

# Méthode modale mixte pour la simulation numérique de contacts multiples entre une corde vibrante et un obstacle

C. Issanchou<sup>1</sup>, J.-L. Le Carrou<sup>1</sup>, C. Touzé<sup>2</sup>, B. Fabre<sup>1</sup>, O. Doaré<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Sorbonne Universités, UPMC Univ Paris 06, CNRS, LAM / d'Alembert, [issanchou@lam.jussieu.fr](mailto:issanchou@lam.jussieu.fr), [jean-loic.le\\_carrou@upmc.fr](mailto:jean-loic.le_carrou@upmc.fr), [benoit.fabre@upmc.fr](mailto:benoit.fabre@upmc.fr)

<sup>2</sup> IMSIA, ENSTA ParisTech-CNRS-EDF-CEA, Université Paris Saclay, [cyril.touze](mailto:cyril.touze), [olivier.doare@ensta-paristech.fr](mailto:olivier.doare@ensta-paristech.fr)

**Résumé** — Une méthode numérique est proposée pour la simulation temporelle de dynamique avec contacts multiples entre une corde et un obstacle de forme quelconque. L'approche combine décomposition modale et pénalisation du contact, permettant une prise en compte fine des phénomènes d'amortissement. Un schéma conservatif et inconditionnellement stable permet d'intégrer le problème en temps. Des résultats expérimentaux sont confrontés aux résultats numériques dans le cas du contact corde / frettes sur une basse électrique.

**Mots clés** — Modèle numérique, contact unilatéral, protocole expérimental, synthèse sonore.

## 1 Introduction

Les dynamiques fortement non linéaires des systèmes vibrants soumis à des impacts donnent lieu à des problèmes numériquement raides de par les changements de raideur très grands intervenant sur des temps très courts. Les méthodes numériques proposées pour traiter ces problèmes peuvent se regrouper en deux catégories distinctes [17, 2, 1]. La première classe de méthodes régularise le contact en pénalisant la loi de contact et en autorisant l'interpénétration [2, 4]. La seconde classe empêche toute interpénétration entre les solides en contact et ne régularise pas le problème [17, 1].

Dans le cadre de l'acoustique musicale, l'interaction corde / obstacle intervient dans de nombreux instruments indiens comme par exemple le sitar et la tampoura, leur conférant un son unique du fait des multiples contacts ayant lieu sur un chevalet de forme spécifique [20, 21]. Dans le cas de la basse électrique, le contact n'intervient que pour certains modes de jeux, notamment le *pop*, pour lequel une corde est fortement tirée avec l'index avant d'être relâchée. La corde entre alors en contact avec les frettes pendant les premiers instant de sa vibration, donnant un son percussif. La modélisation numérique d'un tel contact doit être traitée avec précaution à cause des phénomènes fortement non linéaires mis en jeu. De nombreuses études ont été menées afin de modéliser le contact corde/obstacle, à l'aide de guides d'onde [18, 8, 12], par une approche modale [21, 22], par discrétisation des équations Hamiltoniennes [6] ou encore par différences finies [4]. Seuls les modèles modaux permettent une prise en compte des caractéristiques linéaires de la corde mode par mode, notamment l'amortissement dépendant de la fréquence. Cela s'avère crucial pour une synthèse sonore réaliste, l'oreille étant très sensible à la décroissance des sons.

Par ailleurs, une confrontation fine avec des résultats expérimentaux nécessite la mise en place d'un protocole contrôlé et une prise en compte exigeante des paramètres physiques dans le modèle. A la connaissance des auteurs, cela n'a pas été présenté dans la littérature, bien que certaines études aient comparé des résultats expérimentaux à des résultats numériques de manière plus globale [21, 20].

Dans la présente étude, un modèle numérique est proposé, permettant la simulation d'une corde vibrante en présence d'un obstacle quelconque. Il est ici appliqué spécifiquement à la basse électrique. Grâce à son approche modale, les fréquences et amortissements peuvent être ajustés pour chaque mode selon une expérience menée sur une basse électrique. Le couplage avec le manche est également intégré au modèle. Les résultats expérimentaux et numériques sont comparés en détail.

## 2 Présentation du modèle continu

### 2.1 Hypothèses

L'objet d'étude est une corde vibrante en présence d'un contact unilatéral. Pour des cordes à usage musical et en particulier des cordes de guitare ou basse électrique, certaines hypothèses peuvent être appliquées qui permettent une modélisation simplifiée tout en restant fidèle aux mécanismes physiques principaux. On suppose ainsi que la raideur de la corde est petite devant la tension. De plus, les amortissements sont faibles. On s'intéresse ici uniquement à la polarisation transverse selon  $(Oz)$ , que l'on suppose découplée des autres polarisations. On suppose que la corde vibre selon des déplacements suffisamment petits pour que l'on puisse négliger d'éventuelles non-linéarités géométriques. Le couplage corde / structure est faible, il est pris en compte à travers la mobilité au sillet, tandis que le chevalet est supposé rigide [16, 9]. Ces hypothèses permettent notamment de prendre en compte un couplage aux extrémités à travers les caractéristiques linéaires de la corde uniquement (voir parties 2.4 et 2.5).

### 2.2 Position du problème

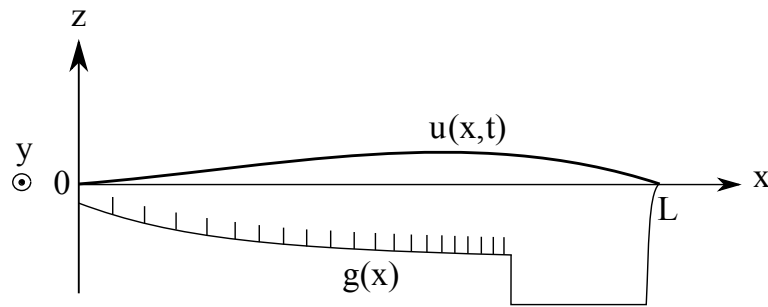


FIGURE 1 – Corde vibrante en présence d'un obstacle unilatéral  $g(x)$ .

On considère une corde de longueur  $L$ , de tension  $T$  et de masse linéique  $\mu$ , de module d'Young  $E$  et de moment d'inertie  $I$ . Le déplacement transverse  $u$  de la corde est régi par l'équation suivante :

$$\mu u_{tt}(x,t) - Tu_{xx}(x,t) + EIu_{xxxx}(x,t) = f(x,t), \quad (1)$$

où les indices  $t$  et  $x$  se réfèrent aux dérivées partielles temporelle et spatiale respectivement.  $f$  représente la force de contact linéique, que l'on choisit ici de régulariser, selon l'expression :

$$f(x,t) = f(\eta(x,t)) = K [\eta(x,t)]_+^\alpha,$$

avec  $K$  et  $\alpha \geq 1$  des constantes définissant la raideur du contact, et  $\eta(x,t) = g(x) - u(x,t)$  la pénétration de la corde dans l'obstacle [4]. Cette force dérive d'un potentiel  $\psi$  :

$$f = \frac{d\psi}{d\eta}, \quad \text{avec } \psi(\eta) = \frac{K}{\alpha+1} [\eta]_+^{\alpha+1}.$$

Les conditions aux limites sont supposées en appui simple :

$$u(0,t) = u(L,t) = u_{xx}(0,t) = u_{xx}(L,t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

L'énergie de ce système s'écrit :

$$\mathcal{H} = \int_0^L \left[ \frac{\mu}{2} (u_t)^2 + \frac{T}{2} (u_x)^2 + \frac{EI}{2} (u_{xx})^2 + \psi \right] dx,$$

elle est conservée au cours du temps.

## 2.3 Description modale

On introduit à présent la décomposition modale du déplacement  $u$  :

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{N_m} q_j(t) \phi_j(x), \quad \text{avec } \phi_j(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right). \quad (2)$$

Après insertion dans l'équation (1), projection sur les modes  $\phi_j$  et ajout de pertes pour chaque mode, on obtient l'équation suivante :

$$\mu(\ddot{q} + \underline{\underline{\Omega}}^2 q + 2\underline{\underline{\Sigma}}\dot{q}) = \underline{f}, \quad (3)$$

avec  $\underline{q} = [q_1, q_2, \dots, q_{N_m}]^t$  le vecteur des coefficients modaux et  $N_m$  le nombre de modes retenus dans la troncature.  $\underline{\underline{\Omega}}$  et  $\underline{\underline{\Sigma}}$  sont des matrices diagonales de coefficients  $\Omega_{j,j} = \omega_j = 2\pi\nu_j$  ( $\nu_j$  étant la fréquence propre correspondante) et  $\Sigma_{j,j} = \sigma_j$ .

On considère dans la suite une corde à vide, dont la longueur vibrante est définie par la longueur entre le sillet et le chevalet.

## 2.4 Modèle de fréquences propres

Selon les hypothèses précisées dans la partie 2.1 et supposant  $\mu c Y_s$  petit, les fréquences de la corde peuvent être obtenues par perturbation des nombres d'onde et suivent ainsi le modèle décrit dans [21, 16] :

$$\nu_j = j \frac{c}{2L} \left( 1 + \frac{Bj^2}{2} + \frac{\mu c}{n\pi} \text{Im}(Y_s(\omega_{0,j})) \right),$$

où  $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ ,  $B$  est le coefficient d'inharmonicité et  $Y_s$  la mobilité au sillet, prise en  $\omega_{0,j} = j \frac{\pi c}{L}$ .

## 2.5 Modèle d'amortissement

On présente ici le modèle de pertes employé, décrit en détail dans [21]. Celui-ci prend en compte les pertes dues aux frottements dans l'air, les effets viscoélastiques et thermoélastiques ainsi que le couplage au manche. On s'intéresse aux cordes de basse électrique, une corde filée à trait rond est donc considérée, constituée d'une âme et d'un trait.

Le facteur de qualité  $Q_j = \pi\nu_j/\sigma_j$  est donné par :

$$Q_j^{-1} = Q_{0,j}^{-1} + \frac{\mu c^2}{\pi L \nu_j} \text{Re}(Y_s(\omega_j)),$$

où :

$$Q_{0,j}^{-1} = \frac{j c}{2L \nu_j} \frac{R}{2\pi\mu\nu_j} + \frac{4\pi^2 \mu E_{\text{âme}} I_{\text{âme}} \delta_{\text{ve}}}{T^2} \frac{\nu_{0,j}^3}{\nu_j} + Q_{\text{te}}^{-1} + Q_{0,j}^{-1} + \frac{\mu c^2}{\pi L \nu_j} \text{Re}(Y_{\text{nut}}(\omega_j)),$$

et  $R = 2\pi\eta_{\text{air}} + 2\pi d_{eq} \sqrt{\pi\eta_{\text{air}}\rho_{\text{air}}\nu_j}$ .  $\eta_{\text{air}}$  et  $\rho_{\text{air}}$  représentent respectivement le coefficient de viscosité dynamique et la densité de l'air. On prendra les valeurs suivantes :  $\eta_{\text{air}} = 1.8 \times 10^{-5} \text{ kg m}^{-1}\text{s}^{-1}$  et  $\rho_{\text{air}} = 1.2 \text{ kg m}^{-3}$ .

## 3 Modèle numérique

Dans cette partie, le modèle numérique employé est présenté succinctement, le lecteur est renvoyé à [10] pour une présentation plus complète du schéma et l'étude de ses propriétés de stabilité.

La méthode combine une méthode modale, qui permet une description fine des amortissements grâce au terme d'amortissement modal, avec un lien entre les coordonnées modales et la forme spatiale de la corde à chaque instant, permettant de gérer les contacts avec l'obstacle. Pour cela, on note  $\underline{u} = [u_1, u_2, \dots, u_{N-1}]^t$  le vecteur représentant la forme de la corde  $u(x)$  à l'instant  $t$ , où  $N$  est le nombre de points spatiaux intérieurs retenu pour discrétiser le domaine. En choisissant ce nombre de points égal au nombre de modes retenus dans la troncature, soit  $N - 1 = N_m$ , on peut alors écrire la relation matricielle

$\underline{u} = \underline{S}q$  avec  $\underline{S}$  la matrice des modes, de coefficients  $S_{i,j} = \phi_j(x_i)$ ,  $\forall (i,j) \in \{1, \dots, N-1\}^2$ , ce qui permet de passer aisément de la représentation modale à la représentation spatiale.

L'équation à résoudre à chaque pas de temps est finalement :

$$\frac{\mu}{\Delta t^2} (\underline{u}^{n+1} - \underline{D}\underline{u}^n + \underline{\tilde{D}}\underline{u}^{n-1}) = \underline{f}^n = \frac{\Psi(\underline{\eta}^{n+1}) - \Psi(\underline{\eta}^{n-1})}{\underline{\eta}^{n+1} - \underline{\eta}^{n-1}}, \quad (4)$$

avec  $\underline{D} = \underline{S}\underline{C}\underline{S}^{-1}$  et  $\underline{\tilde{D}} = \underline{S}\underline{\tilde{C}}\underline{S}^{-1}$ .  $\underline{C}$  et  $\underline{\tilde{C}}$  sont des matrices diagonales de coefficients :

$$C_{i,i} = e^{-\sigma_i \Delta t} \left( e^{\sqrt{\sigma_i^2 - \omega_i^2} \Delta t} + e^{-\sqrt{\sigma_i^2 - \omega_i^2} \Delta t} \right),$$

$$\tilde{C}_{i,i} = e^{-2\sigma_i \Delta t},$$

où  $\Delta t$  est le pas de temps. Les valeurs retenues pour les matrices  $\underline{C}$  et  $\underline{\tilde{C}}$  proviennent d'un schéma exact pour la dynamique d'un oscillateur linéaire [3, 10], ce qui permet d'avoir une solution de précision maximale et évitant toute erreur de dispersion numérique pendant les phases sans contact. Le choix retenu pour la force de contact permet d'obtenir un schéma conservant l'énergie du système.

L'énergie discrète du système est donnée par :

$$\underline{H}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\mu}{2} \left\langle \delta_{t+} \underline{u}^n, \underline{\check{D}}_1 \delta_{t+} \underline{u}^n \right\rangle + \frac{\mu}{2} \left\langle \underline{u}^{n+1}, \underline{\check{D}}_2 \underline{u}^n \right\rangle + \left\langle \underline{\Psi}^{n+\frac{1}{2}}, \underline{1} \right\rangle,$$

avec  $\underline{\check{D}}_1 = \underline{S}\underline{\check{C}}_1\underline{S}^{-1}$ ,  $\underline{\check{D}}_2 = \underline{S}\underline{\check{C}}_2\underline{S}^{-1}$ , où  $\underline{\check{C}}_1$ ,  $\underline{\check{C}}_2$  et  $\underline{\check{C}}_3$  sont des matrices diagonales telles que :

$$\check{C}_{1ii} = \frac{1 + (1 - \alpha_i) \frac{\omega_i^2 \Delta t^2}{2}}{1 + (1 - \alpha_i) \frac{\omega_i^2 \Delta t^2}{2} + \sigma_i^* \Delta t}, \quad \check{C}_{2ii} = \frac{\omega_i^2}{1 + (1 - \alpha_i) \frac{\omega_i^2 \Delta t^2}{2} + \sigma_i^* \Delta t}, \quad \check{C}_{3ii} = \frac{2\sigma_i^*}{1 + (1 - \alpha_i) \frac{\omega_i^2 \Delta t^2}{2} + \sigma_i^* \Delta t}.$$

Les coefficients sont :

$$\alpha_i = \frac{2}{\omega_i^2 \Delta t^2} - \frac{A}{1 + e - A}, \quad \sigma_i^* = \left( \frac{1}{\Delta t} + \frac{\omega_i^2 \Delta t}{2} - \alpha \frac{\omega_i^2 \Delta t}{2} \right) \frac{1 - e}{1 + e}$$

avec :

$$A = e^{-\sigma_i \Delta t} \left( e^{\sqrt{\sigma_i^2 - \omega_i^2} \Delta t} + e^{-\sqrt{\sigma_i^2 - \omega_i^2} \Delta t} \right) \text{ et } e = e^{-2\sigma_i \Delta t}.$$

L'opérateur discret  $\delta_{t+}$  est défini par :  $\delta_{t+} q^n = \frac{q^{n+1} - q^n}{\Delta t}$ , et le produit scalaire par :

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \Delta x \sum_{j \in \{0, \dots, N\}} u_j v_j.$$

On peut montrer que ce schéma est conservatif (dissipatif si les pertes sont incluses) et inconditionnellement stable [10].

## 4 Protocole expérimental

Les propriétés de la corde étudiée, filée à trait rond, sont précisées dans le tableau 1.

TABLE 1 – Propriétés de la corde étudiée

$L$	$d$	$d_{\text{âme}}$	$T$	$\mu$
0.863 m	1.14 mm	0.43 mm	191.6 N	$6.69 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^{-1}$

La corde est installée sur une *Fender Jazz Bass*, sur laquelle sont également positionnés des capteurs optiques [14] proches du chevalet, permettant la mesure du mouvement transverse de la corde perpendiculairement à la table. La mobilité au sillet est mesurée à l'aide d'un marteau d'impact et d'un accéléromètre. La corde est enfin excitée à l'aide d'un fil de cuivre, selon cette polarisation uniquement.

Les fréquences propres et amortissements de la corde sont obtenus à l'aide de la méthode ESPRIT [19], chaque partiel étant étudié individuellement selon la procédure décrite dans [15, 16]. Ces données sont utilisées pour définir les paramètres des modèles de fréquence et amortissement décrits précédemment, de manière à obtenir la meilleure correspondance expérience / modèle selon une appréciation visuelle, en particulier dans les hautes fréquences. Les valeurs choisies sont indiquées dans le tableau 2.

TABLE 2 – Paramètres des modèles

$B$	$\delta_{ve}$	$Q_{te}^{-1}$
$3.5 \times 10^{-5}$	0.01	$6 \times 10^{-6}$

Les valeurs mesurées sont incorporées au modèle jusqu'au 34<sup>ème</sup> mode, soit environ 3400 Hz. Au-delà, les mesures ne sont plus exploitables et les modèles sont employés, dans lesquels la mobilité est prise en compte jusqu'à 10000 Hz environ.

## 5 Confrontation des résultats numériques et expérimentaux

Les paramètres numériques utilisés sont détaillés dans le tableau 3. On remarque en particulier que pour reproduire la raideur du contact observé expérimentalement, la valeur de  $K$  retenue est très grande. Cette valeur est déterminée à l'aide d'une étude paramétrique, le résultat présentant la meilleure correspondance par rapport au signal expérimental étant choisi. La convergence en temps est considérée effective lorsque l'erreur  $L^2$  relative sur 0.3 s est inférieure à 0.1. La fréquence d'échantillonnage résultant de ce critère dépend fortement de la forme de l'obstacle, en particulier de la surface de contact et de la durée globale de la vibration avec contact. Bien que le modèle numérique puisse opérer à des fréquences d'échantillonnage bien plus petites, celle-ci est choisie très élevée afin d'assurer la convergence des simulations. En effet, la raideur du contact mise en jeu entraîne la formation de très hautes fréquences qu'il convient de résoudre avec un pas de temps très petit. Les temps de calcul, également très sensibles à la finesse du maillage spatiale du fait des matrices pleines impliquées dans la résolution, s'en retrouvent élevés. Des temps de calcul sont donnés dans [11]. Le déplacement initial correspond à un triangle arrondi d'amplitude maximale 3.6 mm, sans vitesse initiale. Les sons sont disponibles sur <http://tinyurl.com/soundsbass>.

TABLE 3 – Paramètres numériques

$\alpha$	$K$	$N$	$F_e$
1.5	$10^{13}$	863	4 MHz

La figure 2 compare les signaux temporels obtenus avec le modèle numérique et l'expérience à différents instants, ainsi que l'évolution de l'énergie du signal numérique. De fortes similitudes apparaissent entre le signal expérimental et le résultat numérique, tant sur la forme globale que sur des aspects plus détaillés de la forme d'onde, tout au long du signal. La comparaison des spectrogrammes des signaux est montrée figure 3. On peut y voir une zone fortement perturbée pendant les premiers instants, lorsque la corde heurte les frettes. Cela confère à l'instrument un son percussif, typique des attaques de type *pop*. Des échanges d'énergie résultent des zones spectrales renforcées. Ainsi, le formant présent autour de 4500 Hz est bien reproduit par le résultat numérique. De plus, un glissement de fréquence intervient pour les modes les moins élevés, qui est fidèlement rendu numériquement. Ce phénomène, lié à la présence de l'obstacle, a été étudié dans le cas d'un obstacle courbe à l'une des extrémités d'une corde dans [13].

Des disparités demeurent toutefois entre le résultat numérique et le signal expérimental, visibles dans certains détails de la forme d'onde ainsi que dans des répartitions d'énergie différentes dans certaines régions spectrales. Elles peuvent être dues aux diverses incertitudes, en particulier, le résultat numérique se montre très sensible à la hauteur des frettes. Cette observation rejoint une problématique bien connue

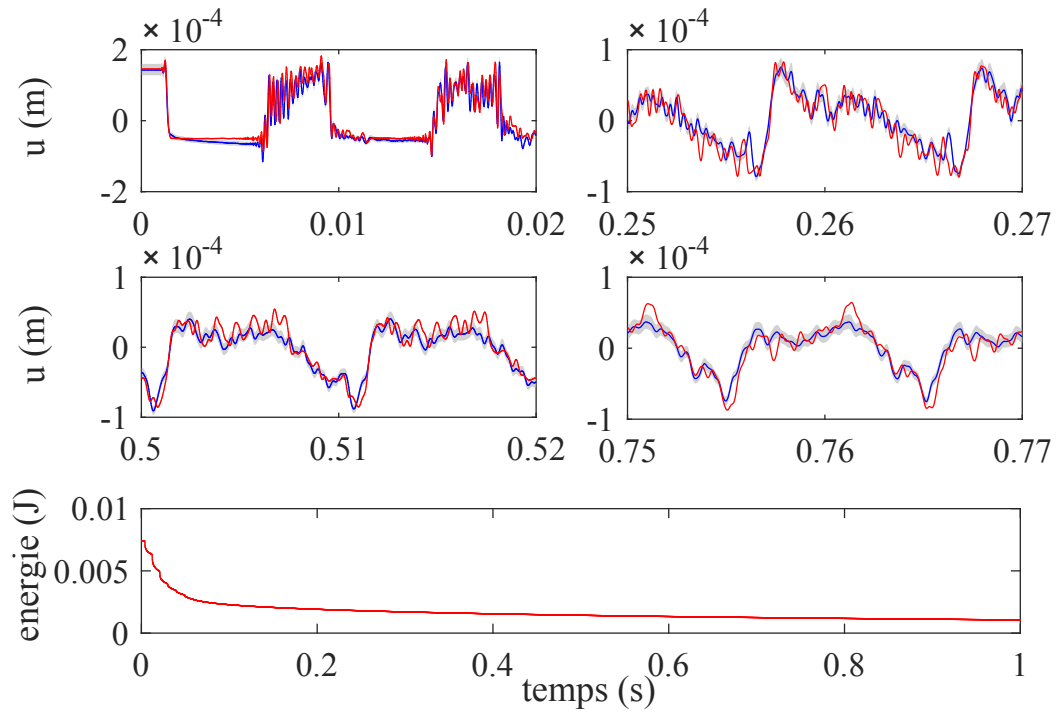


FIGURE 2 – Déplacement de la corde à 9 mm du chevalet. Comparaison entre la mesure (bleu) et le signal numérique (en rouge). L’incertitude étendue à 95 % est indiquée en gris. En bas : énergie du signal numérique.

des luthiers lors du réglage du manche des basses électriques notamment. Le modèle présenté, dont la pertinence dans le présent cadre d’étude est mise en évidence à travers la comparaison numérique / expérience exposée ici, pourrait ainsi être utilisé à des fins de réglage ou d’illustration à titre didactique.

Par ailleurs, on peut observer une forte décroissance par à-coups de l’énergie pendant les premiers instants, lorsque les contacts interviennent. Cela est dû à la transmission de l’énergie vers les modes plus élevés, ceux-ci étant davantage amortis.

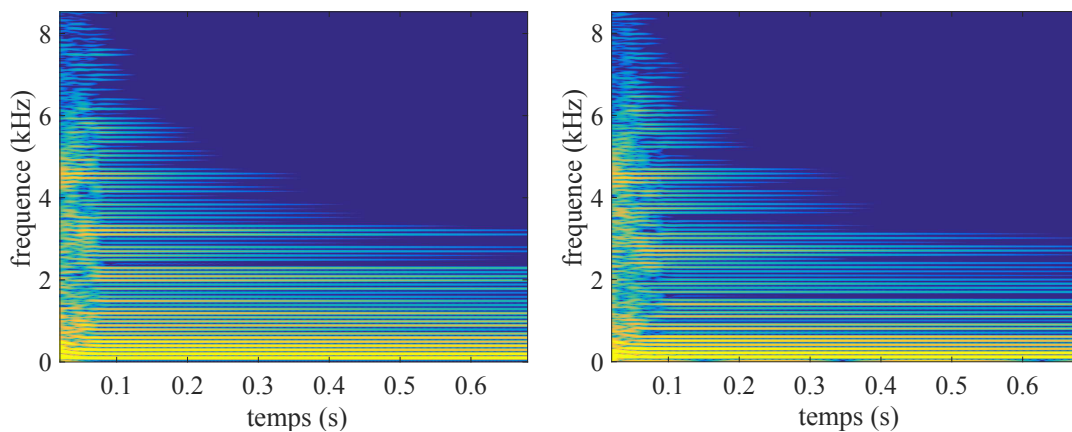


FIGURE 3 – Spectrogrammes. A gauche : expérimental. A droite : numérique.

## 6 Conclusion

Un modèle numérique basé sur une approche modale a été présenté, qui permet la simulation d’une corde vibrante raide et amortie en présence d’un obstacle unilatéral quelconque, dans le cas présent un manche de basse électrique. Le schéma obtenu est conservatif et inconditionnellement stable, et permet

la prise en compte de fréquences et amortissements mode par mode. De plus, un protocole expérimental a été mis en place, permettant de mesurer les caractéristiques d'une corde de basse électrique installée sur l'instrument, et d'en mesurer le déplacement. Une comparaison fine des résultats numériques et expérimentaux a ainsi pu être menée. Il a ainsi été montré que le modèle capture les ingrédients essentiels de la physique. Il permet donc de reproduire fidèlement le mouvement de la corde et apporte un éclairage sur la vibration de la corde, plus difficile à observer expérimentalement. Afin de compléter le modèle, il serait intéressant de considérer deux polarisations couplées du mouvement de la corde [10, 7], ainsi qu'une meilleure prise en compte des gestes du musicien [5].

## Références

- [1] V. Acary, B. Brogliato, *Numerical Methods for Nonsmooth Dynamical Systems. Applications in Mechanics and Electronics*, Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2008.
- [2] A. Banerjee, A. Chanda, R. Das, *Historical origin and recent development on normal directional impact models for rigid body contact simulation : A critical review*, Archives of Computational Methods in Engineering, 1-26, 2016.
- [3] S. Bilbao, *Numerical sound synthesis : finite difference schemes and simulation in musical acoustics*, Wiley, Chichester, 2009.
- [4] S. Bilbao, A. Torin, V. Chatziioannou, *Numerical modeling of collisions in musical instruments*, Acta Acustica united with Acustica vol. 101, 155-173, 2015.
- [5] D. Chadeaux, J.-L. Le Carrou, B. Fabre, *A model of harp plucking*, Journal of the Acoustical Society of America vol. 133 n. 4 , 2444-2455, 2013.
- [6] V. Chatziioannou, M. van Walstijn, *Energy conserving schemes for the simulation of musical instrument contact dynamics*, Journal of Sound and Vibration vol. 339, 262-279, 2015.
- [7] C. Desvages, S. Bilbao, *Two-polarisation finite difference model of bowed strings with nonlinear contact and friction forces*, International Conference on Digital Audio Effects, DAFx-15 Trondheim, 2015.
- [8] G. Evangelista, F. Eckerholm, *Player-instrument interaction models for digital waveguide synthesis of guitar : touch and collisions*, IEEE transactions on audio, speech, and language processing vol. 18 n. 4, 822-832, 2010.
- [9] H. Fleischer, *Vibration of an electric bass guitar*, Acta Acustica united with Acustica vol. 91, 247-260, 2005.
- [10] C. Issanchou, S. Bilbao, J.-L. Le Carrou, C. Touzé, O. Doaré, *A modal-based approach for the nonlinear vibration of strings against a unilateral obstacle : simulations and experiments in the pointwise case*, Journal of Sound and Vibration, soumis en juillet 2016.
- [11] C. Issanchou, S. Bilbao, J.-L. Le Carrou, C. Touzé, O. Doaré, *A modal aproach to the numerical simulation of a string vibrating against an obstacle : applications to sound synthesis*, International Conference on Digital Audio Effects, DAFx-16 Brno, 2016.
- [12] D. Kartofelev, A. Stulov, H.-M. Lehtonen, V. Välimäki, *Modeling a vibrating string terminated against a bridge with arbitrary geometry*, Stockholm Music Acoustics Conference, 2013.
- [13] D. Kartofelev, A. Stulov, V. Välimäki, *Pitch glide effect induced by a nonlinear string-barrier interaction*, AIP Conference, 2015.
- [14] J.-L. Le Carrou, D. Chadeaux, L. Seydoux, B. Fabre, *A low-cost high-precision measurement method of string motion*, vol. 333, 3881-3888, 2014.
- [15] J.-L. Le Carrou, F. Gautier, R. Badeau, *Sympathetic string modes in the concert harp*, Acta Acustica united with Acustica vol. 95 n.4, 744-752, 2009.
- [16] A. Paté, J.-L. Le Carrou, B. Fabre, *Predicting the decay time of solid body electric guitar tones*, Journal of the Acoustical Society of America vol. 135 n. 5, 3045-3055, 2014.
- [17] F. Pfeiffer, C. Glocker, *Contact in multibody systems*, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, vol. 64 (5), 773-782, 2000.
- [18] E. Rank, G. Kubin, *A waveguide model for slabass synthesis*, IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Munich, vol. 1, 443-446, 1997.
- [19] R. Roy, A. Paulraj, T. Kailath, *ESPRIT - A subspace rotation approach to estimation of parameters of cisoids in noise*, IEEE transactions on acoustics, speech, and signal processing vol.34 N.5, 1340-1342, 1986.
- [20] S. Siddiq, *A Physical Model of the Nonlinear Sitar String*, Archives of acoustics vol. 37 n. 1, 73-79, 2012.
- [21] C. Valette, C. Cuesta, *Mécanique de la corde vibrante*, Hermès, Paris, 1993.
- [22] M. van Walstijn, J. Bridges, *Simulation of distributed contact in string instruments : a modal expansion approach*, European Signal Processing Conference, 1023-1027, 2016.