

Conduction électrique dans un domaine DEM continu

C. Hubert¹, D. André², L. Dubar³, I. Iordanoff⁴, J.L. Charles⁵

¹ LAMIH, UMR CNRS 8201, Université de Valenciennes, 59313 Valenciennes, France, cedric.hubert@univ-valenciennes.fr

² SPCTS, UMR CNRS 7315, European Ceramic Center, 12 Rue Atlantis, 87068 Limoges Cedex, France, damien.andre@unilim.fr

³ LAMIH, UMR CNRS 8201, Université de Valenciennes, 59313 Valenciennes, France, laurent.dubar@univ-valenciennes.fr

⁴ I2M-DuMAS, UMR CNRS 5295, Arts & Métiers ParisTech, 33405 Talence, France, ivan.iordanoff@ensam.eu

⁵ I2M-DuMAS, UMR CNRS 5295, Arts & Métiers ParisTech, 33405 Talence, France, jl.charles@i2m.u-bordeaux1.fr

Résumé — Cet article présente une méthode originale de simulation de la conduction électrique dans des milieux continus modélisés par la Méthode des Éléments Discrets (DEM). La méthode utilisée repose sur la théorie des graphes appliquée aux réseaux de résistances électriques, où la résistance électrique entre deux éléments discrets est estimée par le biais de « surfaces de transmission ». Cette méthode a été implémentée dans l'API GranOO, puis validée sur deux cas tests dont les résultats ont été comparés à la théorie ou à la Méthode des Éléments Finis, lorsque les cas deviennent trop complexes.

Mots clés — Méthode des Éléments Discrets, Conduction Électrique, Effet Joule.

1 Introduction

La Méthode des Éléments Discrets (DEM) a été initiée, peu avant les années 1980 [1], pour résoudre une classe de problèmes qui ne pouvaient pas être traités avec des méthodes analytiques ou des méthodes continues. La DEM originale, dénommée *particle method*, est basée sur des sphères rigides qui interagissent via des contacts mécaniques. L'étude de l'écoulement du sable dans un sablier et les problèmes de compaction sont donc naturellement bien adaptés à ce type de méthode, néanmoins coûteuse en temps de calcul. Ces dernières années, avec l'augmentation des puissances de calcul, l'intérêt pour la DEM est revenu et plusieurs méthodes dérivées de la méthode originale ont vu le jour, notamment les méthodes dites *lattice*, qui permettent de considérer un milieu continu comme un ensemble d'interactions physiques. Cette méthode permet par exemple d'étudier la fissuration de matériaux élastiques fragiles [2]. Ici, les interactions sont des poutres, et les nœuds du réseau sont positionnés sur les grains de la structure.

Une approche intéressante est d'associer ces deux méthodes dans le but de pouvoir analyser à la fois le comportement élastique fragile d'un matériaux et, en cas de rupture, de continuer à gérer les interactions entre les éléments de matière rompus (troisième corps) et les autres interactions en jeu comme le contact entre deux corps massifs dans un problème de tribologie.

En plus des aspects mécaniques, les problèmes de tribologie font souvent intervenir d'autres grandeurs physiques, comme la température lorsque les vitesses et pressions de contact deviennent importantes, ou le courant électrique lorsqu'il s'agit de systèmes de captage de l'énergie électrique.

Cet article se focalise sur le couplage électrique-thermique et présente une méthode originale de simulation de la conduction électrique dans des milieux continus modélisés par la Méthode des Éléments Discrets. La méthode utilisée repose sur la théorie des graphes appliquée aux réseaux de résistances électriques. Cette méthode est présentée dans la première partie de cet article puis, après implémentation dans l'API GranOO [3], elle est validée sur deux cas tests dont les résultats sont comparés à la théorie ou à la Méthode des Éléments Finis, lorsque les cas deviennent trop complexes.

2 Présentation de la méthode implémentée

2.1 Hypothèse d'un domaine DEM continu

La plupart des études sur la conduction électrique et/ou la conduction thermique menées avec la DEM impliquent naturellement des milieux granulaires. Le contact entre les éléments discrets est ponctuel (ou

presque) et s'applique donc bien à la simulation de matériaux frittés [4], ou à l'analyse de défauts sur des roulements à billes [5] par exemple.

Pour la simulation de matériaux considérés continus, et avec comme application la conduction thermique, Terreros et al. [6] ont proposé la notion de « surface de transmission » entre deux éléments discrets, qui est déterminée comme une fonction du rayon moyen des deux éléments en contact et du nombre de voisins de l'élément considéré, comme illustré sur la Figure 1 pour un domaine cristallin cubique, dont un élément quelconque (hors surfaces libres) a six voisins.

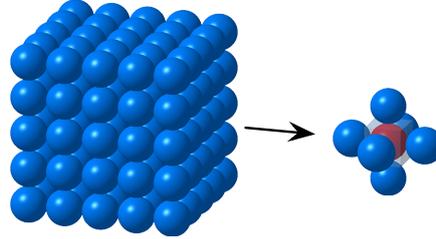


FIGURE 1 – Exemple d'un élément discret avec six voisins, dans un domaine cristallin cubique.

Dans le cas illustré sur la Figure 1, la surface de transmission relative à l'élément i vaut $S_i = 4r_i^2$, avec r_i le rayon de l'élément discret i . Cependant, lorsque le domaine n'est pas géométriquement arrangé et que le rayon des éléments discrets n'est pas uniforme, un élément discret n'a pas toujours six voisins, et l'expression de S_i présentée précédemment n'est plus valable. On remplace alors le cube illustré sur la Figure 1 par un polyèdre dont le nombre de faces correspond au nombre de voisins de l'élément discret i , et Terreros et al. [6] ont proposé le paramètre adimensionnel α pour déterminer la surface d'échange entre deux éléments discrets, qui s'écrit désormais $S_i = \alpha r_i^2$. Dans le cas d'arrangements connus, les valeurs théoriques sont utilisées. Pour les autres, une interpolation linéaire est utilisée, comme le montre le graphe de la Figure 2.

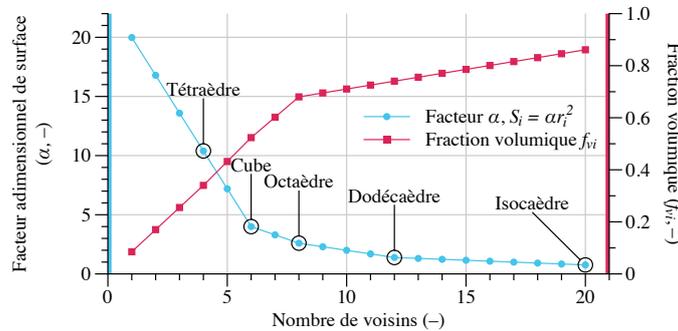


FIGURE 2 – Paramètre adimensionnel α et fraction volumique f_i en fonction du nombre de voisins d'un élément discret considéré, selon Terreros et al. [6].

La Figure 2 illustre, en plus du paramètre α , l'évolution de la fraction volumique f_i relative à l'élément discret i , là aussi en fonction du nombre de voisins. Cette grandeur sera utilisée dans la Section 2.3 dans le calcul de la chaleur générée par le courant électrique.

2.2 Conduction électrique dans un domaine DEM continu

La méthode choisie pour déterminer l'état électrique à chaque pas de temps de la simulation DEM est basée sur la méthode des graphes appliquée aux résistances électriques en réseaux, notamment présentée par Strang [7]. Le point de départ est de considérer le domaine discret comme un grand réseau de résistances électriques, pour lequel le centre des éléments discrets correspond à un nœud du réseau, et deux éléments en contact (éléments voisins) constituent une résistance électrique R_{ij} , définie par

$$R_{ij} = \frac{\rho_e \ell}{S_{ij}}, \quad (1)$$

avec ρ_e la résistivité électrique du matériau, ℓ la distance entre les centres des deux éléments voisins. S_{ij} est la surface de transmission équivalente entre ces deux éléments, déterminée par

$$S_{ij} = \sqrt{S_i S_j}, \quad (2)$$

où S_i et S_j sont les surfaces de transmission entre les éléments i et j vues de l'élément i et j , de manière à ce que la condition $S_{ij} = S_{ji}$ soit vérifiée. À titre d'illustration, un réseau de quatre résistances impliquant donc cinq éléments discrets est illustré sur la Figure 3.

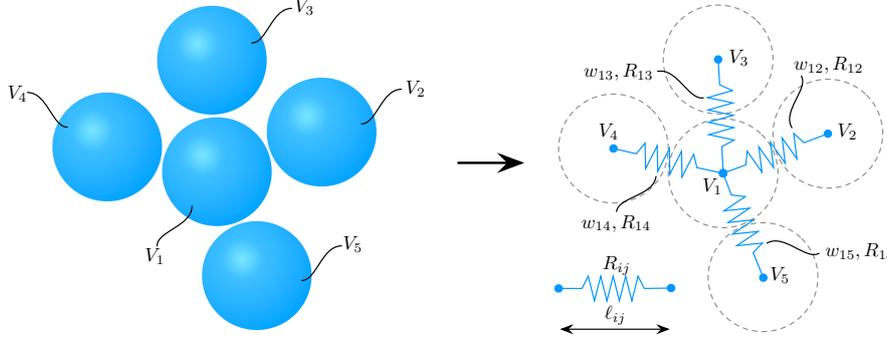


FIGURE 3 – Illustration d'un circuit électrique formé par cinq éléments discrets.

Le réseau de résistances illustré sur la Figure 3 est composé de n nœuds et m branches, correspondant ici à des résistances électriques. Les connexions du réseau sont stockées dans une matrice d'incidence orientée \mathbf{A} , avec $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. À la ligne j de la matrice \mathbf{A} , les valeurs non nulles (-1 et $+1$) indiquent la paire de nœuds connectée à la branche j .

Dans cette étude, le régime de conduction électrique est considéré comme étant suffisamment rapide, sans impédance ni courant alternatif pour être supposé permanent. Les potentiels électriques aux nœuds (centre des éléments discrets) et courants dans les branches (entre deux éléments discrets) sont donc calculés grâce aux lois de Kirchhoff, c'est-à-dire :

- la loi des nœuds (*Kirchhoff Current Law*, KCL), qui dit que la somme des courants entrants et sortants d'un nœud est nulle,
- et la loi des mailles (*Kirchhoff Voltage Law*, KVL), qui dit que la somme des potentiels le long d'une maille du circuit électrique est nulle.

Ces lois peuvent s'écrire sous forme matricielle, ce qui donne le jeu d'équations suivant :

$$\mathbf{A}^T \mathbf{w} = \mathbf{f}, \quad (3)$$

$$\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{e}, \quad (4)$$

$$\text{and } \mathbf{C}^{-1} \mathbf{w} = \mathbf{e}. \quad (5)$$

Dans l'équation 3, correspondant à la première loi de Kirchhoff (KCL), la matrice d'incidence \mathbf{A} est transposée pour accéder aux branches. Cette équation permet de dire que la somme des courants, donnés dans le vecteur \mathbf{w} ($\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$), dans les branches entrants dans un nœud du circuit est égale aux courants imposés comme conditions aux limites, donnés dans le vecteur \mathbf{f} . La deuxième équation (équation 4), assure que la somme des potentiels \mathbf{e} ($\mathbf{e} \in \mathbb{R}^m$) dans une maille est nulle. Elle dépend des sources de potentiels données dans le vecteur \mathbf{b} , et des potentiels aux nœuds donnés dans le vecteur \mathbf{u} . Enfin, les différences de potentiels \mathbf{e} dans les branches sont calculées grâce à la loi d'Ohm (équation 5), qui dépend de la conductance d'une branche (inverse de la résistance), données dans la matrice de conductance \mathbf{C} ($\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times m}$) et des courants dans les branches donnés dans le vecteur \mathbf{w} . Ce jeu d'équation peut être écrit sous la forme d'une seule équation,

$$\mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{b} - \mathbf{f} = \mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{u}, \quad (6)$$

ou sous forme matricielle,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}^{-1} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{f} \end{Bmatrix}. \quad (7)$$

La résolution de ce système débute par l’obtention du vecteur des potentiels aux nœuds u , qui nécessite d’inverser la matrice $\mathbf{K} = \mathbf{A}^T \mathbf{C} \mathbf{A}$. L’obtention du vecteur des courants dans les branches w est ensuite directe.

L’inversion de la matrice \mathbf{K} peut être assez coûteuse en ressources numériques, et particulièrement pour les domaines DEM importants. À titre d’exemple, un domaine contenant 5000 éléments discrets aura donc environ 5000 nœuds et 15500 branches¹. La taille du bloc carré du système matriciel sera donc $(m+n)^2 = 20500^2$. De plus, la matrice \mathbf{A} ne contient des valeurs non nulles que lorsque des connections existent, et la matrice de conductance \mathbf{C} est diagonale. La matrice \mathbf{K} peut donc être considérée creuse et doit être traitée comme tel.

La solution choisie ici pour l’implémentation dans l’API GranOO est d’utiliser la librairie C++ Eigen [8], qui supporte les matrices creuses et plusieurs méthodes de résolution directe et itérative adaptées aux systèmes creux. La méthode de résolution choisie est le Gradient Conjugué, recommandé pour les systèmes de grande taille et pour lequel les tests de rapidité ont été plus concluants que pour les méthodes basées sur la factorisation de Choleski et la factorisation LU. Les temps de calcul pour ces trois méthodes sur un domaine contenant 5000 éléments sont donnés dans le Tableau 1. Ces temps sont obtenus avec un processeur Intel Core i7-4980HQ cadencé à 2.8GHz, avec un seul cœur de calcul.

TABLE 1 – Temps de calcul indicatifs pour un domaine avec 5000 éléments discrets.

Gradient Conjugué	Factorisation de Choleski	Factorisation LU
24ms	33ms	114ms

2.3 Chauffe par effet Joule

L’effet Joule décrit la quantité d’énergie électrique convertie en énergie interne due au courant électrique qui traverse un milieu conducteur. Une fois les courants électriques w déterminés à partir de l’équation 3 (section 2.2), le calcul de l’énergie électrique convertie en énergie interne s’écrit

$$P_{Rij} = \eta \Delta u_j w_j, \quad (8)$$

avec P_{Rij} l’énergie électrique convertie en énergie interne entre les nœuds i et j , Δu_j la différence de potentiel dans la branche j et w_j le courant dans cette même branche. η est un paramètre adimensionnel qui décrit le taux d’énergie électrique convertie en énergie interne, avec $\eta \in [0, 1]$. Dans la suite de cet article, $\eta = 1$, c’est-à-dire que 100% de l’énergie électrique sera convertie en énergie interne. L’augmentation de température due à la conversion de l’énergie électrique en énergie interne s’écrit

$$\Delta \theta_i = \frac{P_{Rij}}{mc} \Delta t, \quad (9)$$

avec m la masse du conducteur, c la chaleur spécifique du matériau constitutif du conducteur, et Δt l’intervalle de temps sur lequel l’augmentation de température est calculée. Pour appliquer cette relation à la Méthode des Éléments Discrets, la masse des éléments discrets doit être calculée en fonction de leur fraction volumique, qui dépend de leur nombre de voisins, comme illustré sur la Figure 2. L’équation de l’augmentation de température due à l’effet Joule devient donc

$$\Delta \theta_i = \frac{P_{Rij} f_{vi}}{\rho_c c V_i} \Delta t, \quad (10)$$

avec f_{vi} la fraction volumique relative à l’élément discret i , V_i son volume et ρ_c la masse volumique du matériau. Δt correspond désormais au pas de temps stable de l’algorithme d’intégration des équations du mouvement de Newton [9] utilisé dans GranOO, qui est plus faible, de plusieurs ordres de grandeurs, que le pas temps stable d’une simulation thermique.

1. Avec un nombre de coordination d’environ 6.2, soit $(5000 \times 6.2)/2 = 15500$ interactions (résistances électriques).

Dans GranOO, l'équation 10 est ajoutée à l'équation de l'augmentation de la température due à la conduction thermique décrite par Terreros et al. [6] (équation 7). L'augmentation globale de température, due à la fois à la conduction thermique et électrique, s'écrit

$$\Delta\theta_i = \sum_{j=1}^n \frac{(\theta_j - \theta_i)S_{ij}\lambda f_{vi}}{\ell_{ij}\rho_c c V_i} \Delta t + \frac{P_{Rij} f_{vi}}{\rho_c c V_i} \Delta t, \quad (11)$$

avec θ_i et θ_j la température des éléments discrets i et j , λ la conductivité thermique du matériau, et ℓ_{ij} la distance ente les centres des éléments discrets i et j (Figure 3).

3 Validation de la méthode implémentée

Cette section a pour but de valider l'implémentation présentée en Section 2.2 et 2.3, sur deux cas tests. Le premier est un cas simple de conduction électrique avec un champ uniforme qui sera comparé avec la solution analytique (Section 3.1), et le second un cas de constriction électrique, avec prise en compte de l'effet Joule, qui sera validé avec la Méthode des Éléments Finis (Section 3.2). Pour ces deux cas tests, le matériau utilisé est un acier inoxydable AISI 304L, dont les propriétés mécaniques, électriques et thermiques sont données dans le Tableau 2.

TABLE 2 – Propriétés de l'acier inoxydable AISI 304L pour les cas tests de validation.

Propriété	Symbole	Valeur	Unité
Module de Young	E	210	GPa
Coefficient de Poisson	ν	0.3	–
Masse volumique	ρ_c	7900	$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$
Résistivité électrique	ρ_e	0.73×10^{-6}	$\text{m}^3\text{kg}\cdot\text{s}^{-3}\text{A}^{-2}$
Chaleur spécifique	c	500	$\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\text{K}^{-1}$
Conductivité thermique	λ	15	$\text{J}\cdot\text{s}^{-1}\text{m}^{-1}\text{K}^{-1}$

3.1 Validation sur un champ électrique uniforme

Dans un premier temps, la validation de la méthode présentée dans la Section 2.2 est effectuée sur un domaine cylindrique de rayon $r_d = 1\text{mm}$ et longueur $\ell_d = 5\text{mm}$, avec différents nombres d'éléments discrets (1000, 2000, 5000, 10000 et 20000) pour évaluer la convergence du calcul DEM. De plus, chaque domaine est généré trois fois pour évaluer la sensibilité de la réponse électrique au caractère aléatoire de l'arrangement des éléments dans leur conteneur, ici un cylindre.

Dans le cas d'un milieu de forme géométrique simple soumis à un champ électrique uniforme, la méthode la plus simple pour évaluer la validité de la réponse électrique est de déterminer la résistance électrique du domaine et de la comparer à la solution analytique, qui s'écrit

$$\bar{R}_{\text{th}} = \frac{\rho_e \ell}{A}, \quad (12)$$

avec \bar{R}_{th} la résistance électrique équivalente théorique, ρ_e la résistivité électrique du matériau, ℓ sa longueur et A la section du domaine. Côté DEM, celle-ci peut être calculée par la loi d'Ohm, en divisant la différence de potentiel appliquée au domaine par la somme des courants entrant ou sortant de l'une des faces à équipotentiel du domaine.

Les résultats de ce premier cas test sont présentés dans le Tableau 3, qui rassemble les erreurs comparées à la solution théorique, par taille de domaine (avec le rayon moyen d'un élément discret \bar{r} dans le domaine) et par génération de domaine, allant de 1 à 3. Ces résultats sont également tracés sur le graphe de la Figure 4 pour en simplifier la lecture.

Les résultats montrent dans un premier temps que le nombre d'éléments discrets dans le domaine joue un rôle important. La répétabilité de la génération aléatoire des domaines est faible, avec des erreurs sur

TABLE 3 – Résultats des cas tests basés sur la résistance équivalente des domaines, par génération.

Taille du domaine	\bar{r} (μm)	Erreur 1 (%)	Erreur 2 (%)	Erreur 3 (%)
1000	133	6.08	10.51	9.19
2000	106	12.28	12.57	15.56
5000	78	4.11	5.80	4.04
10000	62	4.41	3.60	3.31
20000	49	2.60	2.92	3.04

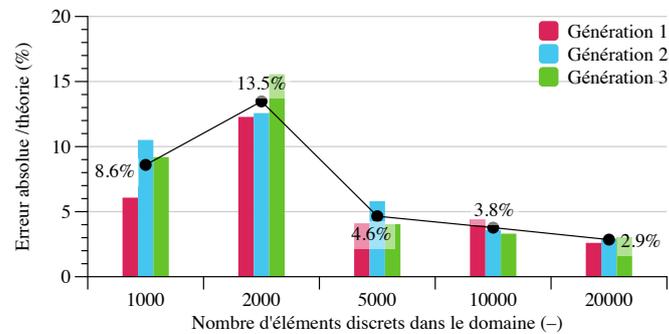


FIGURE 4 – Résultats des cas tests pour un champ électrique uniforme.

la résistance électrique du domaine comprises entre 6.08% et 10.51% pour le domaine à 1000 éléments, et entre 12.28% et 15.56% pour le domaine à 2000 éléments. De plus, on observe une forte différence sur la résistance moyenne entre ces deux domaines. Au delà de 2000 éléments, l'erreur moyenne décroît avec l'augmentation du nombre d'éléments, jusqu'à 2.9% pour le domaine à 20000 éléments, avec un écart à la moyenne inférieur à 0.3. Ces erreurs sont considérées satisfaisantes, à la fois en terme de nombre d'éléments nécessaires pour obtenir une solution fiable, et en terme de reproductibilité.

3.2 Validation sur un champ électrique non uniforme avec effet Joule

La validation sur cas tests avec champ électrique non uniforme avec effet Joule est effectuée sur un domaine similaire à une éprouvette entaillée, de manière à créer une constriction de courant, donc une variation de gradient de potentiel dans la zone de réduction de section et une augmentation locale de la température. Les propriétés géométriques du domaine sont données sur la Figure 5.

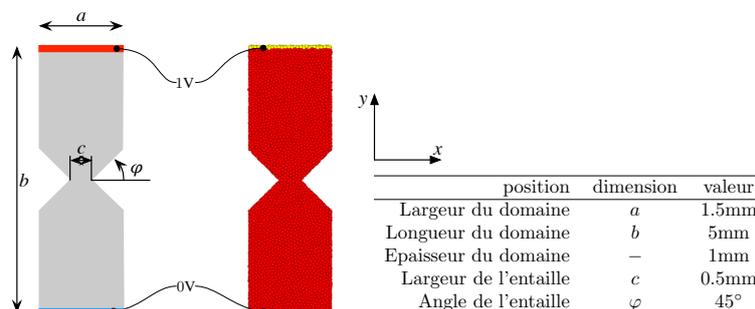


FIGURE 5 – Schéma du domaine discret utilisé pour la validation sur champ non uniforme.

Comme pour le cas test de la Section 3.1, la différence de potentiel appliquée aux extrémités est de 1V, et plusieurs domaines sont générés, avec 5000, 10000, 20000 et 40000 éléments, dans le but de vérifier la convergence du calcul DEM. En revanche, c'est la Méthode des Éléments Finis qui est utilisée ici pour comparer les résultats, en termes de température et de gradient de potentiel le long de l'axe vertical du domaine.

Les résultats globaux de ces cas tests sont donnés sur le graphe de la Figure 6, qui résume l'erreur observée entre la DEM et la MEF en termes de résistance électrique et de température au centre du domaine, en fonction du domaine et du nombre d'éléments dans la section la plus faible.

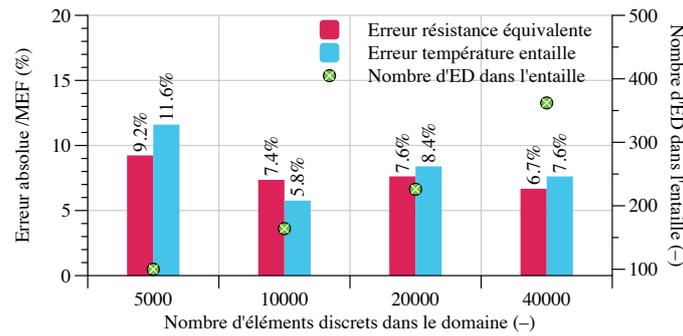


FIGURE 6 – Résultats de la chauffe par effet Joule et comparaison avec la solution MEF.

En terme de résistance équivalente des domaines, le graphe de la Figure 6 montre une légère décroissance avec le nombre d'éléments dans le domaine, et donc avec le nombre d'éléments dans l'entaille, la section la moins résistante. Elle passe de 9.2% à 6.7%, alors que, sur la base d'une tranche de domaine d'épaisseur $4\bar{r}$ (avec \bar{r} le rayon moyen des éléments dans le domaine), le nombre d'éléments dans la section la plus faible passe de 100 à 362. L'observation est donc la même pour la température maximale qui dans le même temps passe de 11.6% à 7.6%, ce qui met en évidence la sensibilité de la réponse au nombre d'éléments. Effectivement, relativement peu d'éléments sont responsables de conduction électrique, et la réponse du domaine est sera particulièrement sensible à des « défauts » d'arrangement des éléments lors du compactage du domaine.

Comme le montre la Figure 7, on observe une différence significative du gradient de potentiel, défini comme la chute de potentiel par unité de longueur ($\partial V / \partial x$). Le gradient de potentiel est plus élevé pour le calcul DEM, de 14.5%, ce qui se traduit par une résistance locale du domaine plus importante que dans la solution MEF.

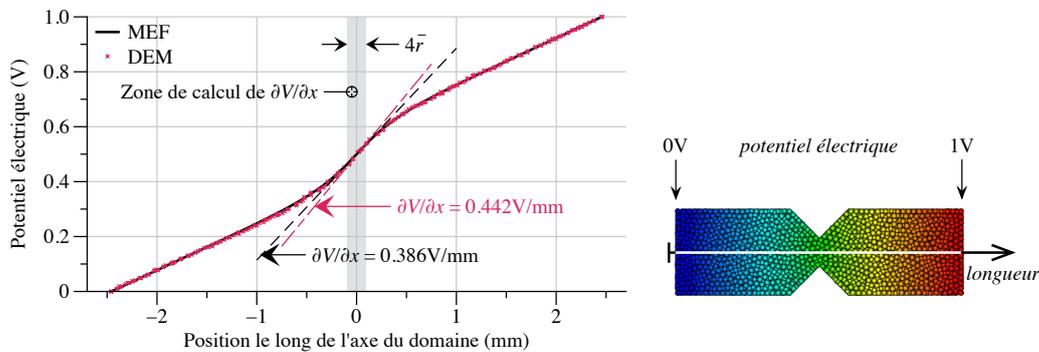


FIGURE 7 – Potentiel électrique suivant l'axe du domaine et résultat DEM avec 10000 éléments.

Cette augmentation locale de la résistance par rapport à la référence se retrouve également sur la température calculée, comme le montre la Figure 8, qui représente l'évolution de la température le long de l'axe du domaine. L'erreur reste toutefois acceptable, notamment vis-à-vis du nombre d'éléments discrets dans la section la plus faible du domaine.

3.3 Conclusion

Cet article présente une méthode originale pour le calcul de la conduction électrique dans un domaine DEM considéré continu, hypothèse intéressante lorsqu'il s'agit de simuler par exemple un système de captage de l'énergie électrique. En effet, les composants en contact sont des corps continus mais qui

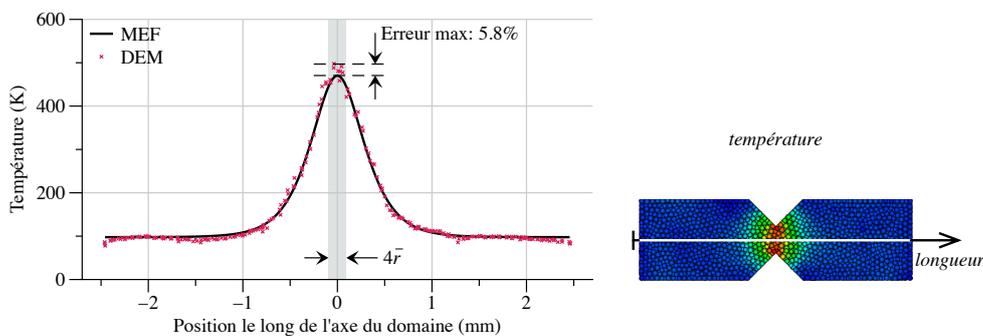


FIGURE 8 – Température suivant l’axe du domaine et résultat DEM avec 10000 éléments.

peuvent subir de la multi-fracturation, phénomène pour lequel la Méthode des Éléments Discrets hybride *lattice-particle* est particulièrement adaptée.

Dans un premier temps, l’hypothèse de continuité du domaine est présentée, et est suivie de l’implémentation de la conduction électrique dans un domaine DEM, puis de l’effet Joule.

Les développements présentés sont ensuite validés sur deux séries de cas tests, avec des champs électrique uniformes puis non uniformes, avec prise en compte de l’effet Joule. Dans le premier cas, les résultats montrent une dépendance de la réponse électrique au nombre d’éléments discrets dans le domaine, qui s’atténue rapidement avec l’augmentation du nombre d’éléments et produit des erreurs de l’ordre de 3% par rapport à la théorie, sur la résistance équivalente du domaine. Dans le cas de champs électriques non uniformes, les erreurs obtenues, cette fois par rapport à la Méthode des Éléments Finis, sont supérieures, de l’ordre de 7% pour la résistance équivalente, et 8% pour la température dans la zone de constriction du domaine. Dans ce cas, le nombre d’éléments dans la section la plus faible du domaine se fait plus fortement ressentir, et le phénomène est illustré par l’évolution du gradient de potentiel, qui est supérieur à la référence dans la zone de constriction. Cependant, même si l’erreur reste acceptable vis-à-vis du nombre d’éléments, ce phénomène pourrait être atténué en diminuant localement le diamètre des éléments.

Les travaux en cours se focalisent notamment sur le couplage thermomécanique, et plus précisément l’effet de l’échauffement sur la dilatation du domaine discret, avec comme application la multifracturation de matériaux bi-phasés.

Références

- [1] P. A. Cundall and O. D. L. Strack. *A discrete numerical model for granular assemblies*. Geotechnique, 29 :47–65, 1979.
- [2] E. Schlangen and J. G. M. van Mier. *Experimental and numerical analysis of micromechanisms of fracture of cement-based composites*. Cement and Concrete Composites, 14(2) :105–118, 1992. Special Issue on Micromechanics of Failure in Cementitious Composites.
- [3] *The GranOO Workbench*, <http://www.granoo.org/>.
- [4] E. Beloni, P. R. Santhanam, and E. L. Dreizin. *Electrical conductivity of a metal powder struck by a spark*. ELSTAT, 70 :157–165, 2012.
- [5] K. Bourbatache, M. Guessasma, E. Bellenger, V. Bourny, and J. Fortin. *DEM ball bearing model and defect diagnosis by electrical measurement*. Mechanical Systems and Signal Processing, 41(1–2) :98 – 112, 2013.
- [6] I. Terreros, I. Iordanoff, and J.-L. Charles. *Simulation of continuum heat conduction using DEM domains*. Computational Materials Science, 69 :46–52, 2013.
- [7] G. Strang. *Computational science and Engineering*. Wellesley-Cambridge Press, 1st edition, 2007.
- [8] *Eigen C++ Template Library*, <http://eigen.tuxfamily.org/>.
- [9] D. André, J.-L. Charles, I. Iordanoff, and J. Néauport. *The GranOO workbench, a new tool for developing discrete element simulations, and its application to tribological problems*. Advances in Engineering Software, 74 :40–48, August 2014.