une coordonnée spatiale, $\boldsymbol{\theta}$ un paramètre, K est nombre de bases de POD et \mathbf{u}_{moy} est le champ moyen calculé sur tous les clichés. On peut l'écrire sous la forme suivant :

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) - \mathbf{u}_{moy} \simeq \sum_{k=1}^K \Psi^k(\mathbf{x}) a^k(\boldsymbol{\theta}) \quad (2)$$

La décomposition orthogonale aux valeurs propres permet de trouver des fonctions de base adaptées au problème. Les solutions $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ appartiennent à un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $(.,.)$. Ces fonctions sont appelées modes POD et forment un système orthonormé :

$$\left(\Psi^k(\mathbf{x}), \Psi^l(\mathbf{x}) \right) = \delta_{kl} \quad (3)$$

où $\delta_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{si } k \neq l \end{cases}$ est le symbole de Kronecker.

L'approximation définie par (2) est la projection de $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ sur l'espace engendré par les modes Ψ_k , $k = 1, 2, \dots, K$. Il suffit d'évaluer l'ensemble des fonctions d'interpolation $a_k(\boldsymbol{\theta})$ pour obtenir la meilleure approximation de la fonction $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$. Dans ce cas, les coefficients POD, $a_k(\boldsymbol{\theta})$ sont les coordonnées de la projection de $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ sur cet espace. Ces coefficients sont calculés par la projection de $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ sur chaque mode POD, c'est-à-dire :

$$a_k(\boldsymbol{\theta}) = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) \Psi^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (4)$$

En supposant qu'on connaît N solutions $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ (par mesures expérimentales ou par calcul numérique a priori) pour différents paramètres $a_k, k = 1, \dots, N$, l'approximation POD (2) équivaut à chercher des fonctions de base pour que la moyenne de N erreurs de projections au carré soit minimale. Dans le cas discret, les solutions $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ sont représentées par des champs d'éléments finis sous forme de vecteurs. Dans ce cadre, l'espace de Hilbert des solutions est un espace vectoriel euclidien \mathbb{R}^d , muni du produit scalaire $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T \mathbf{v}$. On notera $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$ la norme euclidienne associée.

On considère un ensemble \mathcal{S}^{exp} de N_{exp} données vectorielles dans \mathbb{R}^d correspondant à des champs de solutions d'un système d'EDP. Chaque solution $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}^i)$ est calculée par le code éléments finis pour un jeu de paramètres $\boldsymbol{\theta}^i$:

$$\mathcal{S}^{exp} = \{ \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}^i), i = 1, 2, \dots, N_{exp} \} \quad (5)$$

Les modes POD seront les solutions du problème d'optimisation suivant : étant donné un entier $N \ll N_{exp}$, trouver la famille de vecteurs $\{\Psi^k(\mathbf{x})\}_{k=1,\dots,K}$, qui satisfait (2) pour minimiser d'erreur de projection :

$$\min_{(\Psi^1, \Psi^2, \dots, \Psi^K)} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{exp}} \|\bar{\mathbf{u}}^i - \sum_{k=1}^K \langle \bar{\mathbf{u}}^i, \Psi^k \rangle \Psi^k\|^2 \quad (6)$$

En supposant que les modes POD soient orthonormés, le problème (6) équivaut à rechercher :

$$\max_{(\Psi^1, \Psi^2, \dots, \Psi^K)} \sum_{i=1}^{N_{exp}} \sum_{k=1}^K \langle \bar{\mathbf{u}}^i, \Psi^k \rangle^2 \quad (7)$$

On notera $\mathbf{X} \in \mathbf{M}_{dN_{exp}}$ la matrice constituée des vecteurs $\bar{\mathbf{u}}^i$ en colonnes, c'est-à-dire :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} u_1^1 & u_1^2 & \cdots & u_1^n \\ u_2^1 & u_2^2 & \cdots & u_2^n \\ \vdots & & \ddots & \\ u_d^1 & u_d^2 & \cdots & u_d^n \end{pmatrix} \quad (8)$$

Les modes POD sont exactement les K premiers vecteurs propres (ou K premières composantes principales en statistique) de la matrice $\mathbf{A} = \mathbf{X}\mathbf{X}^T$ (démonstration dans [4]), où les colonnes de la matrice \mathbf{X} représentent les solutions $\bar{\mathbf{u}}^i$. Pour des raisons de coût de calcul, ces vecteurs propres sont en fait dérivés des vecteurs propres \mathbf{v}^k et valeurs propres λ^k de matrice $M = \mathbf{X}^T\mathbf{X}$ via la formule dans [5] suivante :

$$\Psi^k = \frac{1}{\sqrt{\lambda^k}} \sum_{i=1}^{N_{exp}} (\mathbf{v}^k)_i \bar{\mathbf{u}}^i \quad (9)$$

Le rang de troncature K peut être calculé de façon à s'assurer que la projection de tous exemples $\bar{\mathbf{u}}^i$ sur sur l'espace engendré par les vecteurs propres conduit à une erreur de projection inférieure à une certaine tolérance ε . Ainsi, pour tout critère de tolérance d'erreur $\varepsilon > 0$, et en indexant les valeurs propres de sorte à avoir $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_{N_{exp}}$, le rang de troncature $K(\varepsilon)$ est défini comme le plus petit entier tel que :

$$\frac{\sum_{k=K+1}^{N_{exp}} \lambda^k}{\sum_{k=1}^{N_{exp}} \lambda^k} \leq \varepsilon \quad (10)$$

Le modèle POD d'ordre m (avec des modes de m) est défini comme suit :

$$\mathbf{u}_{pod} = \mathbf{u}_{moy} + \sum_{k=1}^m a_k(\boldsymbol{\theta}) \Psi^k(\mathbf{x}) \quad (11)$$

où chaque coefficient POD a_k est calculé par (4) sous forme discret :

$$a_k(\boldsymbol{\theta}^i) = \langle \bar{\mathbf{u}}^i, \Psi^k \rangle \quad (12)$$

est approché au-dessus de l'espace de paramètres par RBF interpolation

3 Réseau de fonction à base radiale

L'architecture d'un réseau de fonction à base radiale est représentée sur la figure 2. Un vecteur d'entrée $\boldsymbol{\theta}$ est pour toutes les fonctions à base radiale, chacun avec des paramètres différents. La sortie du réseau est une combinaison linéaire des sorties de fonctions à base radiales.

Dans cette section, la théorie de la RBF interpolation est brièvement passé en revue. La méthode d'interpolation RBF construit une fonction d'approximation en utilisant la forme de :

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_i \Phi(\|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_i\|) \quad (13)$$

où la fonction d'interpolation $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})$ est représentée comme une combinaison linéaire de n fonctions radiales Φ , n représente le nombre de fonctions radiales et $\|\cdot\|$ est une norme euclidienne. Chaque RBF est associée à un autre centre θ_i , et pondérée par un coefficient w_i . $\boldsymbol{\theta}$ désigne un point de données dans l'espace multidimensionnel et il se compose d'un ensemble complet de coefficients POD pour les champs de deux coordonnées telles que la solution coordonnée x et coordonnée z . L'argument de cette fonction est la distance $\|\boldsymbol{\theta} - \theta_i\|$ entre un ensemble actuel de paramètres θ_i et le vecteur de paramètre de référence.

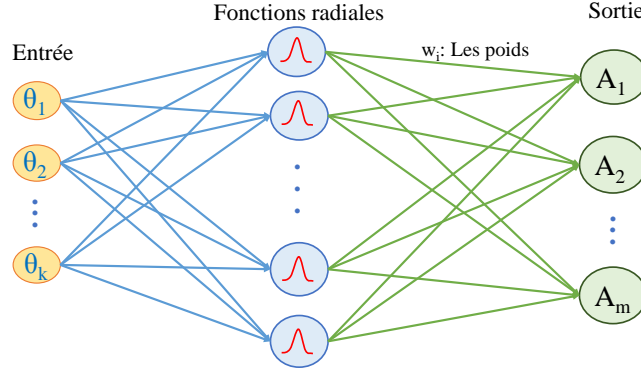


FIGURE 2 – Représentation connexionniste d'un réseau RBF : A gauche la couche d'entrée $\boldsymbol{\theta}$, au centre les centres RBF, à droite la sortie \mathbf{A} .

Les poids w_i sont déterminées en faisant en sorte que la fonction d'interpolation des valeurs $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})$ correspond exactement aux données indiquées par \mathbf{A} . Ceci est obtenu par l'application $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{A}$, qui produit une équation linéaire :

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{W} \quad (14)$$

où :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \Phi(\|\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}_1\|) & \Phi(\|\boldsymbol{\theta}_2 - \boldsymbol{\theta}_1\|) & \cdots & \Phi(\|\boldsymbol{\theta}_n - \boldsymbol{\theta}_1\|) \\ \Phi(\|\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}_2\|) & \Phi(\|\boldsymbol{\theta}_2 - \boldsymbol{\theta}_2\|) & \cdots & \Phi(\|\boldsymbol{\theta}_n - \boldsymbol{\theta}_2\|) \\ \vdots & & \ddots & \\ \Phi(\|\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}_n\|) & \Phi(\|\boldsymbol{\theta}_2 - \boldsymbol{\theta}_n\|) & \cdots & \Phi(\|\boldsymbol{\theta}_n - \boldsymbol{\theta}_n\|) \end{pmatrix} \quad (15)$$

est la matrice des fonctions d'interpolation $\Phi(\|\boldsymbol{\theta} - \theta_i\|)$ pour n clichés. Une rangée de la matrice \mathbf{B} correspond à une valeur des paramètres de référence θ_j . La colonne j de la matrice est générée en prenant la valeur des paramètres utilisés pour générer θ_j cliché j -ième. θ_i, θ_j - vecteurs de paramètres utilisés pour générer i -ème ou snapshot j -ème adéquatement, pour $i, j = 1, \dots, n$.

$\mathbf{A} = [A_1, A_2, \dots, A_n]$ est coefficients POD et $\mathbf{W} = [w_1, w_2, \dots, w_n]$ sont les poids qui sont ensuite déterminées en résolvant le système linéaire (14).

$$\mathbf{W} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A} \quad (16)$$

La précision d'interpolation par RBF dépend largement du choix de fonctions radiales. Il y a certaines formes qui peuvent être choisies les suivantes :

- Fonction gaussienne : $\Phi(r) = e^{-r^2/2\sigma^2}$
- Multiquadriques : $\Phi(r) = (r^2 + c^2)^{1/2}$
- Quadriques inverse : $\Phi(r) = \frac{1}{r^2 + c^2}$
- Multiquadriques inverses : $\Phi(r) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + c^2}}$

Dans cet travail, nous utilisons l'outil SUMO [6] pour l'apprentissage des modèle RBF. L'espace d'entrée est l'espace des paramètres, l'espace de sortie celui des coefficients POD

4 Application au cas de l'emboutissage d'une tôle en U

On se propose d'appliquer la démarche de construction d'un métamodèle présenté précédemment au cas du benchmark NUMISHEET 2011 [7].

4.1 Description du problème

Ce benchmark traite de l'emboutissage en U profond (voir figure 3), d'un flan de tôle d'acier DP780 d'épaisseur 1.4 mm, de 360 mm de long et de 30 mm de large. Dans *ABAQUS – CAE*^(TM) ce flan est discrétisé par un maillage de 2080 éléments coques S4R avec 7 points d'intégration. Le modèle comportement adopté est un modèle de Swift associé à un critère de HILL 48 pour l'anisotropie. Les outillages sont considérés comme rigides et modélisés avec une géométrie analytique dans *ABAQUS*^(TM). L'interaction entre le flan et les outillages est modélisée par un contact pénalisé de type surface/surface.

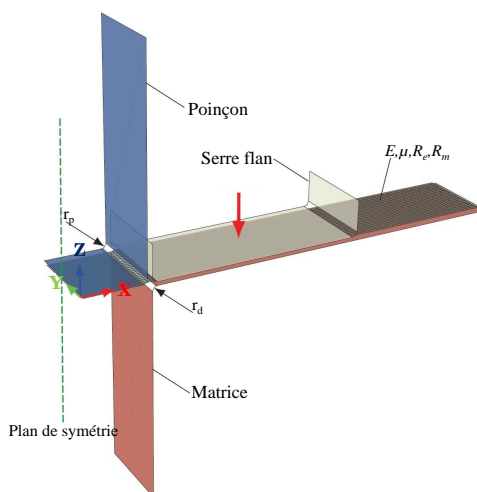


FIGURE 3 – Modèle d'emboutissage du benchmark NUMISHEET2011

Le calcul est réalisé en deux étapes, d'abord l'emboutissage avec le solveur dynamique explicite d'*ABAQUS*^(TM) puis le retour élastique avec le solveur en statique implicite.

Le modèle de simulation de ce procédé d'emboutissage est paramétré en fonction des 2 paramètres : la force de serrage du flan F_{BHF} , changement de 2900N à 12900N et rayon de matrice r_d , changement de 2 à 4mm. Deux variable conception est réalisé par un plan d'expérience type "full factoriel" avec 55 points (voir figure 4).

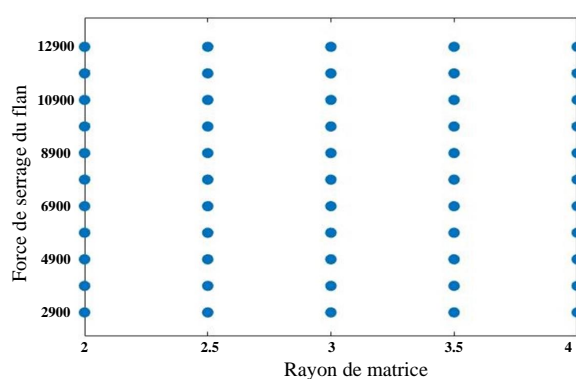


FIGURE 4 – Deux variable conception avec 55 points

Les paramètres suivant : μ le coefficient de frottement serre flan/flan, les propriétés de l'acier DP780 avec R_e pour la limite élastique, R_m pour la limite à la rupture, l'épaisseur t de la tôle emboutie et le rayon du poinçon r_p sont fixés. Avec 55 points du plan d'expérience, on a 55 clichés qui sont calculé par la simulation "haute fidélité". Chaque simulation nécessite environ 2h30 de calculs sur une station de travail cadencée à 2.2 GHz. Le champ de déplacement est un champ vectoriel bidimensionnel à deux composantes U_x et U_z (dans le repère de la figure 3, le champ de déplacement en direction y est très faible). La POD est construite pour chaque composante pour obtenir les modes Ψ et les coefficients POD

sont interpolés par réseau de fonction à base radiale. Puis, le modèle réduit POD-RBF sera reconstruit à partir des modes et les coefficients interpolés.

4.2 Discussion des résultats

Analyse d'erreur

Premièrement, on peut voir qu'il me semble que c'est l'erreur qui diminue avec l'augmentation des modes de POD pour U_x et U_z sur la figure 5a. Les premières valeurs diminuent rapidement. Pour choisir les modes nécessaires pour tronquer la décomposition, on considère la quantité d'erreur ε définie par l'équation (10) est tracée en fonction du nombre de modes POD pour les deux modèle POD de la figure 5b. Avec les 4 premiers modes, on observe le quantité d'erreur $\varepsilon \sim 10^{-4}$ pour les deux composantes U_x et U_z .

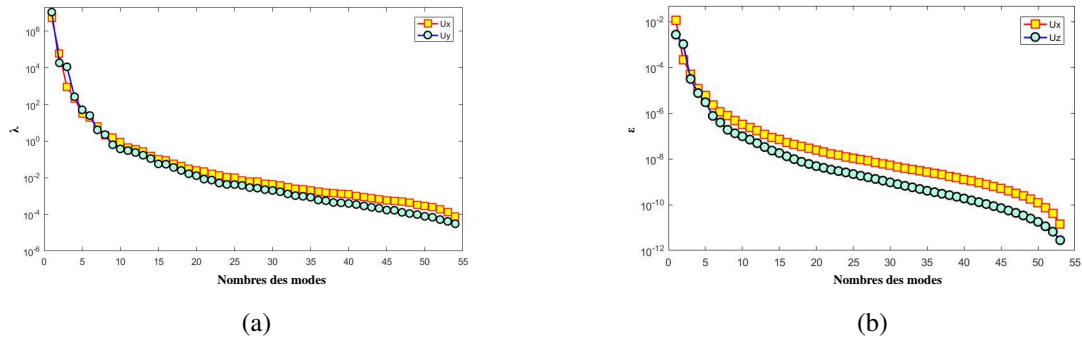


FIGURE 5 – Valeurs propres (a) et quantité d'erreur (b) pour U_x et U_z

Analyse des coefficients POD

On s'intéresse aux premiers coefficients POD. Car ils sont plus importants pour évaluer l'influence sur la forme globale de champ de déplacement après retour élastique. Les premiers coefficients POD sont interpolés l'espace des paramètres par le réseau RBF pour deux composantes. Dans ce cas, on choisit la fonction radiale multiquadrique pour l'apprentissage des modèles RBF.

Sur les figure 6a et 6b, on voit bien que le rayon de matrice a une influence plus importante que la force du serre flan sur les champ de déplacement après retour élastique et par conséquent sur la qualité des pièces embouties. Ces coefficient POD peuvent-être utilisés pour résoudre des problèmes de conception optimale et par conséquent obtenir forme désirée après retour élastique. Par ailleurs, à partir de la base réduite et les coefficients POD interpolés, on peut reconstruire le problème inverse pour une nouvelle solution et prédire la forme finale de pièce avec nouveau point du plan d'expérience.

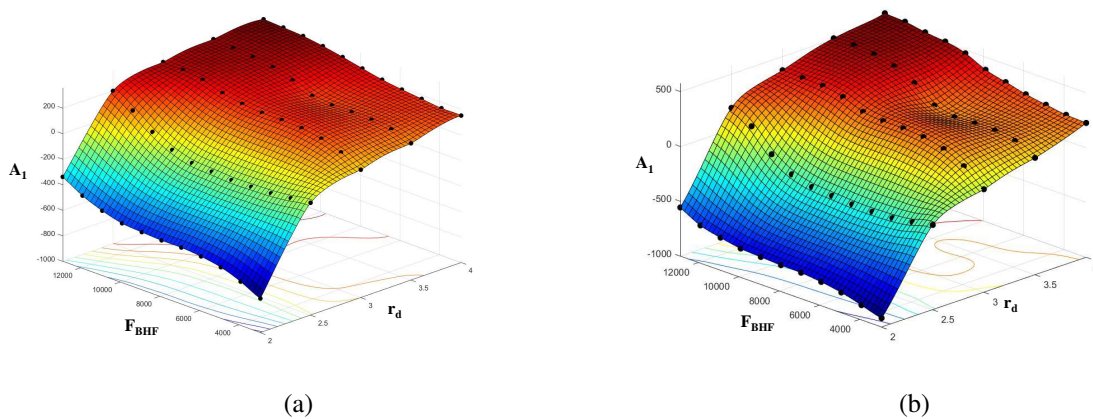


FIGURE 6 – Premier coefficient POD pour U_x et U_z

Comparaison entre du modèle FEM et du modèle POD-RBF

La figure 7 montre une comparaison du profil après retour élastique du modèle "haute fidélité" FEM et du modèle POD-RBF du point 55 du plan d'expériences ($r_d = 4$ mm, $F_{BHF} = 12900$ N). Les profils tracés sont les solutions obtenues pour 1,2,3 et 4 modes respectivement. On peut voir que la solution à 4 modes est très proche avec la solution par FEM.

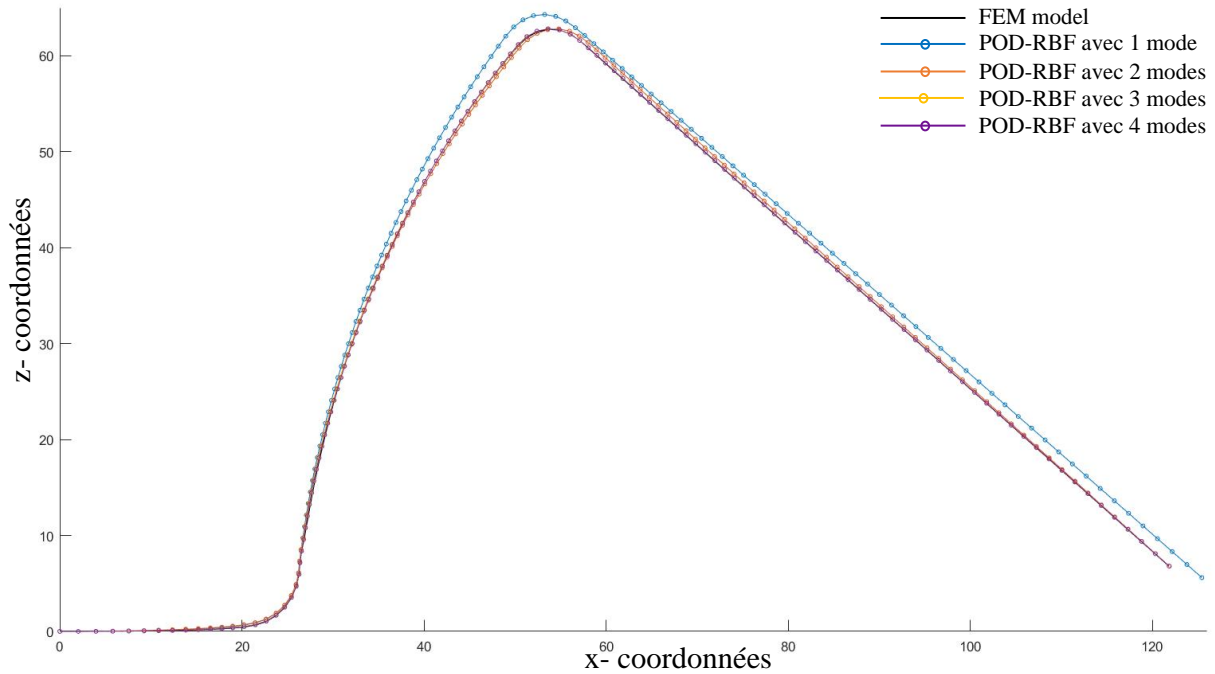


FIGURE 7 – Comparaison du profil entre modèle FEM et modèle POD-RBF du point 55 du plan d'expériences ($r_d = 4$ mm, $F_{BHF} = 12900$ N)

Sur la figure 8, on trace les erreurs relative entre la solution du modèle POD-RBF et du modèle FEM à chaque point du plan d'expériences. Les erreurs relatives sont mesurées dans la norme \mathcal{L} sont d'environ 10^{-3} . Cela montre que notre proposition de métamodèle POD-RBF est une bonne approximation du modèle haute fidélité obtenu par éléments finis (au moins sur les 55 clichés du plan d'expériences)

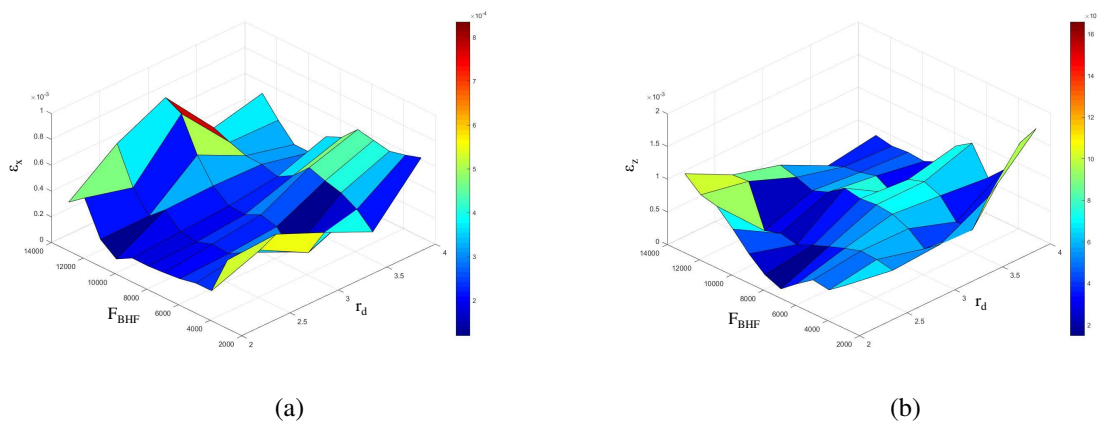


FIGURE 8 – Erreur prédiction pour U_x (a) et U_z (b) avec 4 modes

5 Conclusions

Dans ce travail, nous proposons un métamodèle basé sur la méthode de décomposition aux valeurs propres associé à réseau de fonction à base radiale. Elle permet de remplacer la simulation "haute fidélité"

qui a le temps de calcul souvent prohibitif. La métamodèle POD-RBF permet d'évaluer l'influence des paramètres sur la forme finale et d'optimiser des paramètres pour les procédés de mise en forme. En outre, elle peut-être considérée comme un approche inverse pour trouver et prédire une nouvelle forme finale du problème de mise en forme.

Références

- [1] S. Walton, O. Hassan, K. Morgan. *Reduced order modelling for unsteady fluid flow using proper orthogonal decomposition and radial basis functions*, Applied Mathematical Modelling, Volume 37, Issues 20-21, pages 8930-8945, 2013.
- [2] M. Hamdaoui, G-L. Quilliec, P. Breilkopf, P.Villon. *POD Surrogates for Real-Time Multi-Parametric Sheet Metal Forming Problems*, International Journal of Material Forming, Volume 7, pages 337-358, 2013.
- [3] L. Sirovich. *Turbulence and the Dynamics of Coherent Structures, Part1 : Coherent Structures*, Vol. 45. Quarterly of Applied Mathematics 3. Brown University, Division of Applied Mathematics, Oct. 1987, pp. 561-571
- [4] A. Chatterjee. *An introduction to the proper orthogonal decomposition*, Current science, Volume 78, pages 808-817, 2000
- [5] F.D. Vuyst, C. Audouze. *Optimisation multidisciplinaire en mécanique 2*, chapitre 2, LAVOISIER, pages 73-122, 2009.
- [6] D. Gorissen, I. Couckuyt, P. Demeester, T. Dhaene. *A Surrogate Modeling and Adaptive Sampling Toolbox for Computer Based Design*, Journal of Machine Learning Research, Volume 11, pages 2051-2055, 2010.
- [7] Huh H, Chung K, Han SS, and Chung WJ. *Benchmark study of the 8th international conference and workshop on numerical simulation of 3d sheet metal forming processes*. Proceedings of Numisheet 2011, 2011.