

Modèle de poutre à section flexible pour le comportement des mètres rubans : aspects numériques liés à la non-convexité de l'énergie de déformation.

M. Martin^{1,2}, S. Bourgeois¹, B. Cochelin¹, J. Ducarne², F. Guinot²

¹ LMA, Centrale Marseille, CNRS, UPR 7051, Aix Marseille Univ, F-13453 Marseille Cedex 13, France
martin@lma.cnrs-mrs.fr; {stephane.bourgeois, bruno.cochelin}@centrale-marseille.fr

² Thales Alenia Space, Cannes, France, {Julien.Ducarne, Francois.Guinot}@thalesalieniaspace.com

Résumé — Le modèle de poutre à section flexible appliqué au comportement des mètres rubans conduit à une densité d'énergie de déformation non-convexe et s'apparente à celui d'une barre d'Ericksen régularisée. Son implémentation numérique par éléments finis nécessite donc quelques précautions. Ce travail a pour objectif de mieux comprendre l'effet des paramètres du modèle et de la simulation numérique (régularisation, conditions limites, finesse du maillage, types d'éléments...) sur les réseaux de branches bifurquées obtenues en statique pour l'essai de pliage par flexion.

Mots clés — stabilité, mètres rubans, poutre à section flexible, barre d'Ericksen, éléments finis.

1 Introduction

Les mètres rubans constituent une alternative intéressante aux mécanismes de déploiement classiques à base de systèmes rigides articulés et motorisés. Grâce à leur capacité à s'enrouler et à développer des plis localisés, ils offrent des possibilités pour concevoir des systèmes légers, compacts et à déploiement autonome. Cependant, ces structures minces sont très sensibles aux instabilités et il est important de se doter d'outils de modélisation fiables et robustes. Au regard de la géométrie de ces structures, de nombreux travaux utilisent des simulations éléments finis sur la base de modèles de coques. Cette approche mène à des résultats précis mais requiert une certaine expertise au vu de la complexité du comportement de ces structures. Dans ce contexte, Seffen et Pellegrino [12] ont proposé des modèles simplifiés à base de barres articulées à longueurs variables pour modéliser la migration de plis ou le déploiement de rubans enroulés. Ces travaux ont montré l'intérêt de bien comprendre le comportement très spécifique des mètres rubans, qui ont la capacité de développer des plis localisés qui peuvent croître, se déplacer le long du ruban, se dupliquer ou disparaître. Plus récemment, un modèle de poutre à section flexible a été proposé ([5]-[7]), permettant de rendre compte de l'aplatissement de la section du ruban dans la zone d'apparition d'un pli. Son implémentation dans le logiciel Comsol [2] a montré sa capacité à simuler des scénarios complexes de pliage et de déploiement. Cependant, le caractère non-convexe de la densité d'énergie de déformation associée au modèle de poutre à section flexible oblige à utiliser des maillages très fins avec des éléments de haut degré.

Dans ce travail, l'essai de flexion pure dans le plan de symétrie du mètre ruban est revisité pour expliquer les problèmes rencontrés. On montre l'existence d'une solution uniforme qui conduit à une réponse analogue à celle d'une barre d'Ericksen [3] : une courbe moment-rotation qui suit une loi croissante-décroissante-croissante (courbe analogue au résultat donné par Wuest [14] et repris par Seffen et Pellegrino [12]). Cette caractéristique spécifique de la barre d'Ericksen conduit au phénomène de *propagating instabilities* [6] et explique l'apparition de plis localisés et l'existence d'un plateau sur la courbe de réponse moment-rotation (contrainte de Maxwell). De plus, la présence de termes d'ordre supérieur dans l'énergie de déformation permet de faire une analogie avec un modèle de barre d'Ericksen régularisé. Il est alors montré que la discrétisation d'un tel modèle par éléments finis nécessite quelques précautions. Par exemple, après la formation d'un pli, la courbe moment-rotation est affectée par des oscillations dont la période et l'amplitude dépendent de la finesse du maillage.

Pour mieux comprendre ces artefacts numériques, la discrétisation d'un modèle simple d'Ericksen est étudiée et mise en oeuvre dans le logiciel de continuation Diamanliab [1], permettant d'analyser l'in-

fluence des paramètres du modèle (régularisation, conditions limites, finesse du maillage, types d'éléments...) sur le diagramme de bifurcations obtenu.

2 Modèle plan de poutre à section flexible

2.1 Cinématique et énergie de déformation

On trouvera une description complète du modèle dans les travaux de Picault et al. [8]. Le ruban est assimilé dans sa configuration initiale à une poutre à section mince circulaire (Figure 1). Le repère fixe orthonormé direct $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ est choisi tel que (O, \mathbf{e}_1) passe par le barycentre des sections (ligne de référence) et que $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$ soit le plan de symétrie du ruban.

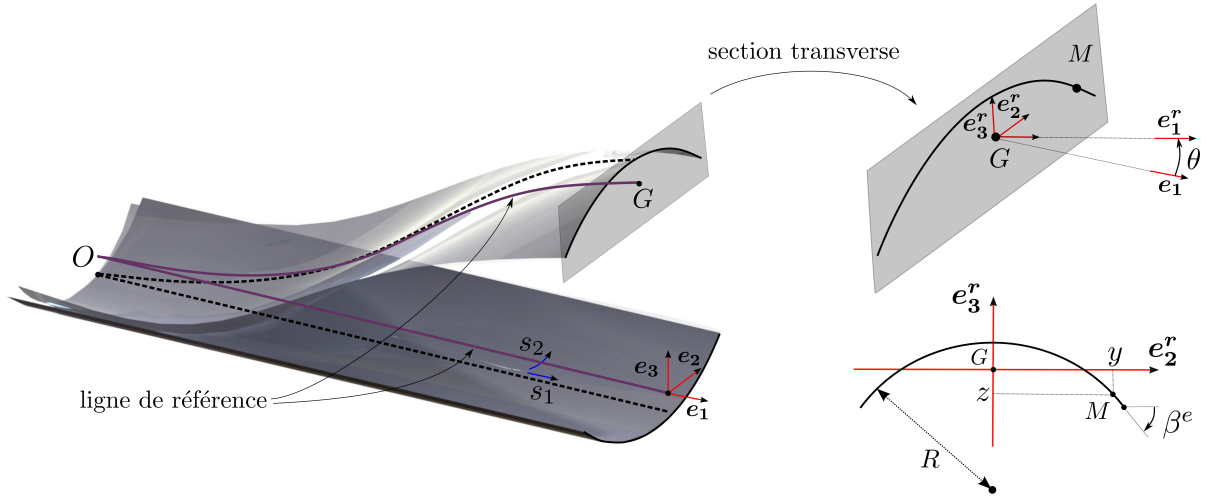


FIGURE 1 – Description du mètre ruban et de la cinématique choisie

On note h l'épaisseur de la coque. Sa surface moyenne est paramétrée par s_1 et s_2 qui sont respectivement la coordonnée curviligne le long de la ligne de référence et de la courbe section : $(s_1, s_2) \in [0, L] \times [-a, a]$, où L et $2a$ sont respectivement les longueurs initiales de la ligne de référence et de la courbe section. Le vecteur position d'un point M de la surface moyenne de la coque dans la configuration déformée est décomposé en deux parties :

$$\mathbf{OM}(s_1, s_2) = \mathbf{OG}(s_1) + \mathbf{GM}(s_1, s_2), \quad (1)$$

où G est le barycentre de la section à laquelle appartient M . Les hypothèses formulées dans le cas d'un mouvement plan conduisent aux expressions suivantes des vecteurs positions [8] :

$$\begin{cases} \mathbf{OG} = (s_1 + u_1(s_1)) \mathbf{e}_1 + u_3(s_1) \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{GM} = y(s_1, s_2) \mathbf{e}_2 + z(s_1, s_2) \mathbf{e}_3^r(s_1), \end{cases} \quad (2)$$

avec $u_1(s_1)$ et $u_3(s_1)$ les déplacements des points de la ligne de référence, y et z les coordonnées du point M dans le repère local $(G, \mathbf{e}_1^r, \mathbf{e}_2^r, \mathbf{e}_3^r)$ qui suit la section dans son mouvement de rotation définie par $\theta(s_1) \mathbf{e}_2$: $\mathbf{e}_3^r(s_1) = \cos(\theta) \mathbf{e}_1 - \sin(\theta) \mathbf{e}_3$. On désigne par $\beta^e(s_1) = a/R(s_1)$ l'angle d'ouverture de la section qui est lié à la courbure transverse $1/R(s_1)$ (Figure 1), supposée constante dans la section. On suppose de plus que l'angle d'ouverture reste faible. On a alors :

$$y(s_1, s_2) = s_2 \quad \text{et} \quad z(s_1, s_2) = \beta^e(s_1) \left(\frac{s_2^2}{2a} - \frac{a}{6} \right). \quad (3)$$

Le modèle de poutre à section flexible comprend ainsi quatre paramètres cinématiques : $u_1(s_1)$, $u_3(s_1)$, $\theta(s_1)$ et $\beta^e(s_1)$. Conformément aux hypothèses formulées dans [8], ces paramètres doivent respecter des contraintes liées à l'orthogonalité de la section par rapport à la ligne de référence :

$$\mathbf{e}_3^r \cdot \mathbf{OG}_{,1} = 0 \quad (4)$$

Cette cinématique est introduite dans l'énergie de déformation de la coque, constitué d'un matériau homogène isotrope de module d'Young E et de coefficient de poisson ν . On fait les hypothèses que cette coque ne subit que des petites déformations élastiques et ne travaille en membrane qu'en traction-compression dans le sens longitudinal du ruban. Après intégration dans la section suivant s_2 , on obtient une expression analytique de l'énergie de déformation du modèle de poutre à section flexible :

$$U_e = \int_0^L (u_e^r + u_e^s + u_e^{rs}) ds_1, \quad (5)$$

avec :

$$\begin{cases} u_e^r = \frac{1}{2} \left(2Eah (e^r)^2 + (Eh\bar{z}^2 + 2aD) (k^r)^2 \right), \\ u_e^s = \frac{1}{2} \left(\frac{Eh}{4} \overline{(z_{,1})^4} + D \left(\overline{(z_{,11})^2} + \overline{(z_{,22} - z_{0,22})^2} + 2(1-\nu) \overline{(z_{,12})^2} \right) \right), \\ u_e^{rs} = \frac{Eh}{2} e^r \overline{(z_{,1})^2} + \frac{Eh}{2} k^r \overline{z(z_{,1})^2} - \nu D k^r \overline{(z_{,22} - z_{0,22})}, \end{cases} \quad (6)$$

dans lequel $e^r = u_{1,1} + \frac{1}{2}(u_{1,1}^2 + u_{3,1}^2)$ et $k_r = \theta_{,1}$ désignent respectivement la déformation de tension et la courbure longitudinale de la poutre. Le coefficient $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ désigne la raideur élastique de flexion de la coque, et la barre supérieure l'opérateur d'intégration dans la section : $\bar{X}(s_1) = \int_{-a}^a X(s_1, s_2) ds_2$. Finalement, cette énergie dépend uniquement de quatre variables cinématiques : $u_1(s_1)$, $u_3(s_1)$ et $\theta(s_1)$ et $\beta^e(s_1)$ au travers de l'expression (3) de z . La contrainte (4) est introduite dans l'énergie potentielle par l'intermédiaire d'un multiplicateur de Lagrange λ_T . Finalement, la formulation faible est obtenue en recherchant les points de stationnarité de la fonctionnelle énergie potentielle.

2.2 Essai de flexion pure

On s'intéresse à l'essai de flexion dans le plan de symétrie du ruban, engendrant une courbure longitudinale orientée dans le sens opposé à la courbure transverse initiale. Plus précisément, on impose aux sections extrémités une rotation $\pm\Theta \mathbf{e}_2$. Deux cas sont considérés pour ses sections : sections rigides et sections libres de se déformer.

2.2.1 Sections rigides

Prenant l'origine du repère dans la section centrale, les conditions limites s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \theta(\frac{L}{2}) = -\theta(-\frac{L}{2}) = \Theta, \\ \beta^e(\frac{L}{2}) = \beta^e(-\frac{L}{2}) = \beta_0^e, \\ \beta_{,1}^e(\frac{L}{2}) = \beta_{,1}^e(-\frac{L}{2}) = 0, \\ u_1(0) = u_3(-\frac{L}{2}) = u_3(\frac{L}{2}) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

2.2.2 Résultats et interprétations

Les résultats qui suivent ont été obtenus à partir d'un modèle éléments finis utilisant des interpolations linéaire (Lagrange) et cubique (Hermite). Les branches d'équilibre statique sont construites en utilisant une technique de continuation par pseudo longueur d'arc.

Un exemple de courbes de réponse du moment en fonction de la rotation est donné Figure 2. Cet essai de flexion a été largement commenté dans la littérature [12, 14] et les courbes obtenues avec le modèle de poutre à section flexible sont en accord avec celles obtenues avec un modèle de coque [8]. Pour des angles Θ faibles, la réponse est linéaire et coïncide avec celle d'un modèle classique de poutre à section indéformable. Puis des effets non-linéaires liés à l'aplatissement de la section apparaissent et le moment atteint un maximum. Le point de rebroussement qui suit ce maximum coïncide avec le début de localisation de l'aplatissement qui mène à l'apparition d'un pli au milieu du ruban. Le pli se forme au fur et à mesure de l'avancée sur la partie de branche d'équilibre instable entre le point de rebroussement et le plateau. Le plateau coïncide avec l'extension de la zone pliée qui se propage à moment constant. Une fois le pli créé, le ruban exhibe trois zones distinctes : la zone de pli, où la section est totalement aplatie, qui est connectée à des zones quasiment non déformées via des zones de transition (cf schéma de la déformée Figure 2).

Les résultats présentés Figure 2 ont été obtenus pour des maillages uniformes paramétrés par N_w , le nombre d'éléments par unité de longueur a , tenant compte du fait que la taille des zones de transition est de l'ordre de grandeur de la largeur du ruban. Pour $N_w = 15$, le plateau est correctement décrit. Pour $N_w = 4$, des oscillations apparaissent avec des parties instables. Chaque période coïncide avec une extension de la zone de pli sur un élément. Ces oscillations peuvent avoir des périodes et des amplitudes importantes pour un maillage peu raffiné (voir le résultat obtenu pour $N_w = 1$ pour lequel seul le début de la première oscillation est visible).

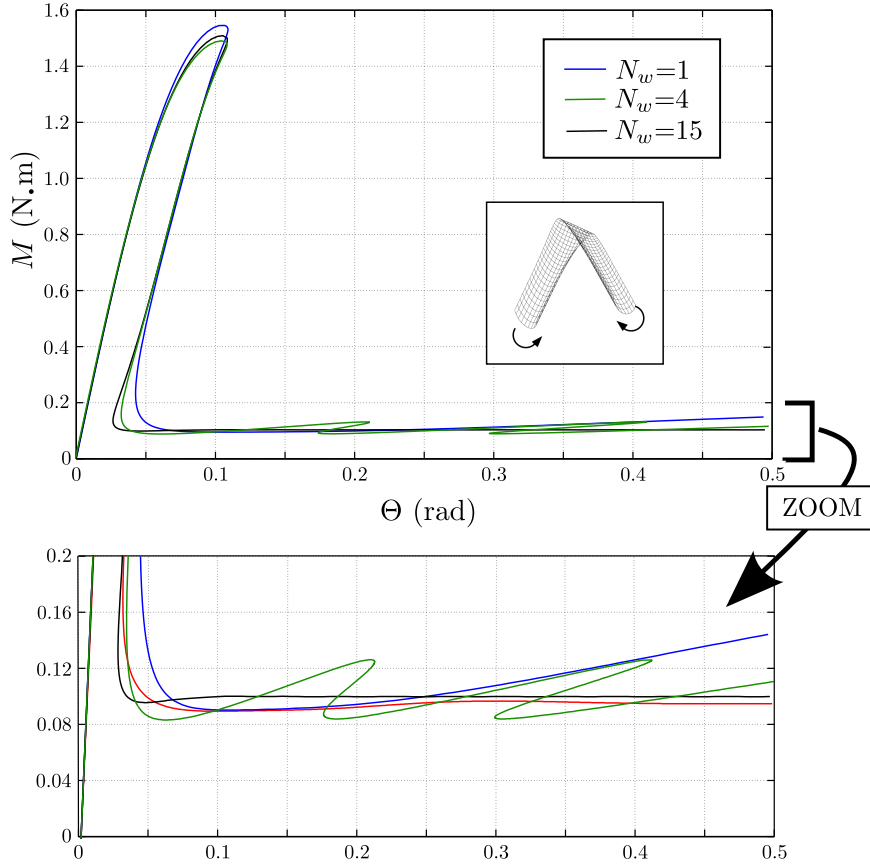


FIGURE 2 – Courbes Moment-rotation $M(\Theta)$ obtenues pour 3 maillages différents ($L=1170\text{mm}$, $R_0=50\text{ mm}$, $a=30\text{ mm}$, $h=0.15\text{ mm}$, $E=210\,000\text{ MPa}$ et $\nu=0.3$).

Pour expliquer ces courbes, le problème de flexion avec sections rigides aux extrémités (7) peut être considéré comme le problème de flexion avec sections libres de se déformer aux extrémités ($\beta^e(\frac{L}{2})$ et $\beta^e(-\frac{L}{2})$ libres), dans lequel on introduit une perturbation. Ce problème de flexion avec sections libres de se déformer aux extrémités admet comme réponse fondamentale (Figure 3) une solution uniforme pour laquelle la courbure longitudinale et l'angle d'ouverture sont constants le long du ruban. Cette courbe exhibe une loi de comportement M en fonction de $k_r = \frac{2\Theta}{L}$ avec une portion croissante, puis une portion décroissante et enfin une portion de nouveau croissante (potentiel non-convexe). La branche fondamentale est instable entre les deux extrema. Dans cette zone, on observe plusieurs points de bifurcation qui sont connectés à des boucles qui rejoignent le plateau. Toutes ces branches correspondent à des modes qui conduisent à l'apparition de plis localisés le long du ruban. Les branches se différencient par le nombre et la localisation des plis qui apparaissent. Seule la première branche est représentée sur la Figure 3. La partie instable de cette branche coïncide avec la création progressive d'un pli au milieu du ruban et le plateau avec l'extension de la zone de pli, où la section est totalement aplatée. Utilisant le principe énergétique de Maxwell, le moment M^* peut être calculé à partir de la branche fondamentale en recherchant le moment qui réalise l'égalité des aires A_1 et A_2 hachurées sur la Figure 3. Les angles correspondant aux premier et troisième points d'intersection de la branche fondamentale avec la courbe $M = M^*$ sont notés θ_1 et θ_2 . Pour la branche fondamentale, ils conduisent à des courbures longitudinales $k_1 = \frac{2\theta_1}{L}$ et $k_2 = \frac{2\theta_2}{L}$ uniformes. Pour les solutions avec plis localisés, on retrouve respectivement ces

valeurs de courbures dans les zones quasiment non déformées et dans la zone du pli. Ces résultats sont obtenus pour des sections libres de se déformer aux extrémités. Imposer à la section de ne pas se déformer agit comme une perturbation et il n’y a plus de point de bifurcation près du sommet. La réponse suit la courbe fondamentale au début puis s’en détourne pour suivre la première branche bifurquée.

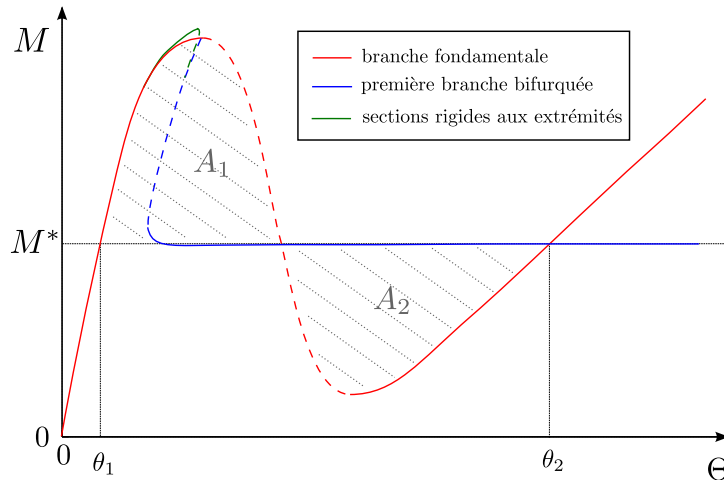


FIGURE 3 – Diagramme schématique de bifurcation pour l’essai de flexion avec sections libres aux extrémités (bleu et rouge) et rigides aux extrémités (vert). Moment de flexion M en fonction de la rotation aux extrémités Θ . Parties stables en lignes pleines et parties instables en lignes pointillées.

3 Le modèle de la barre d’Ericksen régularisé

3.1 Analogies

Il apparaît à présent que le modèle de poutre à section flexible appliqué aux mètres rubans présente des analogies avec un modèle de barre d’Ericksen régularisé [3, 4, 10, 11, 13] :

- une solution uniforme ($k_r(s_1) = \theta_{,1}$ et $\beta^e(s_1)$ constants) menant à une loi de comportement M fonction de k_r , issu d’un potentiel non-convexe et présentant une première partie croissante, puis une partie décroissante et enfin une troisième partie de nouveau croissante.
- les termes en z , $z_{,1}$ et $z_{,11}$ dans l’énergie de déformation (6) introduisent des termes régularisant en β^e , $\beta_{,1}^e$ et $\beta_{,11}^e$. Le problème est régularisé dans le sens où la formation de régions avec des évolutions rapides des déformations est pénalisée [13].

3.2 Problèmes liés à la discrétisation

Les problèmes liés à la discrétisation d’un modèle d’Ericksen non-régularisé ont été largement étudiés par Truskinovski et ses co-auteurs [9, 10, 11]. Reprenons l’exemple traité dans ces travaux : un essai de traction sur une barre d’Ericksen constitué d’un matériau obéissant à une loi de comportement linéaire par morceaux (4). Le problème est discrétisé avec quatre éléments linéaires. Il est alors équivalent à quatre ressorts en série ayant une raideur linéaire par morceaux.

La réponse force-déplacement à l’essai de traction est obtenue en considérant que pour une contrainte donnée, on peut avoir jusqu’à trois valeurs de déformations possibles dans chaque élément. Cela conduit au diagramme de bifurcation donné Figure 4 à droite. Lorsque des termes de régularisation sont introduits, ce diagramme est modifié : on peut montrer que les points de bifurcations multiples se scindent en plusieurs points de bifurcations simples. De plus, on peut aussi montrer que la période et l’amplitude des oscillations décroissent lorsqu’on raffine le maillage. De même, l’étude montre que le degré d’interpolation des déplacements a une influence.

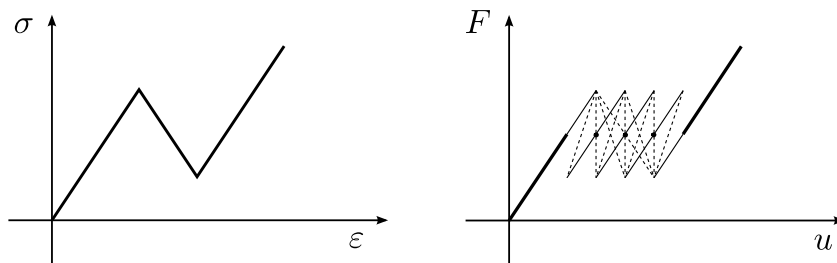


FIGURE 4 – Modèle de barre d’Ericksen non régularisé avec une loi de comportement élastique par morceaux (à gauche). Diagramme de bifurcation obtenu avec un modèle éléments finis pour l’essai de traction avec quatre éléments finis à interpolation linéaire en déplacement (à droite) : parties stables (lignes pleines épaisses), parties métastables (lignes pleines fines) et parties instables (lignes pointillées).

4 Conclusion

Le modèle de poutre à section flexible appliqué au comportement des mètres rubans s’apparente à un modèle de barre d’Ericksen régularisé. Ce modèle permet de rendre compte de la formation de plis localisés. Il explique aussi le caractère fortement instable des mètres rubans dans certaines configurations par l’analyse des diagrammes de bifurcations obtenus. Une étude approfondie montre aussi l’influence des termes régularisant et des paramètres de discrétisation éléments finis sur les diagrammes de bifurcations obtenus et illustre ainsi les précautions à prendre pour la simulation numérique de tels modèles.

5 Références bibliographiques

Références

- [1] I. Charpentier, B. Cochelin, K. Lampoh, *Diamanlab - An interactive Taylor-based continuation in Matlab*, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00853599>.
- [2] COMSOL AB, *COMSOL Multiphysics User’s Guide v4.2*, Stockholm, Sweden, September 2011.
- [3] J. L. Ericksen. *Introduction to the Thermodynamics of Solids*. Applied Mathematical Sciences, Vol. 131, Springer, 1998.
- [4] J. L. Ericksen. *Equilibrium of bars*. Journal of elasticity, Vol. 5, 191-201, 1975.
- [5] F. Guinot, S. Bourgeois, B. Cochelin, L. Blanchard. *A planar rod model with flexible thin-walled cross-sections. Application to the folding of tape springs*, Int. J. Solids Structures, 49 (1), 73-86, 2012.
- [6] S. Kyriakides. 1993. *Propagating instabilities in structures*. Advances in applied mechanics 30, 67-189, 1993.
- [7] E. Picault, S. Bourgeois, B. Cochelin, F. Guinot. *A rod model with thin-walled flexible cross-section : Extension to 3D motions and application to 3D foldings of tape springs.*, Int. J. Solids Structures, 84 (18), 64-81, 2016.
- [8] E. Picault, P. Marone-Hitz, S. Bourgeois, B. Cochelin, F. Guinot. *A planar rod model with flexible cross-section for the folding and the dynamic deployment of tape springs : improvements and comparisons with experiments.*, Int. J. Solids Structures, 51 (18), 3226-3238, 2014.
- [9] G. Puglisi et L. Truskinovsky. *Mechanics of discrete chains with bi-stable elements*. Journal of the mechanics and physics of solids, Vol. 1, 1-27, 2000.
- [10] G. Puglisi et L. Truskinovsky. *Rate independent hysteresis in a bi-stable chain*. Journal of the mechanics and physics of solids, Vol. 50, 165-187, 2002.
- [11] R. Rogers et L. Truskinovski, *Discretization and hysteresis*. Physica B, Vol. 233, 370-375, 1997.
- [12] K.A. Seffen, S. Pellegrino. *Deployment dynamics of tape springs*, Proc. R. Soc. Lond. A, 455, 1003-1048, 1999.
- [13] L. Truskinovsky et G. Zanzotto. *Ericksen’s bar revisited : energy wiggles*. Journal of the mechanics and physics of solids, Vol. 44, 1371-1408, 1996.
- [14] W. Wuest, 1954. *Einige Anwendungen der Theorie der Zylinderschale*. Z. Angew. Math. Mech. 34, 444-454, 1954.