

Plissement des systèmes film/substrat en géométrie cylindrique

F. Xu ¹, R. Abdelmoula², M. Potier-Ferry ³

¹ Department of Aeronautics and Astronautics, Fudan University, Shanghai, fanxu@fudan.edu.cn

² LPMTM, Université Paris-Nord, Villetaneuse, radhi.abdelmoula@univ-paris13.fr

³ LEM3, Université de Lorraine, Metz, michel.potier-ferry@univ-lorraine.fr

Résumé — On s'intéresse à la stabilité des films nanométriques rigides reposant sur des substrats souples. De nombreux motifs peuvent apparaître selon le chargement et la géométrie. Cette diversité a amené certains à envisager la fabrication de surfaces plissées en contrôlant ces phénomènes de micro-flambage de surfaces, en particulier en maîtrisant le lien entre courbure et plissement. Dans ce cadre, nous nous intéressons aux systèmes à géométrie cylindrique sous compression axiale ou chargement thermique.

Mots clefs — plissement, film/substrat, courbure.

1. Introduction

Il y a eu ces dernières années une forte activité de recherche sur le plissement des films nanométriques couplés à un substrat mou, généralement un polymère. L'objectif plus ou moins avoué est de créer des surfaces à morphologie contrôlée, ce qui est un petit challenge à cette échelle [1]. Or les modes possibles sont de formes très diverses, même pour des systèmes plats [2] [3] [4] [5], et ces modes semblent donc très difficiles à contrôler. L'idée a germé récemment que la courbure pouvait être un moyen de piloter la forme des plis et ceci a été testé pour des cylindres [6] [7] ainsi que pour des sphères ou des tores [8]. Les modes de flambement obtenus sont souvent assez voisins de ceux qui sont très bien connus dans le cas des coques, i.e. en l'absence du substrat. Néanmoins les analyses théoriques, numériques et expérimentales des articles [6] [7] montrent que, sous un chargement de compression axiale, on peut obtenir de manière robuste des modes axi-symétriques qui sont rarement observés pour une coque seule.

L'objectif de cette communication est d'analyser et de comparer les comportements d'un système film/substrat de forme cylindrique sous compression axiale et sous chargement thermique, cf Figure 1. Notons que dans la littérature, ces structures sont appelées "coques avec coeur" (core-shells). Le cœur occupe tout l'espace à l'intérieur du cylindre.

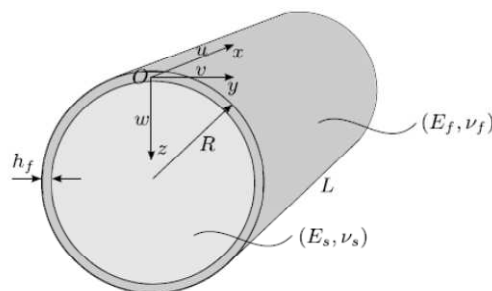


Figure 1 – Les paramètres géométriques et mécaniques du système film/substrat.

2. Méthodes d'analyse

2.1. Modèles mécaniques

Divers types de comportement ont été utilisés dans la littérature, mais la prise en compte de comportements plastiques est plutôt rare. Les deux matériaux sont le plus souvent supposés élastiques. Les plis se forment souvent à des déformations de l'ordre de 10% , ce qui conduit un certain nombre d'auteurs à utiliser des modèles hyper-élastiques assez simples comme le modèle néo-hookéen. Le film étant très mince, il est naturel de représenter le film à l'aide d'un modèle de coques, mais le film est parfois représenté par un modèle volumique, soit pour des raisons de commodité numérique (utilisation d'un code existant, e.g. [2]), soit parce que le rapport des raideurs (module d'Young du film rapporté à celui du substrat) n'est pas très grand, ce qui conduit à des longueurs d'ondes d'instabilité peu supérieures à l'épaisseur du film. Il faut noter que l'objectif des simulations des systèmes film/substrat est de prédire des modes complexes en prenant en compte les interactions d'un grand nombre de plis, comme on le voit sur la figure 2 dans le cas d'un film plan. On aboutit donc à des modèles de taille importante et il est tentant d'utiliser des modèles plus ou moins réduits, l'un des plus répandus consistant à remplacer le substrat par une fondation de type Winkler (i.e. une force de rappel proportionnelle à la flèche): une expression analytique du coefficient de Winkler a été établie par Biot [9], mais il a l'inconvénient de dépendre de la longueur d'ondes des plis, qui est en principe inconnue.

Ici, nous adopterons le modèle le plus simple, mais qui est suffisant pour un grand rapport de raideur: le substrat est supposé élastique en petites perturbations alors que le film est traité comme une coque en transformation finie, mais avec une loi contrainte-déformation linéaire (loi de Saint-Venant Kirchhoff).

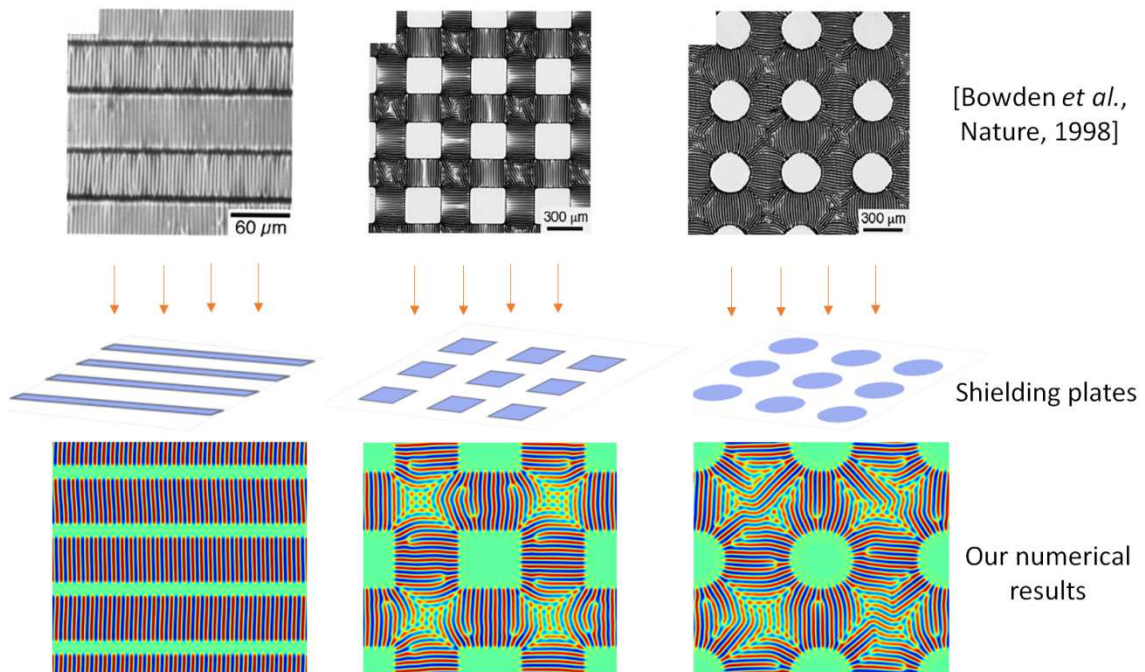


Figure 2 – Simulation de motifs engendrés par un rayonnement ultra-violet sur un système film/substrat avec un film plan (fournie par C. Fu, F. Xu, Y. Huo at Fudan University, Chine).

2.2. Discrétisation

Il y a de nombreuses techniques de discrétisation possibles, comme pour tout système d'équations aux dérivées partielles. Comme on a affaire ici à des motifs plus ou moins périodiques, l'utilisation d'une transformation de Fourier est naturelle et cette méthode, introduite dans l'article [10], permet de simuler de grands domaines avec un coût raisonnable. Les motifs de la figure 2 ont été simulés de cette manière. Bien sûr l'inconvénient de la méthode de Fourier est de forcer une périodicité artificielle et d'oublier les effets de bord, les sur-contraintes au bord pouvant être à l'origine de l'initiation de l'instabilité.

C'est pourquoi nous avons privilégié des méthodes standards et bien validées. On discrétise le film par un élément de coques qui a fait ses preuves: le quadrangle courbe à interpolation quadratique proposé en [11]. Le substrat est discrétisé par un élément hexaédrique à 8 nœuds. Pour que la procédure soit totalement non intrusive, les deux éléments ont été couplés par la méthode des multiplicateurs de Lagrange. L'ensemble de cette procédure a été présentée en [5], où elle avait été appliquée à des films plans.

2.3. Algorithmes de résolution

A priori, n'importe quel algorithme de résolution non linéaire est susceptible de trouver des solutions du problème obtenu par la phase de discrétisation, mais le calcul peut être rendu difficile par le grand nombre de solutions possibles et par les multiples connections et bifurcations entre ces solutions en sorte qu'il n'existe pas de méthode robuste permettant d'obtenir de façon certaine l'ensemble de ces solutions. Il n'est bien sûr pas interdit d'utiliser une bonne méthode de cheminement comme la méthode de Riks implémentée dans les grands codes de calculs commerciaux. La méthode de relaxation dynamique, qui est très utile dans le cas des membranes à cause de la perte d'ellipticité en compression, est un outil efficace qui peut permettre de trouver des minima locaux de l'énergie qui ne sont pas forcément connectés à la branche primaire [12].

Ici, nous utiliserons la Méthode Asymptotique Numérique en raison de son aptitude à suivre simplement des courbes en présence de points limites et de bifurcations et aussi de sa capacité à détecter des bifurcations par l'accumulation de petits pas: en effet au voisinage d'une bifurcation, le rayon de convergence des séries de Taylor coïncide avec la distance à la bifurcation et, pour cette raison, la longueur des pas MAN est directement liée à ce rayon de convergence.

2.4. Analyse dimensionnelle

Pour déterminer les paramètres significatifs du modèle, on se place dans le cadre des coques de Donnell-Mushtari-Vlassov (DMV), le cœur étant décrit par une fondation de type Winkler et la raideur de la fondation étant fonction du module du cœur et d'une longueur d'ondes caractéristique ℓ_w ($K_s = O(E_s / \ell_w)$). Le modèle DMV posé en fonction de la flèche et de la fonction de contraintes s'écrit classiquement :

$$\begin{cases} D\Delta^2 w - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - [F, w] + K_s w = 0 \\ \frac{1}{E_f h_f} \Delta^2 F + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} [w, w] = 0 \end{cases} \quad (1)$$

En compression axiale, la longueur d'ondes de flambage est petite devant les dimensions de la coque (cf Figure 3b) et plus précisément $\ell_w = O(\sqrt{h_f R})$. Passant à une version sans dimension du

système (1), on montre que le comportement du système dépend principalement du paramètre sans dimension

$$C_s = \frac{E_s}{E_f} \left(\frac{R}{h_f} \right)^{3/2} \quad (2)$$

Ce paramètre est une mesure de la raideur relative du cœur. Si le paramètre C_s est petit, le cœur est mou. Il y a un autre paramètre sans dimension, classique pour les coques cylindriques, appelé paramètre de Batdorf $Z = O(L^2 / h_f R)$, mais l'influence de ce paramètre est limitée au voisinage des bords.

Dans le cas d'un chargement thermique, la contrainte avant flambage est équi-biaxée et l'instabilité est pilotée principalement par la contrainte circonférentielle, comme pour une coque sous pression externe. Le mode est de type "chichi" (cf Figure 3c), avec une longueur d'ondes circonférentielle petite devant la longueur d'ondes axiale, mais plus grande que dans le cas de compression axiale: $\ell_y = O(L^{1/2} (h_f R)^{1/4})$. Reprenant l'analyse dimensionnelle sur cette base, on montre que le comportement dépend alors principalement d'un autre paramètre sans dimension:

$$C_t = \frac{E_s}{E_f} \left(\frac{L}{h_f} \right)^{3/2} \left(\frac{R}{h_f} \right)^{3/4} \quad (3)$$

3. Résultats numériques

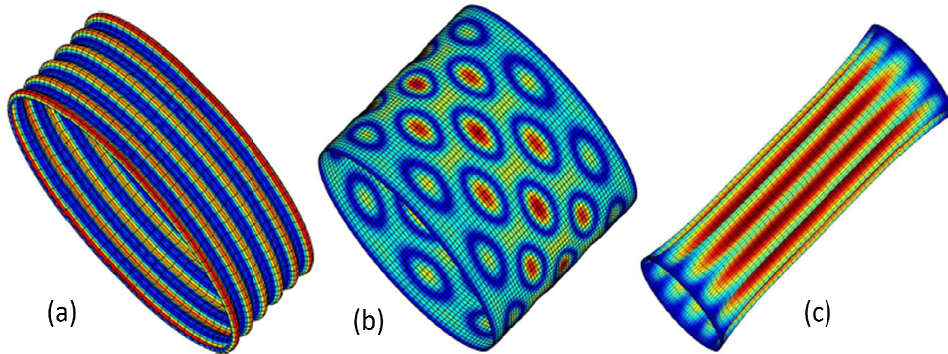


Figure 3 – Trois types de modes: axisymétrique (a), en pointes de diamant (b) ou en forme de chichi

Le calcul numérique fait apparaître principalement trois types de réponses: les modes axisymétriques, les modes en pointes de diamant classiques pour les coques cylindriques et les modes en forme de chichi, cf Figure 3.

3.1. Coques avec cœur sous compression axiale

De nombreux cas de coques avec cœur sous compression axiale ont été traités en [7]. Prenons deux cas représentatifs, l'un avec un cœur mou (), l'autre avec un cœur plus raide(). On applique des conditions d'encastrement sur le film (déplacement bloqué sauf le déplacement axial, rotations bloquées). Dans le cas du cœur mou (Figure 4), la bifurcation est sous critique et la branche bifurquée, très complexe, décroît jusqu'à 30% de la première bifurcation, ce qui implique classiquement une forte sensibilité aux imperfections géométriques. On retrouve le comportement habituel des coques sous

compression axiale, e.g. [13]. Quant à la déformée, elle est très brièvement axisymétrique, puis il apparaît un mode non axisymétrique à longueur d'ondes très courtes bien connu en flambage des coques sous le nom de "modes en pointes de diamant", voir Figure 3b. Dans le cas d'un cœur plus raide, les courbes de réponse deviennent sur-critiques, ce qui n'arrive quasiment jamais pour des coques cylindriques (sauf exceptionnellement pour les coques très courtes). Dans ce cas, la déformée post-critique reste axisymétrique, ce qui est également spécifique des coques avec cœur. En effet, les modes axisymétriques sont théoriquement possibles dans l'analyse théorique connue sous le nom de "cercle de Koiter", mais sous l'effet des conditions aux limites et des défauts de forme, ils ne sont jamais apparus en premier dans les calculs aussi bien que dans les expériences. On a trouvé systématiquement l'un ou l'autre de ces deux comportements: bifurcations sous critiques accompagnées de modes non axisymétriques ou bifurcations sur critiques accompagnées de modes axisymétriques. La limite entre ces deux comportements se situe dans la zone $0.7 \leq C_s \leq 0.9$. Pour $C_s < 0.7$, la bifurcation est sous critique et les modes en pointes de diamant, pour $C_s > 0.9$ la bifurcation est sur critique et les modes axisymétriques. Ces résultats sont en parfait accord avec les résultats expérimentaux de [6].

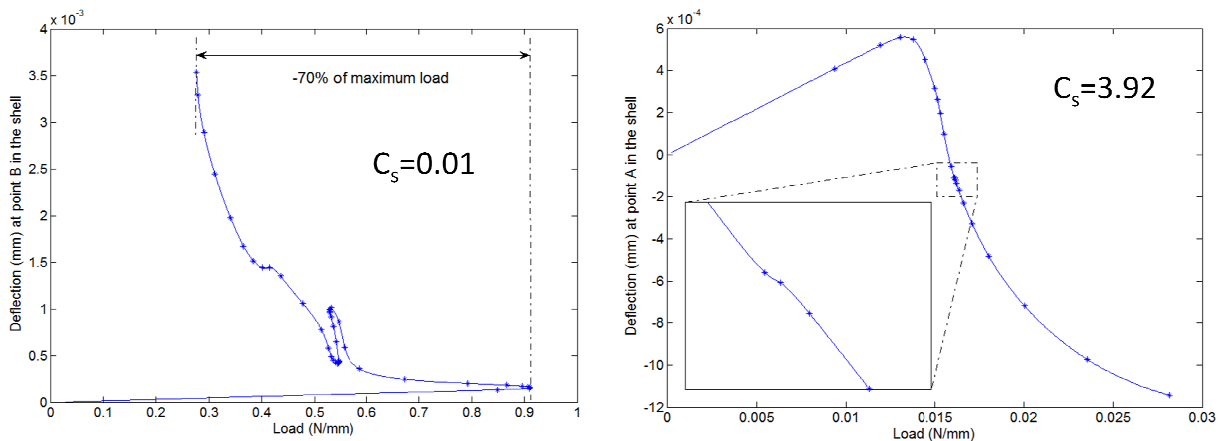


Figure 4 – Courbe de réponse d'une coque avec cœur en compression axiale. A gauche, un cas de cœur mou, à droite un cas de cœur raide.

3.2. Coques avec cœur soumis à un chargement thermique

Dans le cas d'un chargement thermique, deux cas vont être comparés avec les données ($E_s = 1.8MPa$, $\nu_f = 0.4$, $\nu_s = 0.48$, $h_f = 10^{-3}mm$, $R = 69.4 \times 10^{-3}mm$, $L = 0.4mm$) et donc le même paramètre de Batdorf $Z = 2319$. L'une de ces structures a un film très rigide ($E_f = 3.45 \times 10^6 MPa$, $C_t = 0.1$), l'autre un film plutôt mou et donc un cœur rigide en comparaison ($E_f = 1.3 \times 10^3 MPa$, $C_t = 266$). Les deux courbes sont représentées à la figure 5. Dans le cas d'un petit paramètre C_t , la première bifurcation est sous-critique comme dans le cas d'une coque seule, puis la branche se re-stabilise et présente une boucle d'hystérésis. Mais lorsque ce paramètre est grand, la première bifurcation est sur critique et la structure peut encaisser des efforts bien au-delà de la charge critique, ce qui n'a jamais été observé pour une coque seule. Cette transition sous critique/sur critique en fonction de C_t a été confirmée par un calcul analytique post-bifurcation analogue à celui présenté en [14]. Dans les deux cas, les déformées présentent des oscillations dans le sens circonférentiel, mais pas dans le sens axial (figure 3c), ce qui donne à la structure déformée une allure de "chichi".

A noter une particularité: dans le sens axial, la déformée présente une couche limite (figure 6) qui a été prédite en [15] dans le cas d'une coque seule et qui a des conséquences sur l'influence des conditions aux limites. Toutefois cette influence des conditions aux limites est beaucoup moins marquée pour un système avec un cœur assez rigide que pour une coque seule.

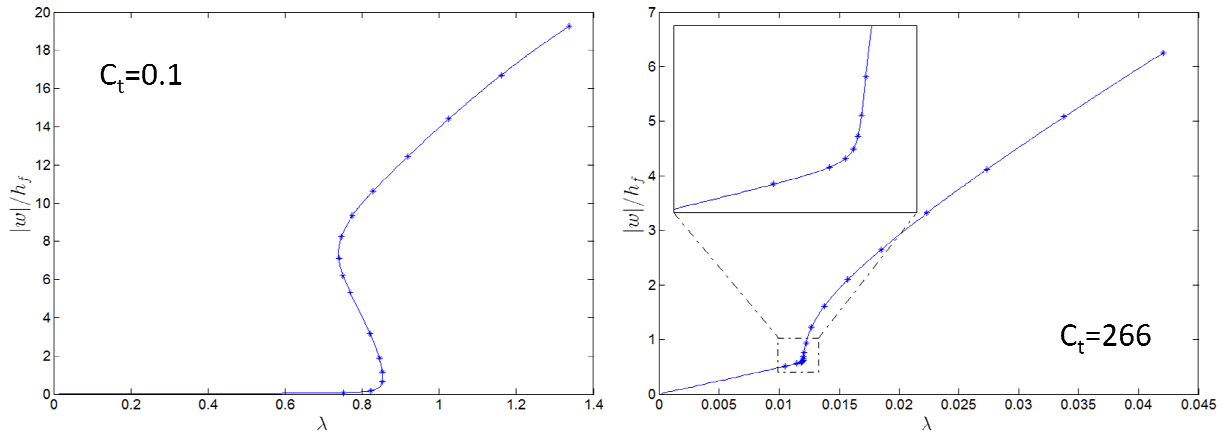


Figure 5 – Courbe de réponse d'une coque avec cœur sous chargement thermique. A gauche, un cas de cœur mou, à droite un cas de cœur raide.

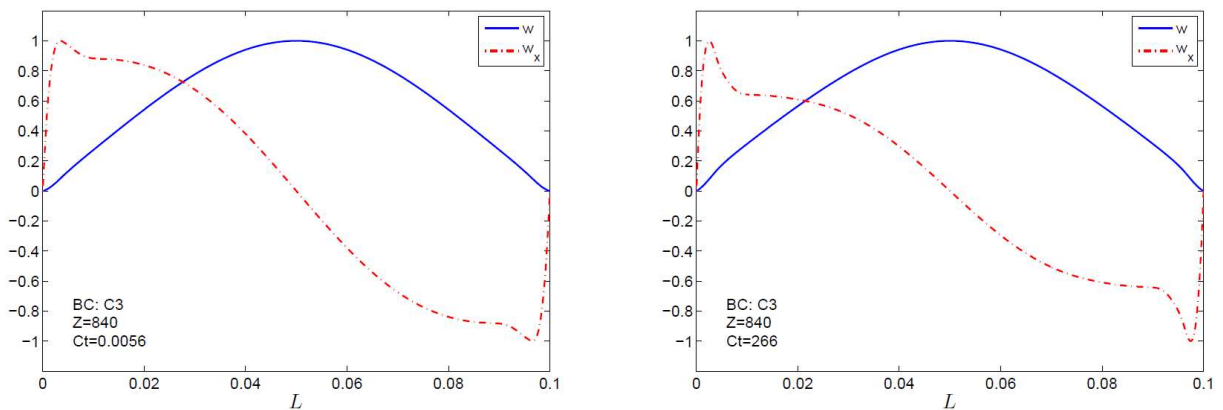


Figure 6 – Profil axial de la déformée et de la rotation pour une coque à cœur relativement mou (à gauche) et pour une coque à cœur rigide (à droite). On observe une couche limite de même épaisseur, cette épaisseur étant liée au paramètre de Batdorf d'après [15].

4. Conclusion

Le comportement des systèmes film/substrat de forme cylindrique a été analysé sur la base d'un modèle simple: élasticité en petites perturbations pour le substrat, coque avec comportement géométriquement non linéaire pour le film. Trois types de modes ont été observés: axisymétrique, en pointes de diamant et en forme de chichi, ce qui ne recoupe pas complètement les motifs connus pour une coque seule. Mais la principale différence avec une coque seule est le caractère stable de la première branche de bifurcation si le substrat est suffisamment rigide. Ces résultats mériteraient d'être revus avec un comportement de type hyperélastique, comme cela a été fait pour des films plans [16].

Acknowledgement

F. Xu acknowledges the financial support from the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11602058) and Fudan University (JIH2126003). The authors are also grateful for the

financial support from the French National Research Agency ANR (LabEx DAMAS, Grant No. ANR-11-LABX-0008-01).

Références

- [1] Z. C. Shao, Y. Zhao, W. Zhang, Y.P. Cao, X. Q. Feng. Curvature induced hierarchical wrinkling patterns in soft bilayers, *Soft Matter*, 12, 7977-7982, 2016.
- [2] X. Chen, J.W. Hutchinson. Herringbone buckling patterns of compressed thin films on compliant substrates, *Journal of Applied Mechanics*, 71, 597-603, 2004.
- [3] B. Audoly, A. Boudaoud. Buckling of a stiff film bound to a compliant substrate—Part I: Formulation, linear stability of cylindrical patterns, secondary bifurcations, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56, 2401-2421, 2008.
- [4] B. Li, Y.P. Cao, X.Q. Feng, H. Gao. Mechanics of morphological instabilities and surface wrinkling in soft materials: a review, *Soft Matter*, 8, 5728-5745, 2012.
- [5] F. Xu, M. Potier-Ferry, S. Belouettar, S., Y. Cong. 3D finite element modeling for instabilities in thin films on soft substrates, *International Journal of Solids and Structures*, 51, 3619-3632, 2014.
- [6] Y. Zhao, Y.P. Cao, X.Q. Feng, K. Ma. Axial compression-induced wrinkles on a core-shell soft cylinder: Theoretical analysis, simulations and experiments. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 73, 212-227, 2014
- [7] F. Xu, M. Potier-Ferry. On axisymmetric/diamond-like mode transitions in axially compressed core-shell cylinders, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 94, 68-87, 2016.
- [8] N. Stoop, R. Lagrange, D. Terwagne, P.M. Reis, J. Dunkel. Curvature-induced symmetry breaking determines elastic surface patterns. *Nature Materials*, 14, 337-342, 2015.
- [9] M.A. Biot. Bending of an infinite beam on an elastic foundation. *Journal of Applied Mechanics*, 203,A1–A7, 1937.
- [10] Z.Y. Huang, W. Hong, Z. Suo. Nonlinear analyses of wrinkles in a film bonded to a compliant substrate. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 53, 2101-2118, 2005.
- [11] N. Büchter, E. Ramm, D. Roehl. Three-dimensional extension of non-linear shell formulation based on the enhanced assumed strain concept. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37, 2551-2568, 1994.
- [12] M. Taylor, B. Davidovitch, Z. Qiu, K. Bertoldi . A comparative analysis of numerical approaches to the mechanics of elastic sheets, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 79, 92-107, 2015.
- [13] A. Combescure. Etude de la stabilité non linéaire géométrique et non linéaire matériau des coques minces. Application aux coques de révolution avec imperfections soumises à des chargements complexes. Habilitation à Diriger des Recherches, INSA, Lyon, 1995.
- [14] R. Abdelmoula, N. Damil, M. Potier-Ferry. Influence of distributed and localized imperfections on the buckling of cylindrical shells under external pressure. *International Journal of Solids and Structures*, 29, 1-25, 1992.
- [15] R. Abdelmoula, A. Léger. Singular perturbation analysis of the buckling of circular cylindrical shells. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 27, 706-729, 2008
- [16] F. Xu, Y. Koustawa, M. Potier-Ferry, S. Belouettar. Instabilities in thin films on hyperelastic substrates by 3D finite elements. *International Journal of Solids and Structures*, 69-70, 71-85, 2015.