

Méthode systématique de prévision de bifurcations élastoplastiques pour différentes formulations en transformations finies

M. Al Kotob^{1,2}, S. Forest², M. Mazière²,
C. Combescure¹, T. Rose¹

¹ Safran-Tech, Safran Group, {moubine.al-kotob,christelle.combescure,tonya.rose}@safrangroup.com

² CdM, Mines paristech, {moubine.al_kotob,samuel.forest,matthieu.maziere}@mines-paristech.fr

Résumé — La prévision des modes de ruine élastoplastiques reste une problématique qui nécessite une analyse au cas par cas. Ces modes sont généralement précédés par une perte d'unicité de la solution du problème en vitesses. Il est encore courant de perturber le maillage initial pour forcer l'apparition des modes [17]. Cette méthode, quand elle le permet, se restreint à l'obtention de la première bifurcation. Nous proposons une méthode systématique et efficace de détection de bifurcations élastoplastiques pour trois grandes familles de lois de comportement en transformations finies.

Mots clés — Bifurcations, élastoplastique, formulations LdC, grandes déformations.

1 Contexte

La prévision de charges critiques pour certaines structures aéronautiques est couramment basée sur des méthodes semi-empiriques qui combinent solutions analytiques approchées et résultats expérimentaux [11]. Ces méthodes sont par essence limitées en termes de géométrie, de matériau et de chemin de chargement (généralement monotone). Ce dernier s'est révélé d'importance lors d'une série d'essais de torsion menée à l'ONERA sur des tubes métalliques. En effet, deux modes de ruines ont été observés consécutivement au changement du chemin de chargement : une géométrie qui flambe sous chargement monotone (cf. Figure 1) rompt après localisation de la déformation suite à l'introduction d'un cycle dans le chemin de chargement (cf. Figure 2).

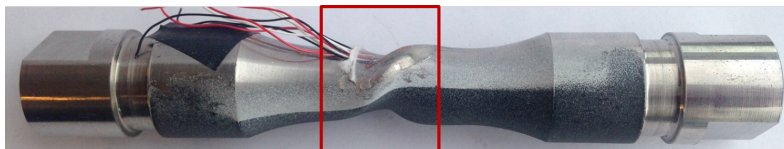


FIGURE 1 – Tube fin en torsion monotone.



FIGURE 2 – Tube fin en torsion avec introduction d'un cycle de charge.

Dans le cas qui nous concerne ici, l'apparition d'un mode de ruine engendre de grandes déformations et rotations dans la structure et survient suite à une perte d'unicité de la solution. L'étude de ces phénomènes nous place donc dans le cadre des transformations finies élastoplastiques, pour lesquelles les formulations sont nombreuses. De plus, il nous faudra être capable de détecter la perte d'unicité et potentiellement suivre les différentes solutions. Nous avons pour objectif de développer un critère et une méthode numérique pour la prévision et la caractérisation des modes de ruine. Nous serons alors à même de prendre en compte un large spectre de chargements, géométries ou matériaux, et cela pour les différentes formulations de lois de comportement élastoplastiques en transformations finies adoptées.

On trouve une grande diversité de formulations de lois de comportement en transformations finies [7, 8, 9, 10, 12, 15], chacune possédant ses arguments, avantages et inconvénients [2]. On s'efforcera tout d'abord de les regrouper en trois grandes familles. Nous nous intéresserons alors à l'écriture du critère de perte d'unicité de Hill formulé en 1958 [8], qui reste aujourd'hui un fondement théorique majeur pour ce type d'analyses. Nous justifierons alors sur cette base un critère numérique de perte d'unicité du problème en vitesses discret, en relevant en particulier les hypothèses faites et limites subséquentes. Ce critère mènera à la proposition d'une méthode systématique pour la détection des bifurcations élastoplastiques. Sur cette base, une extrapolation linéaire sera proposée pour accélérer la détection de l'instant de bifurcation.

2 Classification des lois de comportement en transformations finies

L'analyse de bifurcation du problème en vitesse se base sur un opérateur tangent global fortement dépendant du choix de la formulation pour la loi de comportement élastoplastique [16]. La construction même de l'opérateur tangent du problème discret sera différente pour chaque formulation [1, 14]. Bien que la diversité des formulations soit grande, il est possible de distinguer trois familles qui recouvrent une grande partie de ces formulations.

1. **Les lois en référentiels locaux objectifs** reposent sur le choix d'un référentiel local objectif “*”. Généralement utilisées pour les métaux peu anisotropes, elles ont l'avantage d'aboutir à un système d'équations ayant une même structure que sur celui utilisé en petites perturbations. Ces lois donnent une relation entre une dérivée objective d'une contrainte eulérienne, notée $D^*(\underline{a})$ (avec $\underline{a} = \underline{\sigma}$ ou $\underline{a} = \underline{\tau} = J\underline{\sigma}$, respectivement le tenseur des contraintes de Cauchy et de Kirchhoff, \underline{F} le gradient de la transformation et J le jacobien) et le taux de déformation eulérien \underline{D} , en faisant intervenir l'opérateur élastoplastique multi-branches $\underline{\underline{\mathcal{L}}}^*$ sous la forme :

$$D^*(\underline{a}) = \underline{\underline{\mathcal{L}}}^* : \underline{D}$$

avec “:” l'opérateur de double contraction. On retrouve notamment les lois formulées dans le référentiel corotationnel faisant ainsi apparaître la dérivée objective de Jaumann [1, 8, 15].

2. **Les lois lagrangiennes additives** se formulent sur une configuration de référence fixe. Cette famille de lois aboutit à l'expression d'une relation entre le taux de variation du tenseur des contraintes de Piola $\underline{\underline{\Pi}} = J\underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-T}$ et le taux de variation du tenseur des déformations de Green-Lagrange $\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{I})$ [10, 13]. Cette relation s'exprime à l'aide de l'opérateur élastoplastique multi-branches $\underline{\underline{\mathcal{L}}}^\Pi$ par :

$$\underline{\underline{\dot{\Pi}}} = \underline{\underline{\mathcal{L}}}^\Pi : \underline{\underline{\dot{E}}}$$

3. Contrairement aux deux premières familles, la famille des **lois lagrangiennes multiplicatives** ne fait pas l'hypothèse d'une décomposition additive du taux de déformation en une partie élastique et une partie plastique, mais d'une décomposition multiplicative du gradient de la transformation $\underline{\underline{F}}$ en une partie plastique $\underline{\underline{F}}^p$ suivie d'une partie élastique $\underline{\underline{F}}^e$. On parle alors d'une formulation à “configuration locale relâchée”. La relation entre taux de contrainte et taux de déformation pourra alors s'exprimer sous la forme :

$$\underline{\underline{\tau}}^{ec} = \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{\tau^{ec}} : \underline{\underline{L}}$$

avec $\underline{\underline{\tau}}^{ec} = \underline{\underline{\dot{\tau}}} - \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{\tau}} - \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{L}}^T$ une dérivée convective de $\underline{\underline{\tau}}$, où $\underline{\underline{L}}$ est le gradient eulérien des vitesses.

Pour les deux dernières familles il est toujours possible de se ramener à une relation linéaire entre le taux de variation de la contrainte de Boussinesq $\underline{\underline{S}} = J\underline{\underline{\sigma}}F^{-T}$ et le taux de variation du gradient de la transformation $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{\nabla}}(\underline{\underline{u}})$ [7, 9] :

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{\mathcal{L}}}^S : \underline{\underline{F}}$$

Pour la première famille cette propriété dépendra du choix de référentiel local objectif; typiquement possible pour le référentiel corotationnel [1, 8, 15], mais pas pour le référentiel en rotation propre.

3 Critère d'unicité en vitesses

3.1 Formulation générale

Le critère d'unicité en vitesses de Hill formulé en 1958 [8] repose sur le problème en vitesses suivant :

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div}(\underline{\underline{S}}) &= 0 \\ \underline{\underline{S}} &= \underline{\underline{\mathcal{L}}}^S : \underline{\underline{F}} \end{aligned} \right\} \forall x \in \Omega_0$$

$$\underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{N}} = \underline{\underline{i}}^d \quad \forall x \in \partial\Omega^i$$

$$\underline{\underline{u}} = \underline{\underline{u}}^d \quad \forall x \in \partial\Omega_0^d$$

avec $\underline{\underline{u}}^d$ les vitesses imposées sur $\partial\Omega_0^d$ (bord de la configuration de référence Ω_0 contraint en déplacement), $\underline{\underline{i}}^d$ les taux d'efforts imposés sur $\partial\Omega^i$ (le bord de la configuration actuelle Ω contraint en efforts) et $\underline{\underline{N}}$ la normale à un élément de surface dans la configuration de référence.

S'il existe au moins une paire de couples solutions $(\underline{\underline{S}}^1, \underline{\underline{u}}^1)$ et $(\underline{\underline{S}}^2, \underline{\underline{u}}^2)$, alors leur différence $\Delta(\cdot) = (\cdot)^2 - (\cdot)^1$ respecte en l'absence de forces suiveuses [8] :

$$\int_{\Omega_0} \Delta\underline{\underline{S}} : \Delta\underline{\underline{F}} d\Omega_0 = 0 \quad (1)$$

On peut alors énoncer la contraposée de cette proposition : si aucune paire de champs cinématiquement admissibles ne vérifie l'équation (1) alors la solution du problème en vitesses est unique. Le membre de gauche étant initialement positif, le critère devient :

$$\int_{\Omega_0} \Delta\underline{\underline{S}} : \Delta\underline{\underline{F}} d\Omega_0 > 0 \quad (2)$$

quelle que soit la paire de champs $(\underline{\underline{u}}^1, \underline{\underline{u}}^2)$ cinématiquement admissible.

On montre que sous l'hypothèse que les deux solutions admettent avant bifurcation le même opérateur tangent local (elles sont pareillement élastoplastiques ou élastiques localement) $\underline{\underline{\mathcal{L}}}^{S^1} = \underline{\underline{\mathcal{L}}}^{S^2}$, l'équation (2) devient :

$$\int_{\Omega_0} \Delta\underline{\underline{F}} : \underline{\underline{\mathcal{L}}}^S : \Delta\underline{\underline{F}} d\Omega_0 > 0 \quad (3)$$

Comme nous l'avons expliqué plus haut, l'opérateur élastoplastique multi-branches $\underline{\underline{\mathcal{L}}}^S$ en équation (3) dépend fortement de la famille de lois de comportement considérée. Nous présenterons alors les conditions d'existence d'un tel opérateur tangent, et lorsque cela sera possible, son expression exacte pour les différentes familles de formulation de loi de comportement. Nous serons alors à même de donner l'expression d'un potentiel en vitesse dont la minimisation fournit la solution du problème en vitesse.

3.2 Critère de striction

Dans une première application analytique du critère d'unicité en vitesse de Hill nous proposons de retrouver le critère de Considère [3] (eq. (4)) pour un choix particulier de champs $(\underline{\underline{u}}^1, \underline{\underline{u}}^2)$.

$$\frac{dR}{dp} = R(p) \quad (4)$$

avec p la déformation plastique cumulée et $R(p)$ l'expression de l'écroutissement isotrope. Nous démontrons alors que l'on peut exprimer un critère équivalent pour les matériaux élastoplastiques sous la forme :

$$\frac{dR}{dp} = N(R(p), E, \nu)$$

avec E le module d'Young, ν le coefficient de Poisson et N une fonction scalaire à expliciter en fonction de la famille de lois de comportement retenue.

4 Formulation discrète et extrapolation linéaire

Pour exploiter le critère d'unicité en vitesse de Hill (éq. (3)) dans le cas le plus général, il est nécessaire d'établir une formulation équivalente pour le problème discret. Cette démarche aboutira à l'analyse des valeurs propres de l'opérateur tangent global du système incrémental discret. Nous proposons alors d'exploiter cette démarche pour formuler l'analyse d'un problème linéarisé autour d'un état précontraint et pré-déformé. Enfin, des résultats numériques seront présentés pour différentes familles de formulation de lois de comportement.

4.1 Formulation discrète du critère d'unicité

La formulation discrète du problème incrémental conduit au système non linéaire [2, 4] :

$$[K(U)] \{\Delta U\} = \{\Delta F_{ext}\}$$

où $[K(U)]$ est la matrice de raideur globale. Elle est souvent décomposée en une partie dite "matériau" et une seconde dite "géométrique"[5]. Bien que cette décomposition soit naturelle lorsqu'il est question de résoudre un problème de flambement linéaire, elle devient moins évidente dans le cas des transformations finies élastoplastiques.

Pour le problème en vitesses, le système discret aboutit à la résolution du système suivant :

$$[K^{tan}(U)] \{\dot{U}\} = \{\dot{F}_{ext}\}$$

où $[K^{tan}(U)]$ se confond avec $[K(U)]$ lorsque $\{U\}$ décrit une configuration d'équilibre. L'analyse de bifurcation peut donc se ramener à une analyse aux valeurs propres de la matrice de raideur globale en début ou en fin d'incrément [15]. On montre que les modes de bifurcation s'obtiennent par combinaisons linéaires des vecteurs propres associés aux valeurs propres nulles.

Cette analyse reste toutefois limitée : l'analyse de bifurcation ne sera concluante qu'à l'instant exact de bifurcation. De plus, un seuil fixé arbitrairement pour la plus petite valeur propre ne saura être satisfaisant dans le cas général. On montre que dans certains cas (cf section 4.3), la plus petite valeur propre peut devenir arbitrairement petite sans qu'il n'y ait de bifurcation possible. Enfin, une seconde méthode consiste à faire une dichotomie sur le dernier incrément lorsque la plus petite valeur propre devient négative [10]. Ce critère n'est pas non plus entièrement satisfaisant du fait qu'il est possible que la solution incrémentale ait arbitrairement choisi une branche bifurquée et que les valeurs propres restent positives à chaque fin d'incrément, en plus du fait que cette méthode peut se révéler particulièrement coûteuse.

4.2 Extrapolation linéaire

Pour palier ces faiblesses nous proposons d'exploiter une extrapolation linéaire autour d'un état précontraint et pré-déformé. Comme nous l'avons vu, l'opérateur discret à analyser dépend de la configuration d'équilibre considérée. Autrement dit, l'analyse de bifurcation repose sur la recherche d'une configuration à partir de laquelle une multitude de solutions en vitesses existent. Nous souhaitons donc paramétrer la configuration considérée pour l'analyse de bifurcation. Le problème étant fortement non linéaire, ce type d'analyse ne sera justifiable que dans un état proche de l'état de bifurcation. L'analyse de bifurcation ne mènera alors plus à une analyse aux valeurs propres "classique", soit la recherche des couples $(\lambda_k, \{V_k\})$ tels que :

$$([K] - \lambda_k [I]) \{V_k\} = \{0\}$$

avec $[I]$ la matrice diagonale unité, mais à un problème aux valeurs propres généralisé, soit la recherche des couples $(\lambda_k, \{V_k\})$ tels que :

$$([K] - \lambda_k [\Delta K]) \{V_k\} = \{0\}$$

dans quel cas λ_k pourra être vu comme un paramètre de chargement et $[\Delta K]$ peut s'interpréter comme l'incrément de raideur associé à l'incrément de charge, prenant potentiellement en compte des variations de champs de contrainte et de propriétés du matériau. Cette méthode devrait à priori permettre de palier au problème des valeurs propres diminuant très vite et difficilement détectable en se contentant des plus petites valeurs propres.

4.3 Résultats numériques

La prévision de l'instant de striction dans un échantillon en traction a été évaluée grâce au critère analytique obtenu en section 3.2 et mis en cohérence avec les résultats de l'analyse aux valeurs propres de l'opérateur tangent du problème discret. L'influence de la prise en compte de congés dans la géométrie est exposée. Enfin, le cas d'un tube en torsion montre l'importance d'être proche de l'instant de bifurcation pour l'obtention de modes multiples.

4.3.1 Striction

Dans cet exemple nous présentons le cas d'un cylindre en traction simple. Le modèle est axisymétrique et la géométrie se restreint à un rectangle parfait de longueur $L = 11 \text{ mm}$ et d'une largeur $R = 2 \text{ mm}$. Les éléments sont initialement des carrés de $0,1 \text{ mm}$ de coté. La loi de comportement est formulée en référentiel corotationnel sur le tenseur des contraintes de Kirchhoff. La loi élastique est une loi de Hooke de module d'Young $E = 184 \text{ GPa}$ et de coefficient de Poisson $\nu = 0,29$. Le critère de plasticité est un critère de von Mises avec écrouissage isotrope $R(p) = R_0 + Q_1(1 - e^{b_1 p}) + Q_2(1 - e^{b_2 p}) + Hp$ (où R_0, Q_1, Q_2, M, b_1 et b_2 des constantes du matériau). Les conditions aux limites sont définies par : $u_y = 0$ en $y = 0$; $u_x = 0$ en $x = 0$; $u_y = u^d$ en $y = L$.

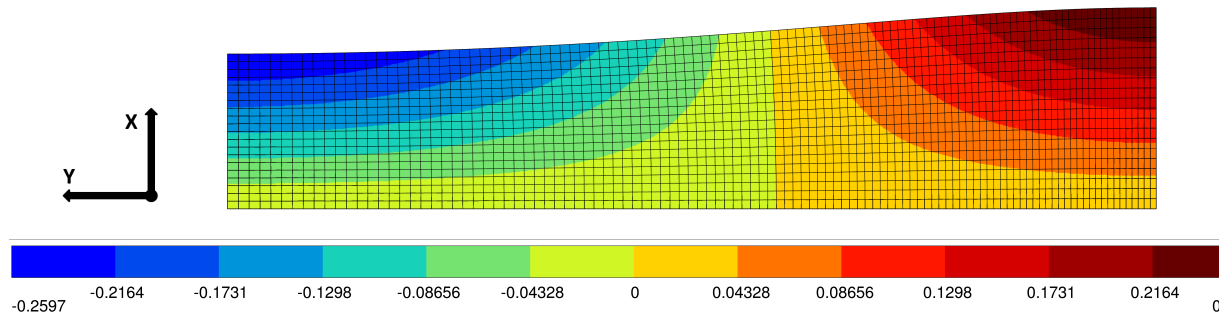


FIGURE 3 – Champ u_x du mode propre à la première bifurcation.

Pour ce type de lois, un critère de striction peut être obtenu à partir du critère de Hill sous la forme :

$$\frac{dR(p)}{dp} = \frac{R}{1 - \frac{R}{E}}$$

Pour le matériau considéré, on trouve que la striction devrait apparaître pour $p \simeq 0.024$. En effet, on voit en Figure 4 que la première valeur propre s'annule bien pour un tel écrouissage. De plus le mode associé à l'instant de bifurcation (cf. Figure 3) est bien cohérent avec un mode de striction.

Pour ce qui est de l'introduction de congés dans la géométrie, on montre que la solution incrémentale reste unique tout au long du calcul. La striction apparaît nécessairement sans qu'il y ait bifurcation de la solution en vitesse. Le champ de contrainte n'est plus homogène et force automatiquement l'apparition de la striction.

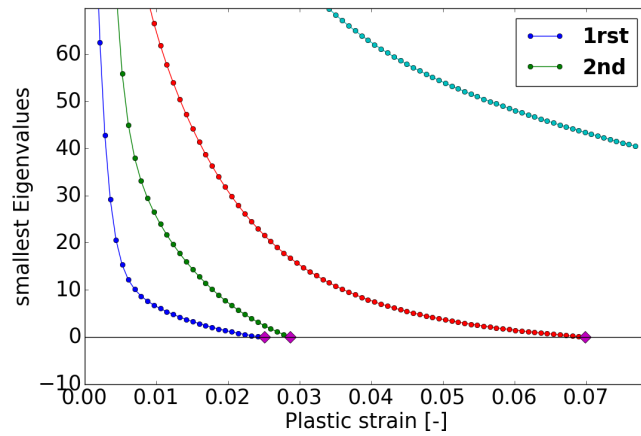


FIGURE 4 – Évolution des quatre plus petites valeurs propres en fonction de la déformation plastique cumulée moyenne.

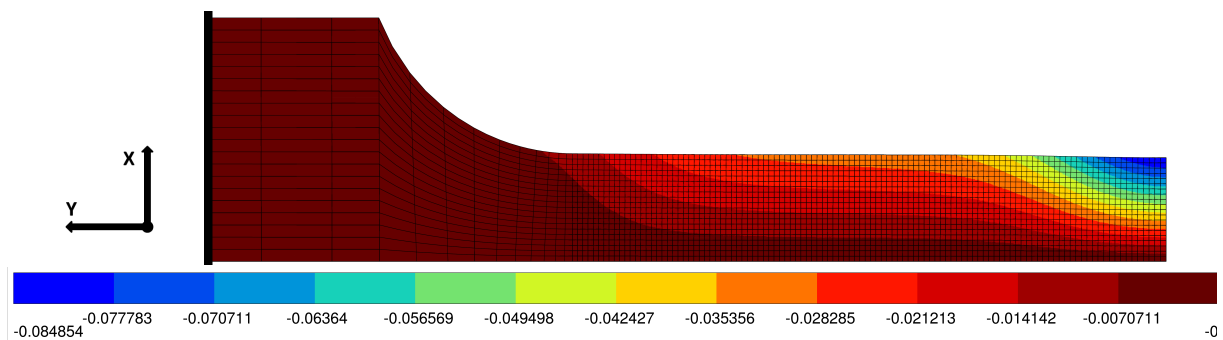


FIGURE 5 – Champ u_x du mode propre associé à la plus petite valeur propre lorsqu'elle atteint son minimum.

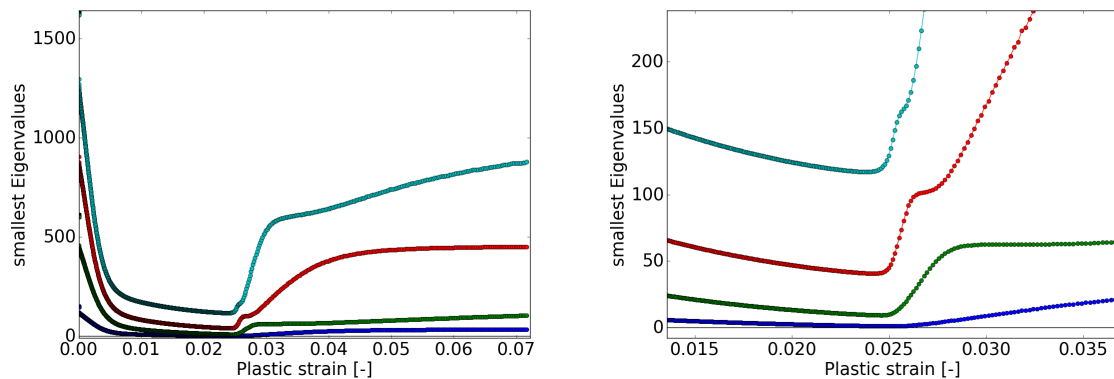


FIGURE 6 – Évolution des quatre plus petites valeurs propres.

4.3.2 Flambement d'un cylindre en torsion

Pour ce dernier exemple nous traiterons du flambement d'un tube parfait en torsion. Le tube a un diamètre intérieur $D_i = 14\text{mm}$, extérieur $D_e = 16\text{mm}$ pour une longueur $L = 80\text{mm}$ (selon l'axe $(0, e_y)$). Nous garderons les mêmes propriétés matériaux que pour les essais de traction. Les conditions limites sont : u_x et u_z sont contraints par une rotation nulle par rapport à l'axe $(0, e_y)$ en $y = 0$; u_x et u_z sont contraints par une rotation de θ^d par rapport à l'axe $(0, e_y)$ en $y = L$ et $u_y = 0$ en $y = 0$ et $y = L$.

Comme le problème reste axisymétrique jusqu'à la bifurcation, les modes de flambement doivent être multiples. Il seront en fait identiques à une rotation près autour de l'axe principal du tube. Pour être capable de représenter tous ces modes, il suffit d'en extraire deux d'entre eux, non colinéaires, alors les autres s'obtiendront par combinaisons linéaires de ces deux modes. En effet, on voit en Figure 7 deux

valeurs propres s'annuler au même instant et on trouve en Figure 8 les deux modes associés. On remarque que le second mode n'existe pas avant d'être suffisamment proche de la bifurcation. Encore une fois, un seuil arbitraire trop grand n'aurait pas permis d'obtenir la base complète pour les modes de bifurcation. On reconnaît bien le mode obtenu expérimentalement (cf. Figure 1).

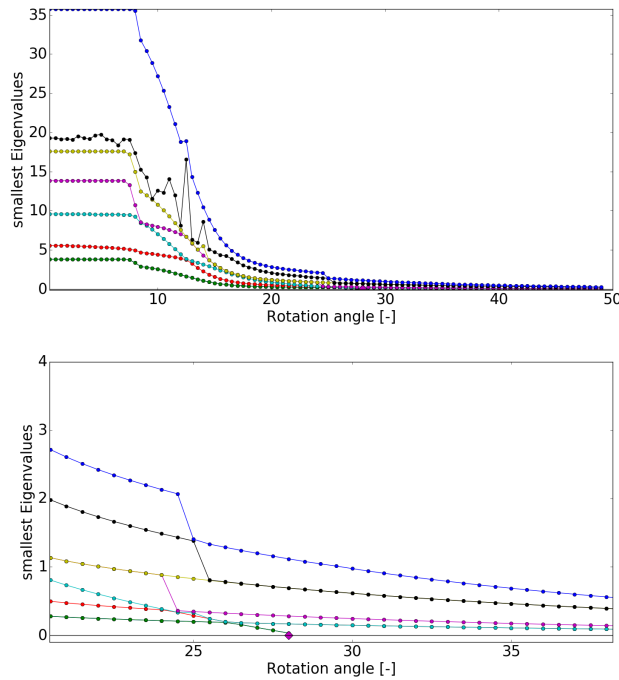


FIGURE 7 – Évolution des sept plus petites valeurs propres, agrandissement.

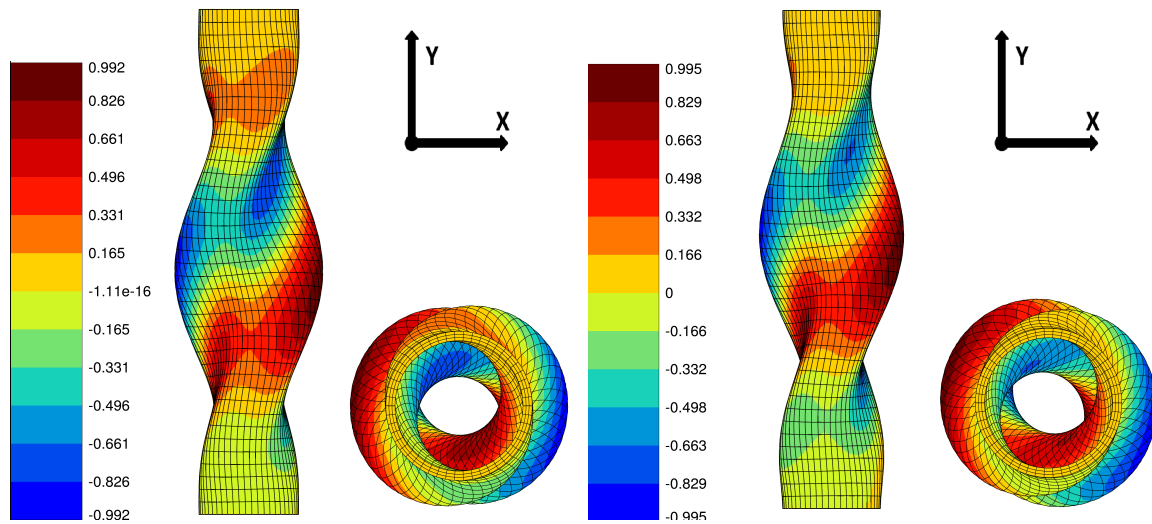


FIGURE 8 – Champ u_x des modes de bifurcation ; vue de coté et vue du dessus pour chaque mode.

5 Conclusions

La détection de modes de bifurcation élastoplastiques en transformations finies reste une étude très délicate. Généralement traitée au cas par cas, nous souhaitons proposer une méthode systématique pour les trois grandes familles de lois de comportement énoncées plus haut.

Premièrement, une méthode d'évaluation du critère de striction pour un essai de traction est proposée pour les matériaux élastoplastiques en transformations finies. Ce critère obtenu pour les différentes

formulations de lois de comportement considérées, sur la base du critère de Hill, donne une forme plus générale du critère de Considère pour les matériaux élastoplastiques et se confond avec ce dernier lorsqu'on se restreint aux matériaux à faible déformation élastique.

Le lien entre le critère d'unicité de Hill du problème continu et l'analyse aux valeurs propres du problème discret est rigoureusement détaillé. Les opérateurs tangents élastoplastiques locaux dont elle dépend fortement seront explicités pour les différentes familles de formulations de lois de comportement, lorsque cela est possible, ainsi que les potentiels en vitesses qui en découlent. Les limites et hypothèses de l'analyse discrète sont en particulier explicités. Nous proposons alors une discussion des méthodes d'identification de l'instant de bifurcation du problème discret pour en relever les avantages, inconvénients et limites. Une méthode d'extrapolation linéaire efficace et systématique est alors proposée pour répondre en partie à ces problèmes.

Enfin, des résultats numériques seront exposés. Dans un premier temps, nous retrouvons les modes de striction d'un cylindre en traction [6] et exposons l'influence des conditions limites sur le mode observé. Cette analyse de bifurcation nous permettra de valider les critères de striction analytiques exposés plus haut. On montre alors les conséquences sur l'unicité du problème suite de l'introduction de congés dans la géométrie du problème. Pour finir, des résultats sur un tube en torsion seront exposés et mis en cohérence avec des résultats expérimentaux.

6 Remerciements et références bibliographiques

Les auteurs souhaitent remercier l'Association Nationale de la Recherche et de la Technologie pour leur support financier (subvention CIFRE no 2015/0592).

Références

- [1] Z. P. Bazant. *Plasticité classique et viscoplasticité*, Journal of Applied Mechanics, ASME , 919-928, 1971.
- [2] J. Besson, G. Cailletaud, J.-L. Chaboche, S. Forest. *Non-linear mechanics of materials*, Springer, 2010.
- [3] A. Considère. *Mémoire sur l'emploi du fer et de l'acier dans les constructions*, Annales des Ponts et Chaussées, Vve ch. Dunod, 574, 1885.
- [4] R. de Borst, M. A. Crisfield, J. J.C. Remmers, C. V. Verhoosel. *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, John Wiley & Sons Ltd, 2012.
- [5] E.A. de Souza Neto, D. Peric, D.R.J. Owen. *Computational Methods for Plasticity*, Willey, 2008.
- [6] S. Durand, A. Combescure. *Analytical and numerical study of the bifurcation of a cylindrical bar under uniaxial tension*, Revue européenne des éléments finis, Taylor & Francis, 725-745, 1999.
- [7] B. Halphen. *Sur le champ des vitesses en thermoplasticité finie*, International Journal of Solid Structures, Elsevier , 947-960, 1975.
- [8] R. Hill. *A general theory of uniqueness and stability in elasticplastic solids*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Elsevier, 236-249, 1958.
- [9] J. W. Hutchinson, J. P. Miles. *Bifurcation analysis of the onset of necking in an elastic/plastic cylinder under uniaxial tension*, Journal of Mechanics and Physics of Solids, Elsevier , 61-71, 1974.
- [10] P. Le Gronec, A. Le van. *Elastoplastic bifurcation and collapse of axially loaded cylindrical shells*, International Journal of Solids and Structures, Elsevier , 64-86, 2008.
- [11] L. H. N. Lee, C. S. Ades *Plastic torsional buckling strength of cylinders including effects of imperfections*, Journal Of The Aeronautical Sciences, Institute of the Aeronautical Sciences, 241-248, 1957.
- [12] J. Mandel. *Plasticité classique et viscoplasticité*, CISM International Centre for Mechanical Sciences, Springer-Verlag, 1-187, 1971.
- [13] G. Nefussi, A. Combescure. *Coupled buckling and plastic instability for tube hydroforming*, International Journal of Mechanical Sciences, Elsevier, 899-914, 2002.
- [14] Q. S. Nguyen. *Stability and nonlinear solid mechanics*, Hermes, 2000.
- [15] S. Okazawa. *Structural bifurcation for ductile necking localization*, International Journal of Non-Linear Mechanics, Elsevier, 35-41, 2010.
- [16] J. R. Rice. *The localization of plastic deformation*, Theoretical and Applied Mechanics, Elsevier , 207-220, 1976.
- [17] L. Yuan, S. Kyriakides. *Plastic bifurcation buckling of lined pipe under bending*, European Journal of Mechanics and Solids, Elsevier , 288-297, 2014.