

Vers une optimisation simultanée de la topologie et de l'anisotropie d'une structure

N. Ranaivomiarana¹, F.-X. Irisarri¹, D. Bettebghor¹, B. Desmorat²

¹ *Onera, Châtillon, {narindra.ranaivomiarana, francois-xavier.irisarri, dimitri.bettebghor}@onera.fr*

² *Sorbonne Universités, UPMC Univ Paris 06, CNRS, UMR 7190, Institut Jean Le Rond d'Alembert, F-75005 Paris, France, boris.desmorat@upmc.fr*

Résumé — Cet article présente une méthode permettant d'optimiser conjointement la forme et l'anisotropie d'une structure. Le critère considéré est la rigidité mesurée par la compliance. La densité et les tenseurs d'élasticité sont désignés comme paramètres d'optimisation. Le problème est résolu en alternant un calcul élément fini et des problèmes de minimisations locales qui peuvent être résolus analytiquement grâce à l'utilisation du formalisme polaire. Des exemples numériques sont illustrés pour démontrer l'efficacité de la méthode.

Mots clés — Optimisation topologique, Densité, Anisotropie, Formalisme polaire.

1 De la nécessité de l'optimisation simultanée de la forme et de l'anisotropie du matériau dans l'industrie aéronautique

Les travaux présentés dans cet article sont réalisés dans le cadre d'une thèse Onera financée par STELIA Aerospace. Un enjeu majeur de l'industrie aéronautique actuellement est de minimiser le coût et la masse des structures. L'optimisation topologique est une approche conceptuelle permettant de définir un premier design pour alléger une structure. Elle consiste à déterminer la distribution de matière optimale dans une structure soumise à des contraintes. Pour aller plus loin dans la réduction de coûts, les industriels en aéronautique cherchent également à introduire un matériau plus léger que ceux ordinairement utilisés tels que l'aluminium ou le titane : on pratique de plus en plus l'optimisation de structures composites, généralement paramétrique, qui s'attèle par exemple à déterminer les meilleures séquences d'empilement pour un stratifié. Cependant, d'une part, l'optimisation topologique permet classiquement de trouver la meilleure forme de la structure pour des matériaux isotropes donnés ; et d'autre part, l'optimisation de structures composites, de trouver un matériau composite anisotrope optimal à forme fixée. Une méthode habituellement pratiquée dans l'industrie est d'optimiser dans un premier temps la topologie de la structure à matériau isotrope donné, puis de chercher dans un second temps le matériau optimal sur la base de la topologie trouvée. La structure usuellement obtenue est par conséquent, une déclinaison composite de la solution métallique, qui n'est pas nécessairement de forme optimale. Nous cherchons donc à trouver une méthode permettant d'optimiser simultanément la forme et l'anisotropie (distribuée) d'une structure, un besoin formulé par l'industriel STELIA Aerospace.

Pour ce faire, la distribution de matière est paramétrée par sa densité, et l'anisotropie du matériau par ses tenseurs d'élasticité. Le problème d'optimisation traité vise à maximiser la rigidité de la structure mesurée par la compliance. L'écriture du problème dans n'importe quel repère est nécessaire, car les axes du matériau sont définis en chaque point de la structure. Le formalisme polaire est alors utilisé car il permet une représentation par invariant du tenseur d'élasticité indépendant du repère en chaque point. Pour la résolution numérique, nous appliquons une extension de l'algorithme des directions alternées [1]. En effet, même s'il n'est possible d'utiliser qu'un seul critère dans cette méthode, elle a l'avantage d'être simple, peu coûteuse et robuste (convergence démontrée et garantie numériquement).

Nous montrons des exemples numériques dans le cas d'un matériau orthotrope élastique linéaire dans un état de contraintes planes. Les résultats corroborent l'hypothèse selon laquelle les formes optimales dépendent de la distribution de l'anisotropie. Nous comparons ensuite la solution obtenue par optimisations successives de la topologie (pour un matériau isotrope fixé) et de l'anisotropie (à forme fixée), avec la solution obtenue par leur optimisation simultanée. Nous observons que cette dernière aboutit à une

forme différente, permet d'obtenir une meilleure rigidité, et est donc plus performante.

2 Formulation du problème de minimisation de la compliance dans le formalisme polaire

Dans cette partie, le problème d'optimisation est posé : on choisit les paramètres d'optimisation, la fonction objectif et les contraintes d'optimisation.

2.1 Paramètres d'optimisation : SIMP (densité) et invariants polaires (anisotropie)

Pour déterminer la distribution optimale de matière, il est nécessaire de définir une variable qui spécifie en chaque élément du domaine, s'il y a de la matière ou du vide. La densité fictive distribuée de matière $\rho(x) \in [\rho_{min}, 1]$ est alors choisie comme paramètre d'optimisation. $\rho(x) = 1$ (respectivement $\rho(x) = \rho_{min}$) signifie la présence de matière (respectivement l'absence de matière). Généralement, on prend $\rho_{min} = 10^{-3}$ pour éviter les difficultés numériques associées à une valeur de densité nulle (singularité du tenseur de rigidité). Une méthode de pénalisation simple qui consiste à supprimer les densités intermédiaires est utilisée : la méthode SIMP, *Solid Isotropic Material with Penalization* [2], où les tenseurs de rigidité $\underline{\underline{C}}$ et de souplesse $\underline{\underline{S}}$ sont approchés comme suit et où $\underline{\underline{C}}_0$ et $\underline{\underline{S}}_0 = \underline{\underline{C}}_0^{-1}$ sont les tenseurs de rigidité et de souplesse du matériau considéré :

$$\underline{\underline{C}}(x) = \rho(x)^p \underline{\underline{C}}_0 \Leftrightarrow \underline{\underline{S}}(x) = \frac{1}{\rho(x)^p} \underline{\underline{S}}_0 \quad (1)$$

Les tenseurs d'élasticité traduisent l'anisotropie d'un matériau. En représentation cartésienne, leur écriture fait intervenir des relations complexes lors des changements de repère. Une façon pratique de décrire la distribution de l'anisotropie est d'exprimer les tenseurs d'élasticité dans le formalisme polaire qui fait intervenir des invariants indépendants du repère. Pour un matériau dans un état plan de contraintes par exemple, les relations (2) définissent le tenseur de rigidité réduit Q en fonction des invariants T_0, T_1, R_0, R_1 , et $\Phi_0 - \Phi_1$ [5]. Lors d'un passage d'un repère à un autre, seuls les angles polaires varient. De par leur simplicité, les invariants polaires sont désignés comme paramètres d'optimisation de la distribution l'anisotropie.

$$\begin{aligned} Q_{1111} &= T_0 + 2T_1 + R_0 \cos 4\Phi_0 + 4R_1 \cos 2\Phi_1 \\ Q_{1122} &= -T_0 + 2T_1 - R_0 \cos 4\Phi_0 \\ Q_{1112} &= R_0 \sin 4\Phi_0 + 2R_1 \sin 2\Phi_1 \\ Q_{2222} &= T_0 + 2T_1 + R_0 \cos 4\Phi_0 - 4R_1 \cos 2\Phi_1 \\ Q_{2212} &= -R_0 \sin 4\Phi_0 + 2R_1 \sin 2\Phi_1 \\ Q_{1212} &= T_0 - R_0 \cos \Phi_0 \end{aligned} \quad (2)$$

Ici, T_0 et T_1 sont les invariants liés à la partie isotrope du tenseur Q , tandis que $R_0 e^{4i\Phi_0}$ et $R_1 e^{2i\Phi_1}$ correspondent à la partie anisotrope. Par exemple, si les valeurs de R_0 et R_1 sont toutes les deux nulles, alors le matériau est isotrope. Quand R_1 est nul, il y a une symétrie du carré ; et quand R_0 est nul, c'est la R_0 -orthotropie. Quand l'angle $\Phi_0 - \Phi_1$ prend la valeur $K\frac{\pi}{4}$ ($K = 0$ ou 1), il y a orthotropie [4]. Lors de l'optimisation par rapport à l'anisotropie distribuée, les paramètres polaires liés à l'isotropie (T_0, T_1) seront considérés fixés : l'optimisation s'effectue uniquement par rapport aux paramètres liés à l'anisotropie (R_0, R_1 , et $\Phi_0 - \Phi_1$).

2.2 Critère d'optimisation

Le problème d'optimisation traité vise à maximiser la rigidité globale d'une structure. Cette rigidité est mesurée par le travail des efforts extérieurs ou compliance : le critère d'optimisation choisi est la compliance :

$$critere = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV + \int_{\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} dS \quad (3)$$

où \mathbf{u} est le déplacement, \mathbf{f} , les efforts volumiques, \mathbf{F} , les efforts surfaciques, Ω , le domaine et Γ_1 , une frontière.

2.3 Contraintes d'optimisation

Le problème est supposé élastique linéaire, sous les hypothèses de petits déplacements et petites déformations à déplacements imposés nuls :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{\sigma} + \mathbf{f} = 0 \text{ dans } \Omega \\ \underline{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F} \text{ sur } \Gamma_1 \\ \underline{\sigma} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{u}) \text{ dans } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_0 \end{cases} \quad (\text{P})$$

où $\underline{\sigma}$ est le tenseur des contraintes, $\underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$ le tenseur des déformations, et Γ les frontières.

Une contrainte sur le volume du domaine Ω est également imposé : $\int_{\Omega} \rho(x) dx = V_0$.

2.4 Problème d'optimisation

Nous minimisons le critère (3) par rapport aux paramètres d'optimisation $\{\rho, R_0, R_1, \Phi_0 - \Phi_1\}$. Puisque la compliance est égale au double de l'énergie complémentaire, il vient :

$$\min_{\{\rho, R_0, R_1, \Phi_0 - \Phi_1\}} \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV + \int_{\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} dS = \min_{\{\rho, R_0, R_1, \Phi_0 - \Phi_1\}} \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{\underline{S}} : \underline{\sigma} dV \quad (4)$$

Ensuite, le théorème de l'énergie complémentaire est appliquée : parmi tous les champs statiquement admissibles, le champ de contrainte solution minimise l'énergie complémentaire. Ainsi, on peut écrire $\int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{\underline{S}} : \underline{\sigma} dV = \min_{\underline{\underline{\tau}} \in SA} \int_{\Omega} \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\tau}} dV$. Le problème d'optimisation s'écrit alors :

$$\min_{\{\rho, R_0, R_1, \Phi_0 - \Phi_1\}} \min_{\underline{\underline{\tau}} \in SA} \left[\int_{\Omega} \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\tau}} dV \right] \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \operatorname{div} \underline{\sigma} + \mathbf{f} = 0 \text{ dans } \Omega \\ \underline{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F} \text{ sur } \Gamma_1 \\ \underline{\sigma} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{u}) \text{ dans } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_0 \\ \int_{\Omega} \rho(x) dx = V_0 \end{cases} \quad (5)$$

3 Minimisations locales de l'énergie complémentaire

La méthode appliquée pour résoudre le problème d'optimisation ci-dessus, formulé par une double minimisation (5), est une extension de l'algorithme des directions alternées introduite initialement dans [1]. L'algorithme s'interprète comme une minimisation alternative en $\underline{\underline{\tau}}$ et en $\{\rho, R_0, R_1, \Phi_0 - \Phi_1\}$. Il s'apparente à une méthode de critère d'optimalité car est une méthode itérative de point fixe sur les conditions d'optimalité. Ces conditions d'optimalité sont écrites sur l'énergie complémentaire.

Dans le problème, l'ordre de minimisation n'est pas importante. De plus $\{\rho, R_0, R_1, \Phi_0 - \Phi_1\}$ sont seulement soumis à des contraintes algébriques (à la différence de $\underline{\underline{\tau}}$, qui doit vérifier $\operatorname{div} \underline{\underline{\tau}} + \mathbf{f} = 0$). Ainsi, la minimisation par rapport aux paramètres d'optimisation peut être écrite à l'intérieur de l'intégrale. Elle peut donc se faire localement, c'est-à-dire en chaque point du domaine. L'avantage de l'utilisation de la représentation polaire est la simplicité d'écriture de la compliance locale en fonction des paramètres d'optimisation à savoir la densité et les paramètres polaires des tenseurs d'élasticité. Par conséquent, la résolution de la minimisation locale par rapport aux paramètres d'optimisation est analytique. Cette résolution considère en même temps la densité et l'anisotropie pour minimiser l'énergie complémentaire.

Cet algorithme a été choisi de par sa robustesse (convergence démontrée et garantie numériquement) et son coût numérique réduit. En effet, même en prenant en compte des comportements anisotropes, les calculs de sensibilités locaux sur lesquels repose l'algorithme peuvent être résolus analytiquement.

Le coût de l'algorithme ne dépend donc que du coût de la minimisation par rapport aux contraintes statiquement admissibles, qui est un calcul par éléments finis.

Les études de sensibilités pour un matériau orthotrope, dans un état de contraintes planes sont explicitées dans [3] (en préparation) et [4, 5]. La minimisation de la compliance est faite uniquement par rapport aux invariants liées à l'orthotropie en rigidité, c'est-à-dire, R_0 , R_1 et $\Phi_0 - \Phi_1$; tandis que les paramètres T_0 et T_1 liés à l'isotropie sont gardés fixes. Dans ce document, nous montrons uniquement les résultats pour cette catégorie d'optimisation. La distribution de l'orthotropie optimisée conjointement avec la forme est alors présentée dans la partie suivante.

4 Mise en évidence de l'influence de la distribution de l'anisotropie sur la forme optimale

Nous montrons des résultats numériques dans le cas bidimensionnel pour un matériau orthotrope élastique linéaire. Nous montrons d'abord que la forme optimale dépend de la distribution de l'anisotropie. Ensuite, nous comparons les solutions obtenues par l'approche séquentielle et par l'approche simultanée. La première consiste à trouver une forme optimale en fixant l'anisotropie du matériau, puis d'optimiser par rapport à l'anisotropie en fixant la forme. Tandis que l'approche simultanée consiste à optimiser la forme et l'anisotropie en même temps. Nous étudions une plaque rectangulaire de taille 40 mm x 20 mm discrétisée par 80 x 40 éléments. Le côté gauche de la plaque est encasturé et une force dirigée vers le bas est appliquée à mi-hauteur, sur le côté droit. Le volume est fixé à 50 % du volume total. A l'initialisation, nous prenons une plaque pleine ($\rho = 1$ partout).

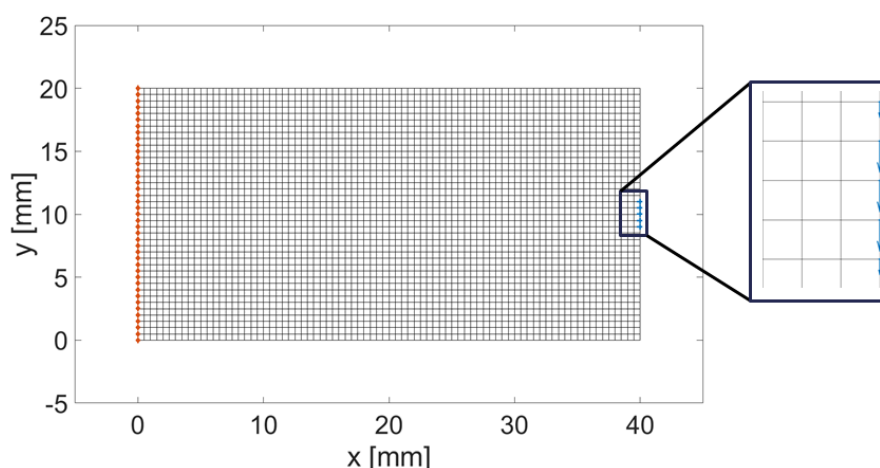


FIGURE 1 – Maillage, chargement et conditions aux limites appliqués sur la plaque

4.1 La forme optimale dépend de la distribution de l'anisotropie

Dans un premier temps, nous illustrons les résultats qui confirment que la forme optimale dépend de la distribution de l'anisotropie. Le matériau utilisé est un matériau composite constitué de fibres de carbone noyées dans une matrice epoxy et orientés uniformément partout (tableau 1). Pour cela, nous montrons en figure 2 les formes optimales pour une plaque orthotrope unidirectionnelle orientée à 0° , 45° , 90° et 135° par rapport à l'axe des abscisses.

TABLE 1 – Paramètres du matériau composite Carbone/Epoxy

Modules	Valeurs
Module d'Young longitudinale	112.000 MPa
Module d'Young transversale	8200 MPa
Module de cisaillement	4500 MPa
Coefficient de Poisson	0,3

La forme optimale est obtenue après 25 itérations environ. Le critère d'arrêt est défini à 0.1 % pour la compliance et à 0.01 % pour la densité. Nous affichons l'orientation du matériau sur les éléments où la densité est supérieure à 0,9. Nous observons que les formes optimales sont bien différentes quand l'orientation du matériau change. Nous voyons par exemple, que par rapport au matériau orienté à 90°, celui orienté à 0° présente beaucoup plus de matière autour de la zone d'application de l'effort. En effet, l'orientation du matériau à 90° coïncide avec la direction de l'effort, tandis que celui orienté à 0° est perpendiculaire à l'effort. Nous remarquons également que les formes optimales à 45° et à 135° sont symétriques : les orientations sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses et la loi de comportement utilisée ne différencie pas le comportement en traction et en compression. De ces variations de formes optimales, nous déduisons que les formes obtenues par l'approche séquentielle et par l'approche simultanée sont forcément différentes, et qu'il est difficile de définir a priori quel matériau anisotrope utiliser pour définir la forme optimale à anisotropie fixée. Dans la suite, la forme optimale dans l'approche séquentielle est obtenue en utilisant un matériau isotrope.

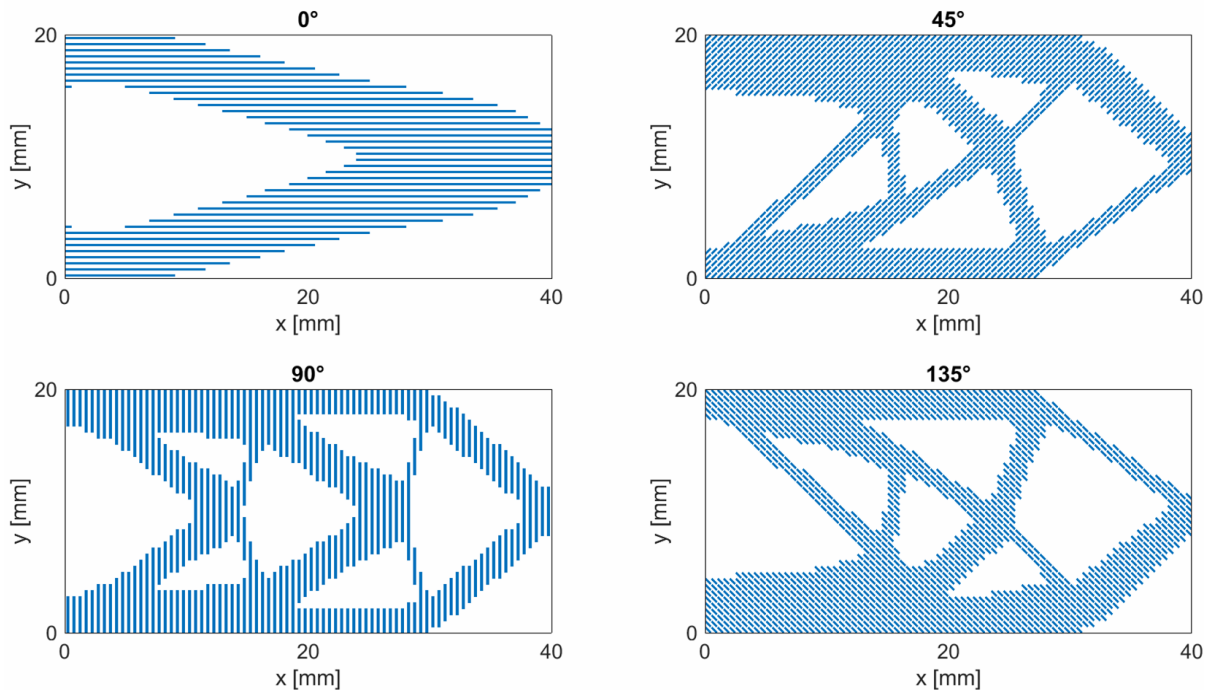


FIGURE 2 – Forme optimale et direction principale de rigidité pour un matériau orthotrope orienté uniformément à 0°, 45°, 90° et 135°

4.2 Optimisation séquentielle et optimisation simultanée

Les résultats obtenus par optimisation séquentielle et par optimisation simultanée sont confrontés dans cette partie. L'optimisation séquentielle consiste à trouver une forme optimale en fixant l'anisotropie du matériau, puis d'optimiser par rapport à l'anisotropie en fixant la forme. En revanche, l'optimisation simultanée cherche à optimiser en même temps la forme et l'anisotropie. La figure 3 compare les formes optimales des deux approches. L'initialisation est faite avec l'acier ($E = 200.000$ MPa et $\nu = 0,3$). L'orientation optimale est affichée sur les éléments où la matière est présente à l'état optimisé. Elle correspond à la direction de la contrainte principale maximale en valeur absolue, c'est-à-dire que l'on cherche à rigidifier le matériau dans la direction où il est le plus sollicité. Les formes trouvées sont différentes, ce qui est cohérent car les étapes des deux optimisations sont différentes. On remarque que les topologies des formes trouvées sont différentes.

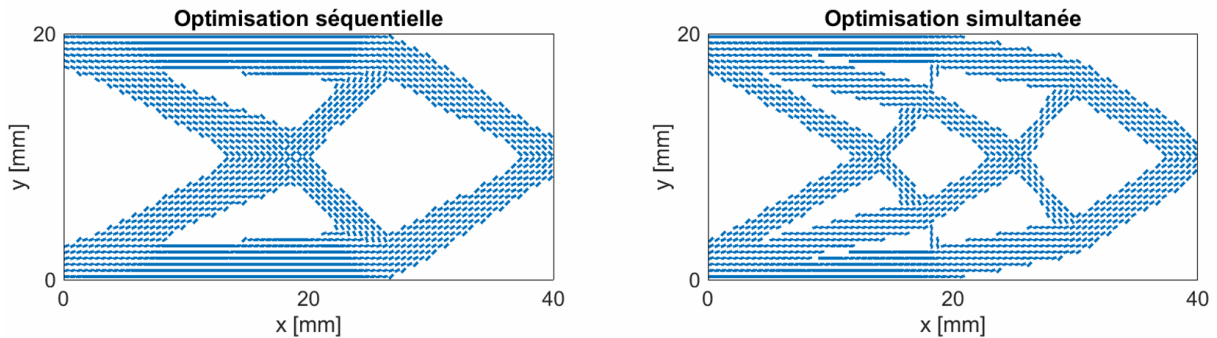


FIGURE 3 – Formes et orientations optimales pour l'optimisation successive de la forme et de l'anisotropie (gauche) et pour leur optimisation simultanée (droite)

L'optimisation de l'anisotropie s'effectue par la résolution des minimisations locales par rapport à la partie anisotrope du tenseur d'élasticité, soit vis-à-vis de R_0 , R_1 et $\Phi_0 - \Phi_1$. Les invariants correspondant à l'isotropie (T_0 et T_1) sont choisis constants. Nous illustrons donc en figure 4, la distribution des valeurs de R_0 et R_1 dans les deux approches. D'abord, nous observons que R_1 varie de 0 à 70.000 MPa, tandis que les valeurs optimales de R_0 sont choisies quasi-constantes. Une valeur nulle de R_1 signifie qu'il y a une symétrie du carré dans le matériau. Les zones où les valeurs de R_1 sont minimales se trouvent aux endroits où le cisaillement est maximal. En revanche, les valeurs de R_0 y sont maximales. Ensuite, nous observons que les distributions de l'anisotropie sont différentes dans les optimisations séquentielle et simultanée. En effet, les variables d'anisotropie dépendent du champ de contraintes, et puisque les formes dans les deux approches sont différentes, alors les champs de contraintes sont aussi différents. Enfin, nous constatons que l'approche simultanée favorise la présence des barres fines mais nombreuses : schématiquement, elle reproduit deux fois le motif obtenu dans l'approche séquentielle.

Le tableau 2 compare les valeurs de la compliance dans les deux approches. Dans l'optimisation séquentielle, la compliance diminue de 62 % entre la première et la deuxième étape. En effet, l'anisotropie du matériau est optimisée dans cette étape : la rigidité devient plus grande. A présent, si l'on compare la compliance finale de l'approche séquentielle avec celle de l'approche simultanée, nous voyons que cette dernière est plus performante de 1,7 %. Cet écart faible provient de plusieurs origines. Premièrement, la forme initiale de la structure utilisée est simple. Ensuite, la simplicité du chargement et des conditions aux limites peut aussi expliquer cet écart : il serait intéressant d'appliquer des sollicitations complexes se rapprochant des cas de charges industriels. Enfin, le problème est traité en 2D : l'ajout d'une dimension donnerait probablement une plus grande différence dans la forme et dans les valeurs de la compliance.

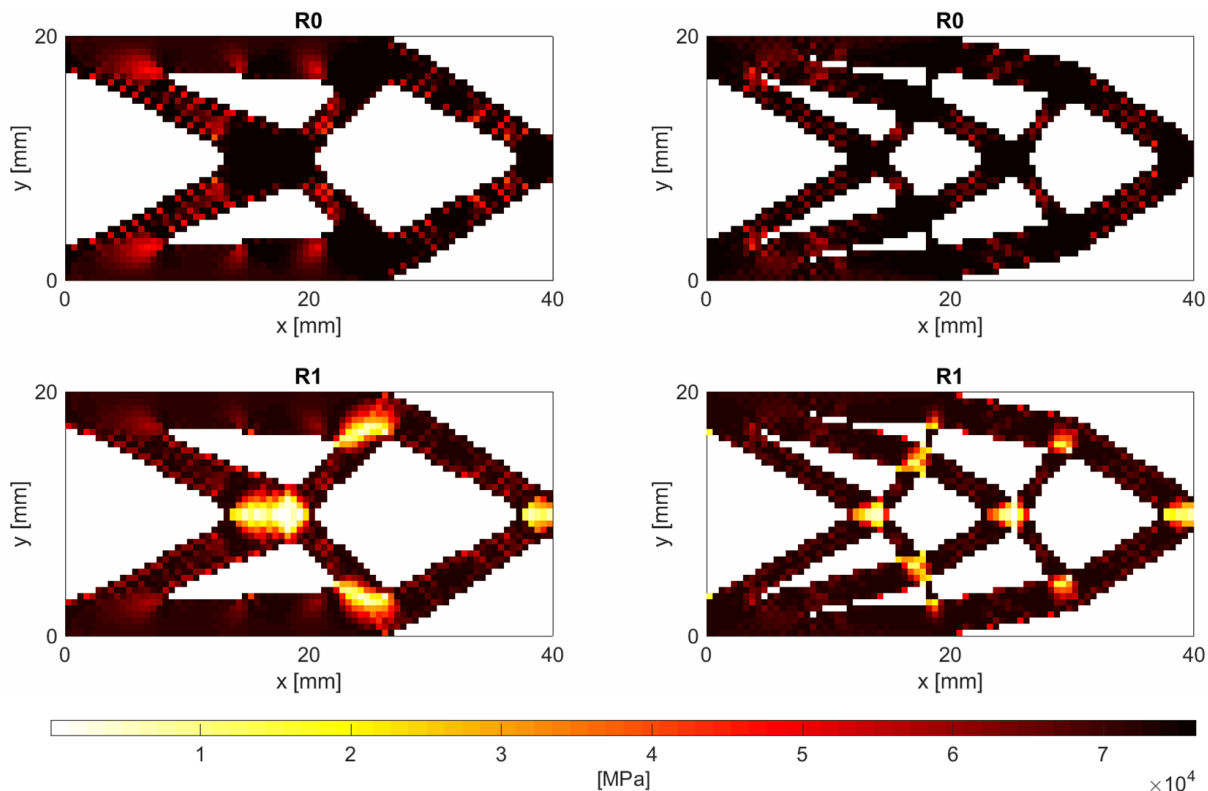


FIGURE 4 – Comparaison de la distribution de l’anisotropie en rigidité, R_0 (haut) et R_1 (bas), entre l’optimisation successive de la forme et de l’anisotropie (gauche), et l’optimisation simultanée de la forme et de l’anisotropie (droite)

TABLE 2 – Valeurs de la compliance dans les optimisations séquentielle et simultanée

Optimisation	Etape	Compliance [mJ/mm]
Séquentielle	Forme à matériau fixé	12,5
	Matériau à forme figé	4,74
Simultanée	Forme et matériau	4,66

Le problème écrit en formalisme polaire et résolu par l’algorithme des directions alternées permet donc d’optimiser simultanément la forme et l’anisotropie. La topologie et la distribution d’anisotropie sont différentes de celles obtenues par les méthodes actuellement utilisées. Néanmoins, on a vu que la performance est plus élevée dans l’approche que nous montrons : pour le même volume donné, la solution que nous proposons est plus rigide.

5 Remerciements

Les auteurs remercient STELIA Aerospace pour le financement de ces travaux.

Références

- [1] G. Allaire, R. V. Kohn. *Optimal design for minimum weight and compliance in plane stress using extremal microstructures*, European Journal of Mechanics - A/Solids, Elsevier, 839-878, 1993.
- [2] M. P. Bendsøe. *Optimal shape design as a material distribution problem*, Structural Optimization, Springer-Verlag, 193-202, 1989.
- [3] C. Julien, A. Vincenti, B. Desmorat, *Minimisation of two-dimensional elastic energy over the entire set of thermodynamically admissible orthotropic materials : analytical resolution by the polar method*. En préparation.

- [4] C. Julien. *Conception Optimale de l'Anisotropie dans les Structures Stratifiées à Rigidité Variable par la Méthode Polaire-Génétique*, Thèse de doctorat, UPMC, 2010.
- [5] A. Vincenti, B. Desmorat. *Optimal Orthotropy for Minimum Elastic Energy by the Polar Method*, Journal of Elasticity, Springer, 55-78, 2011.