

# Continuation d'antirésonance d'absorbeurs dynamiques non linéaires

A. Renault<sup>1,2</sup>, O. Thomas<sup>1</sup>, H. Mahé<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Arts et Métiers ParisTech, LSIS UMR CNRS 7296, 8 bd. Louis XIV 59046 Lille, France, {alexandre.renault,olivier.thomas}@ensam.eu

<sup>2</sup> Valeo Transmissions, Centre d'Étude des Produits Nouveaux Espace Industriel Nord, Route de Poulainville, 80009 Amiens Cedex 1, France, {alexandre.renault,herve.mahe}@valeo.com

**Résumé** — Cette étude porte sur des absorbeurs non linéaires de vibrations utilisés pour atténuer les irrégularités de rotation de systèmes tournants. Ils sont accordés sur un ordre de la vitesse de rotation du système vibrant. Cependant, leurs fortes non linéarités intrinsèques engendrent un désaccord de l'absorbeur pour de grandes amplitudes d'oscillation. On présente une méthode de suivi de fréquence d'antirésonance basée sur une technique de continuation numérique. Cette méthode permet une prédiction rapide et précise du point de fonctionnement du système vis-à-vis de l'amplitude d'oscillation de l'absorbeur.

**Mots clés** — Continuation numérique, Antirésonance, Non-linéarités.

## 1 Introduction

Les absorbeurs pendulaires centrifuges (APC) sont de plus en plus fréquemment utilisés pour atténuer les irrégularités de rotation, appelées "acyclismes", de systèmes tournants à un ordre de la vitesse de rotation. Ces systèmes passifs ont la capacité de s'adapter à la vitesse de rotation du système et de rester accordés à un ordre d'excitation donné. Ils fonctionnent sur le même principe qu'un amortisseur à masses accordées à raideur variable. En pratique, l'absorbeur consiste en une masse dont le centre de gravité oscille librement par rapport à un voile support, le long d'une trajectoire spécifique, généralement circulaire ou épicycloïdale [1]. Cependant, l'APC est sujet à de fortes non-linéarités géométriques, intrinsèques aux systèmes pendulaires, et également à de fortes interactions non linéaires inertielles entre la masse oscillante et son voile support. Ces effets combinés engendrent un désaccord de l'absorbeur à mesure que l'amplitude des oscillations augmente. Le point de fonctionnement effectif du système n'est donc pas le point de fonctionnement optimal, c'est-à-dire une antirésonance [2]. La prédiction de ce désaccord représente une aide précieuse à la conception.

L'état de l'art sur ce type d'absorbeur montre que les études sont principalement basées sur des méthodes analytiques de perturbation et intégrations temporelles des équations de mouvement. La première catégorie est inappropriée pour de très grandes amplitudes d'oscillation alors que la deuxième induit des coûts de calculs importants. L'étude décrite ici se concentrera sur le calcul de solutions périodiques via une méthode de continuation numérique, la méthode asymptotique numérique (MAN) [3] couplée à une méthode d'équilibrage harmonique (EH) [4].

La méthode de continuation d'antirésonance proposée s'inspire fortement des techniques de suivi de bifurcation [5]. Le point limite d'intérêt est détecté via le calcul d'une fonction test et l'ajout d'une équation de contrainte au système initial autorise son suivi par rapport à deux paramètres de continuation. La fréquence et l'amplitude d'excitation, par exemple.

## 2 Solutions périodiques

Les équations de mouvement de l'APC peuvent s'écrire sous la forme :

$$M(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{f}_{in}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + C\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{f}_{int}(\mathbf{x}) = \mathbf{F} \cos(\omega t), \quad (1)$$

où  $\mathbf{x}$  est le vecteur des inconnues,  $M(\mathbf{x})$  est la matrice de masse et dépend de  $\mathbf{x}$ .  $C$  est la matrice d'amortissement.  $\mathbf{f}_{in}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$  est le vecteur des forces inertielles, incluant les termes de Coriolis, et dépend de  $\mathbf{x}$  et  $\dot{\mathbf{x}}$ .  $\mathbf{f}_{int}(\mathbf{x})$  est le vecteur des forces internes et dépend de  $\mathbf{x}$ . Ici, un seul oscillateur est forcé. Le vecteur des forces externes est donc  $\mathbf{F} = [0 \ \dots \ f \ \dots \ 0]$  où  $f$  est l'amplitude d'excitation de l'oscillateur

forcé.

On s'intéresse ici aux solutions périodiques de (1), le vecteur d'inconnues est donc développé en série de Fourier tronquée :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^H \mathbf{x}_{ci} \cos(i\omega t) + \mathbf{x}_{si} \sin(i\omega t). \quad (2)$$

En substituant (2) dans (1) et en appliquant la procédure d'EH, on obtient un système algébrique non linéaire dépendant de  $\mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{x}_{ci}$ ,  $\mathbf{x}_{si}$ ,  $\omega$  et  $f$ . La précision des solutions de ce système dépend de  $H$ , le nombre d'harmoniques retenues dans (2). Le système final à résoudre peut s'écrire :

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}, \omega, f) = 0. \quad (3)$$

Où  $\mathbf{U} = [\mathbf{x}_0 \ \mathbf{x}_{ci} \ \mathbf{x}_{si} \ \dots \ \mathbf{x}_{cH} \ \mathbf{x}_{sH}]$ . La méthode classique de continuation numérique, en régime forcé, consiste à considérer  $\omega$  ou  $f$  comme paramètre de continuation et à calculer les solutions par rapport à l'un d'entre eux en imposant l'autre constant [4]. Dans le cas de vibrations libres ( $f = 0$ ), la fréquence d'oscillation peut aussi être calculée comme une fonction de l'amplitude des oscillations. Dans ce cas, le système doit être conservatif ( $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ )[6].

Finalement, (3) est résolu par la méthode asymptotique numérique, pour laquelle une refonte quadratique de (3) est nécessaire [4]. Contrairement aux algorithmes de type prédiction-correction, où la solution est calculée point par point, la MAN considère une représentation continue morceau par morceau de la solution, en utilisant un développement asymptotique de cette dernière, à partir d'un point de solution connu ( $\mathbf{U}_0, \omega_0$ ), par rapport à un paramètre  $a$ . Dans le cas d'une continuation par rapport à  $f$  constant, on écrit :

$$\mathbf{U}(a) = \mathbf{U}_0 + a\mathbf{U}_1 + a^2\mathbf{U}_2 + \dots + a^N\mathbf{U}_N. \quad (4)$$

$$\omega(a) = \omega_0 + a\omega_1 + a^2\omega_2 + \dots + a^N\omega_N. \quad (5)$$

On précise qu'à ce stade le paramètre de contrôle  $\omega$  est également inconnu et le système (3) est sous-déterminé. La définition du paramètre  $a$  fournit une équation supplémentaire qui permet de fermer ce système [7]. Ici,  $a$  représente la pseudo longueur d'arc le long de la branche de solution. En injectant (4) dans (3) puis en ordonnant les termes suivant les puissances de  $a$ , on obtient une succession de systèmes linéaires en cascade à résoudre.

### 3 Continuation de points singuliers

On s'intéresse maintenant à suivre des points singuliers des courbes solutions, notamment les points d'antirésonance, lorsque l'amplitude d'une des coordonnées du système est minimale en fonction de  $\omega$ . On s'inspire pour cela du suivi de points limites, bien connu [8]. On considère le système algébrique non linéaire défini par :

$$\tilde{\mathbf{R}}(\tilde{\mathbf{U}}, \mu, \lambda) = \begin{cases} \mathbf{R}(\mathbf{U}, \mu, \lambda) = 0 \\ z - f(\mathbf{U}) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

avec  $\tilde{\mathbf{U}} = [\mathbf{U} z]^T$ . Pour être plus général, on choisit  $\mu$  et  $\lambda$  comme paramètres de continuation.  $z$  est une inconnue scalaire. On suppose que la courbe de réponse  $z = g(\mu, \lambda)$ , pour  $\lambda$  constant, comporte un point limite  $F$  et un minimum  $A$  (Figure 1).

#### 3.1 Suivi de point limite

Le suivi de  $F$  en fonction de l'évolution de  $\lambda$  implique d'adjoindre à (6) une équation imposant la singularité de  $\tilde{\mathbf{J}}$ , la matrice jacobienne de  $\tilde{\mathbf{R}}$  par rapport à  $\tilde{\mathbf{U}}$ . En effet, si on différencie  $\tilde{\mathbf{R}}$  par rapport à  $\mu$  on obtient :

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{R}}}{\partial \tilde{\mathbf{U}}} \frac{d\tilde{\mathbf{U}}}{d\mu} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{R}}}{\partial \mu} = 0 \quad (7)$$

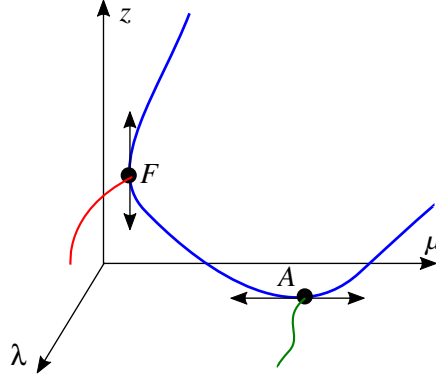


FIGURE 1 – Illustration du suivi du point limite  $F$  et du minimum  $A$  en fonction de l'évolution de  $\lambda$

La tangente au point  $F$  sur la courbe  $z = g(\mu, \lambda)$ , pour  $\lambda$  donné, est verticale.  $\frac{d\tilde{U}}{d\mu}$  n'est donc pas défini et  $\frac{\partial \tilde{R}}{\partial \mu}$  est non nul [9]. Donc  $\frac{\partial \tilde{R}}{\partial \tilde{U}}$  doit être singulier.

En pratique, on résout :

$$\begin{cases} \tilde{R}(\tilde{U}, \mu, \lambda) = 0 \\ \det(\tilde{J}) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

### 3.2 Suivi d'antirésonance

Le point  $A$ , assimilable à une antirésonance, n'est pas un point limite. L'idée consiste donc à définir un nouveau système algébrique à partir de (6) dans lequel  $z$  devient le paramètre de contrôle,  $\mu$  une inconnue et  $\lambda$  une constante :

$$\mathbf{R}^*(\mathbf{U}^*, z, \lambda) = 0 \quad (9)$$

avec  $\mathbf{U}^* = [U \mu]^\top$ . Ainsi,  $\mathbf{J}^*$ , la matrice jacobienne de  $\mathbf{R}^*$  par rapport à  $\mathbf{U}^*$  devient singulière au point  $A$ . En effet, (9) implique :

$$\frac{\partial \mathbf{R}^*}{\partial \mathbf{U}^*} \frac{d\mathbf{U}^*}{dz} + \frac{\partial \mathbf{R}^*}{\partial z} = 0 \quad (10)$$

Pour le système (9), la tangente au point  $A$  de  $z(\mu, \lambda)$ , pour  $\lambda$  donné, est verticale (car on a échangé les rôles de  $\mu$  et  $z$ ),  $\frac{d\mathbf{U}^*}{dz}$  n'est donc pas défini et  $\frac{\partial \mathbf{R}^*}{\partial z}$  est non nul [9]. Donc  $\frac{\partial \mathbf{R}^*}{\partial \mathbf{U}^*}$  doit être singulier. Cette condition peut être satisfaite en égalisant à zéro le déterminant de  $\mathbf{J}^*$ . En pratique, on préfère utiliser le vecteur propre  $\Phi$  de  $\mathbf{J}^*$  [10], tel que :

$$\det(\mathbf{J}^*) = 0 \iff \exists \Phi \neq 0; \mathbf{J}^* \Phi = 0. \quad (11)$$

Le système final à résoudre s'écrit :

$$\begin{cases} \tilde{R}(\tilde{U}, \mu, \lambda) = 0 \\ \mathbf{J}^* \Phi = 0 \\ \|\Phi\| - 1 = 0 \end{cases} \quad (12)$$

La troisième équation de (12) normalise  $\Phi$  afin que  $\Phi \neq 0$  et assure l'unicité de la solution.

## 4 Application

On propose d'illustrer la méthode décrite plus haut sur le système algébrique :

$$\mathbf{R}(U, \mu, \lambda) = \begin{cases} z_1 z_2 - \mu^2 = 0 \\ z_1 (z_2 + 10) + 20 - \lambda \mu = 0 \end{cases} \quad (13)$$

où  $U = [z_1, z_2]$ ,  $\mu$  et  $\lambda$  sont les deux paramètres de contrôle. On associe à (13) la fonction scalaire :

$$z^2 - z_1^2 - z_2^2 = 0 \quad (14)$$

Le système (13) a été construit tel que la fonction  $z = g(\mu, \lambda)$  pour  $-1 \leq \mu \leq 1$  et  $-1 \leq \lambda \leq 1$  représente une surface 3D comportant un minimum (figure 2). De manière plus générale, les inconnues  $z_1$  et  $z_2$  peuvent être vues respectivement comme les parties cosinus et sinus d'une solution harmonique dont la norme est égale à  $z$ .

$J^*$  a donc comme expression :

$$J^* = \frac{\partial R^*}{\partial U^*} = \begin{bmatrix} z_2 & z_1 & -2\mu \\ z_2 + 10 & z_1 & -\lambda \\ -2z_1 & -2z_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

La figure 2 illustre la méthode de continuation d'antirésonance.

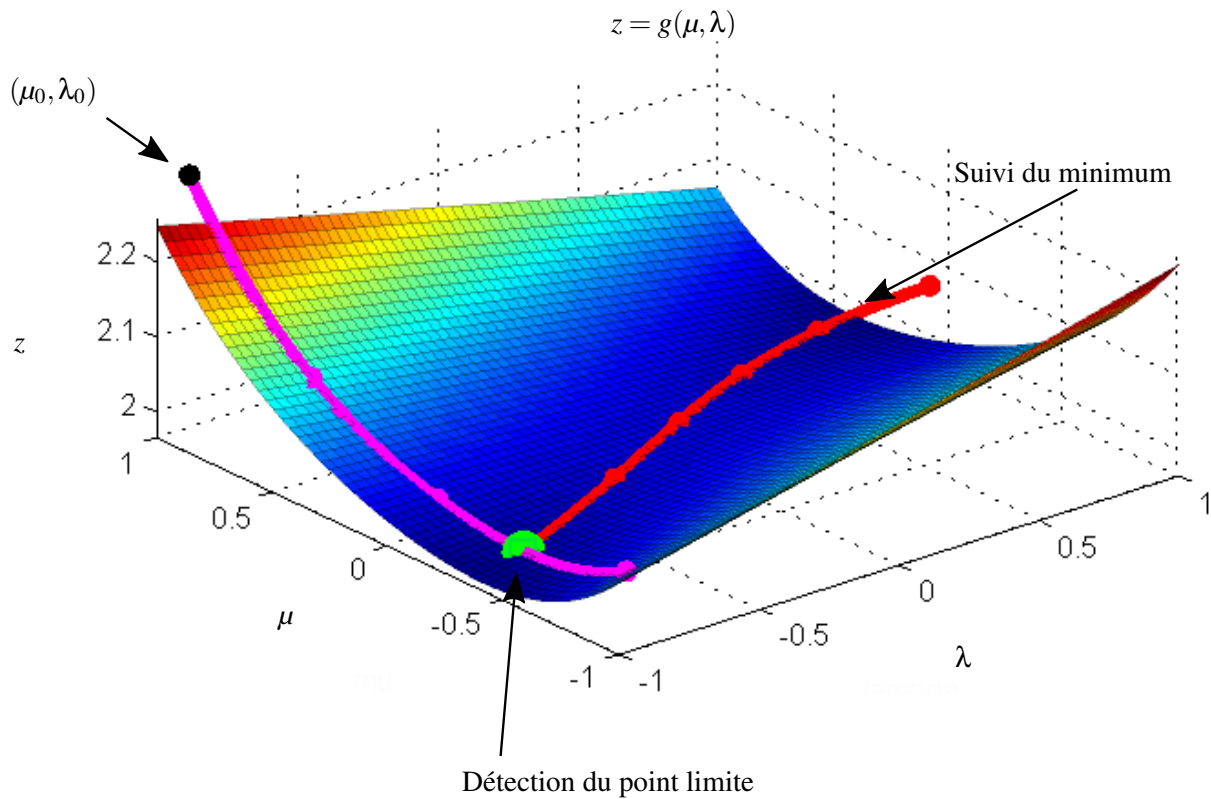


FIGURE 2 – Illustration de la méthode de continuation d'antirésonance

## 5 Conclusion

La procédure décrite ci-dessus est basée sur une résolution fréquentielle par la méthode de l'équilibrage harmonique couplée à une méthode de continuation numérique par pseudo longueur d'arc. Cette étude fait suite à une précédente méthode de suivi d'antirésonance d'absorbeur dynamique conservatif [2]. L'application de cette méthode autorise le suivi du minimum (ou du maximum) d'une ou plusieurs harmoniques de l'amplitude de réponse d'un oscillateur. Le point limite est détecté via le changement de signe d'une fonction test. Enfin, le suivi de ce point limite est rendu possible par l'ajout d'une équation de contrainte au système algébrique initial.

## Références

- [1] H.H. Denman. Tautochronic bifilar pendulum torsion absorbers for reciprocating engines. *Journal of Sound and Vibration*, 159 :251 – 277, 1992.

- [2] A. Renault, O. Thomas, H. Mahé, and Y. Lefebvre. Hardening softening behavior of antiresonance for non linear torsional vibration absorbers. *24<sup>th</sup> International Congress of Theoretical and Applied Mechanics*, 2016.
- [3] B. Cochelin, D. Noureddine, and M. Potier-Ferry. *Méthode asymptotique numérique*. Collection méthodes numériques. Hermès Science, Paris, 2007.
- [4] B. Cochelin and C. Vergez. A high order purely frequency-based harmonic balance formulation for continuation of periodic solutions. *Journal of Sound and Vibration*, 324(12) :243 – 262, 2009.
- [5] T. Detroux, L. Renson, L. Masset, and G. Kerschen. The harmonic balance method for bifurcation analysis of large-scale nonlinear mechanical systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 296 :18 – 38, 2015.
- [6] S. Karkar, B. Cochelin, and C. Vergez. A comparative study of the harmonic balance method and the orthogonal collocation method on stiff nonlinear systems. *Journal of Sound and Vibration*, 333(12) :2554 – 2567, 2014.
- [7] B. Cochelin. A path-following technique via an asymptotic-numerical method. *Computers & Structures*, 53(5) :1181 – 1192, 1994.
- [8] S. Baguet and B. Cochelin. Determination of branches of limit points by an asymptotic numerical method. *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, 2000.
- [9] R. Seydel. *Practical Bifurcation and Stability Analysis. 3rd. Edition*. Interdisciplinary Applied Mathematics. 5. Springer, 2010.
- [10] S. Baguet. *Stabilité des structures minces et sensibilité aux imperfections par la méthode asymptotique numérique*. Thèse. Université Aix-Marseille II, 2001.