

## Stability analysis of lattices structures using group-theoretic methods

C. Combescure<sup>1</sup>, R.S. Elliott<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Safran Recherche et Technologie, Modeling and Simulation, France, [christelle.combescure@safrangroup.com](mailto:christelle.combescure@safrangroup.com)

<sup>2</sup> Aerospace Engineering and Mechanics Dpt, Univ. of Minnesota (MN), USA, [relliott@umn.edu](mailto:relliott@umn.edu)

---

**Résumé** — Les matériaux à microstructure régulière tels que les structures lattices présentent un grand nombre de symétries internes et leur comportement à la ruine peut ainsi devenir compliqué à étudier du fait d'instabilités multiples pouvant subvenir simultanément. Nous proposons ici une technique d'étude systématique des matériaux à grand nombre de symétries internes basée sur la théorie des groupes et les ondes de Bloch et permettant d'accéder à toutes les bifurcations possibles dans le matériau de manière exhaustive. Les travaux présentés ici sont pour partie présentés en [1].

**Mots clefs** — Structure lattice, matériaux architecturé, stabilité, théorie des groupes, ondes de Bloch, bifurcation.

---

### 1. Introduction

Les structures lattices sont des réseaux de poutres, de tubes ou de coques microscopiques qui sont assemblés sur la base d'une cellule de base tridimensionnelle, répétée de manière périodique dans l'espace. Ces microstructures peuvent, à l'échelle macroscopique, être utilisées comme matériau constitutif pour des applications nécessitant des propriétés spécifiques. Ainsi, il a été montré [2][3] que les structures lattices, aussi appelées matériaux architecturés, permettent de construire des matériaux présentant un ratio rigidité-densité assez élevé et encore non proposé par les matériaux traditionnels. Puis sont apparues des applications plus originales comme des matériaux à coefficient de Poisson négatif [4] ou des matériaux présentant des bandes d'absorption de fréquences [5]. Toutes ces applications sont d'un grand intérêt pour l'industrie aéronautique, et la meilleure maîtrise des techniques de fabrication additives rend leur utilisation désormais envisageable. Cependant, lorsqu'ils sont soumis à des sollicitations de type compression, ces matériaux présentent des modes de ruine pas nécessairement intuitifs et qu'il est nécessaire de comprendre et d'expliquer avant de pouvoir envisager d'utiliser les structures lattices de manière industrielle. Par ailleurs, ces dernières années, certains chercheurs [6] explorent la possibilité d'exploiter les instabilités de compression présentes dans les structures lattices pour proposer des matériaux à propriétés ajustables.

Au regard du bref état de l'art présenté ci-dessus, il nous semble nécessaire de mettre en œuvre une méthode systématique et automatique permettant d'étudier la stabilité et le comportement post-bifurqué des structures lattices. Nous proposons donc un schéma numérique exploitant la théorie des groupes et les ondes de Bloch et permettant (i) un calcul efficace des chemins d'équilibre et de leur stabilité, (ii) une identification automatique des bifurcations et une analyse des branches bifurquées ainsi (iii) qu'une sélection automatique et maîtrisée des branches bifurquées. Ce schéma est tout d'abord validé sur l'exemple bien connu [7][8][9] des nids d'abeilles soumis à des sollicitation bi-axiales puis appliqué à des structures lattices tridimensionnelles.

## 2. Théorie

Ce travail s'intéresse à l'analyse du comportement post-bifurqué des structures lattices. Ces matériaux étant construits sur la base d'une cellule de base périodique tridimensionnelle, leur géométrie peut être décrite à l'aide de groupes de symétries via la théorie des groupes d'espace, à l'image de ce qui est fait en cristallographie pour l'étude de la structure interne des cristaux. Ainsi, un nid d'abeille classique à structure hexagonale peut être décrit par le groupe d'espace P622 selon la notation des Tables Internationales de la Cristallographie [10].

### 2.1. Méthodologie proposée

La procédure que nous suivons pour conduire l'analyse de stabilité d'un matériau périodique débute par une analyse par ondes de Bloch sur une cellule primitive de manière à déterminer les longueurs d'ondes critiques correspondant aux différentes instabilités pouvant subvenir dans le système étudié. Une cellule de base correspondant à ces longueurs d'ondes est ensuite construite et son groupe de symétries associé est identifié. En se basant sur les outils de la théorie des représentations, de nombreuses informations sur les bifurcations du système découlent de cette identification et les branches bifurquées peuvent alors être identifiées puis suivies pour une cartographie complète des chemins d'équilibre possibles du système.

### 2.2. Notations

En travaillant sur une cellule primitive définie par des vecteurs de base  $\mathbf{G}_1$  et  $\mathbf{G}_2$ , comme présenté pour l'exemple sur la Figure 1.a., il est possible de repérer chaque nœud de la structure périodique infinie à partir de son image par périodicité sur la cellule primitive. Ainsi, la position de référence du nœud  $j$  de la cellule  $(l^1, l^2)$ , indicé  $(l^1, l^2, j)$  est donnée par rapport à la position du nœud  $j$  de référence sur la cellule primitive comme suit :

$$\mathbf{X}(l^1, l^2, j) = l^1 \mathbf{G}_1 + l^2 \mathbf{G}_2 + \mathbf{X}(0, 0, j) \quad (1)$$

De plus, à la base directe formée par les vecteurs de base  $\mathbf{G}_1$  et  $\mathbf{G}_2$ , il est d'usage d'associer une base réciproque définie comme la base covariante normée  $(\mathbf{G}^1, \mathbf{G}^2)$  associée à la base contravariante  $(\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2)$ . Une illustration de ces bases est proposée en Figure 1.b.

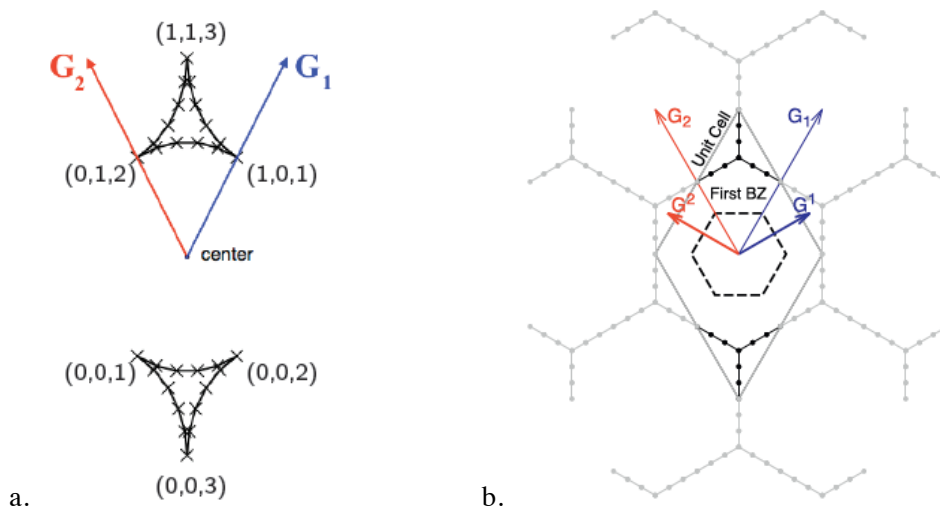


Figure 1 : a. Exemple de cellule primitive et de ses vecteurs de base  $(\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2)$  pour un nid d'abeille hexagonal à cellules circulaires, avec illustration de la notation pour les nœuds frontières ; b. Illustration de la base directe  $(\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2)$  et sa base réciproque associée  $(\mathbf{G}^1, \mathbf{G}^2)$

### 2.3. Ondes de Bloch

Dans un système périodique infini, il est nécessaire de détecter les instabilités à l'échelle microscopique qui peuvent survenir à l'échelle de une à plusieurs cellules primitives. A partir de calculs effectués sur la cellule de base la plus petite possible, la cellule primitive, la théorie des ondes de Bloch permet de déterminer les différentes longueurs d'ondes associées aux instabilités du système. Cette théorie considère des perturbations en déplacement de type ondes planes avec toutes les longueurs d'ondes possibles et aucune déformation globale, sur la cellule primitive. Ces ondes planes vont venir affecter les conditions limites périodiques usuelles en les modifiant par un vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  comme suit :

$$u(l^1, l^2, j) = u(0, 0, j)e^{2i\pi\mathbf{k}\cdot\mathbf{G}} \quad (2)$$

où  $u(l^1, l^2, j)$  est le déplacement du nœud  $(l^1, l^2, j)$ .

Le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ , s'exprimant sur la base réciproque  $(\mathbf{G}^1, \mathbf{G}^2)$ , donnera l'orientation et la longueur d'onde de l'onde plane modifiant les conditions limites périodiques, et prendra des valeurs comprises entre  $-1$  et  $1$ .

### 2.4. Groupes de symétries

Une fois une longueur d'onde d'intérêt identifiée, une cellule de base correspondante est construite en translatant la cellule primitive le long des vecteurs de base de la cellule primitive, par un nombre de fois déterminés par l'analyse par ondes de Bloch. Cette cellule de base sera affectée de conditions aux limites périodiques.

Les symétries d'un système sont catégorisées en deux types : (i) les rotations, qui forment le groupe de symétries ponctuelles (ou groupe de point) du système, et (ii) les translations qui, alliées aux rotations, forment son groupe d'espace. Les symétries de translations se répétant à l'infini sans jamais retrouver un élément du groupe déjà existant, les groupes d'espaces sont des groupes de dimension infinie, difficiles à manier en pratique. Cependant, en restreignant le groupe des translations aux seules translations qui permettent de construire la cellule à partir de la cellule primitive, i.e. aux translations associées au vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  des ondes de Bloch, un groupe d'espace réduit peut être associé à la nouvelle cellule de base. On crée ainsi un groupe de symétries de dimensions finies et la périodicité de la cellule, au delà de ces translations internes, permet de recréer la structure infinie sur laquelle on travaille.

### 2.5. Critères de stabilité

Il est d'usage d'étudier la stabilité des structures périodiques en utilisant un critère de stabilité défini sur la dérivée d'une fonctionnelle d'énergie par rapport à des vecteurs déplacements. On remarque cependant dans la littérature l'utilisation de plusieurs critères de stabilités différents et la question se pose de la signification de chaque critère et du lien potentiel entre eux. Ainsi, si on note  $\mathbf{U}$  le tenseur gradient de la déformation à droite et  $\mathbf{v}$  le vecteur des déplacements internes périodiques, on peut définir  $W(\mathbf{U}, \mathbf{v})$  la densité d'énergie de déformation et  $\mathcal{E}(\mathbf{U}, \mathbf{v}, \lambda)$  la densité d'énergie totale tenant compte du chargement défini à partir du scalaire paramètre de chargement  $\lambda$ . Les équations d'équilibre sont alors définies comme :

$$\frac{\partial \mathcal{E}(\mathbf{U}, \mathbf{v}, \lambda)}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (3)$$

On remarque dans la littérature la définition de trois types de critères de stabilité :

(i) critère ad-hoc [11] : stable si 
$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}(\mathbf{U}, \mathbf{v}, \lambda)}{\partial \mathbf{v}^2} > 0 \quad (4)$$

(ii) critère de forte ellipticité (RK1) [12] : stable si 
$$\frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{F}^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{F} \partial \mathbf{v}} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{v}^2} \right)^{-1} \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{v} \partial \mathbf{F}} > 0 \quad (5)$$

(iii) critère par ondes de Bloch = (5) pour les conditions de périodicité généralisées présentées au §2.3.

### 3. Résultats

#### 3.1. Stabilité et post-bifurcation des nids d'abeilles en compression équi-biaxiale

L'étude du comportement d'un nid d'abeille soumis à de la compression équi-biaxiale présentée en [8] a mis en évidence le fait que, en compression équi-biaxiale, les nids d'abeilles subissent une micro-bifurcation élastique. Alors, notre étude souligne l'importance de la prise en compte des ondes de Bloch comme critère de stabilité puisque, comme présenté en Figure 2, quelque soit le chargement considéré (déplacement, charge morte ou suivieuse), le premier critère de stabilité à faillir est celui de Bloch pour trois vecteurs d'ondes  $\mathbf{k} = \{(0.5,0), (0,0.5), (0.5,0.5)\}$ . Cela signifie qu'il est nécessaire de considérer une cellule unitaire plus grande, comportant 2 cellules dans la direction  $\mathbf{G}_1$ , 2 dans la direction  $\mathbf{G}_2$  et 2 dans la direction  $\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2$ .

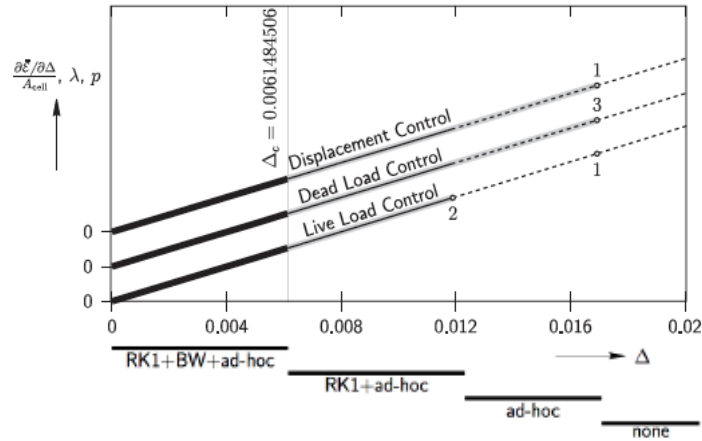
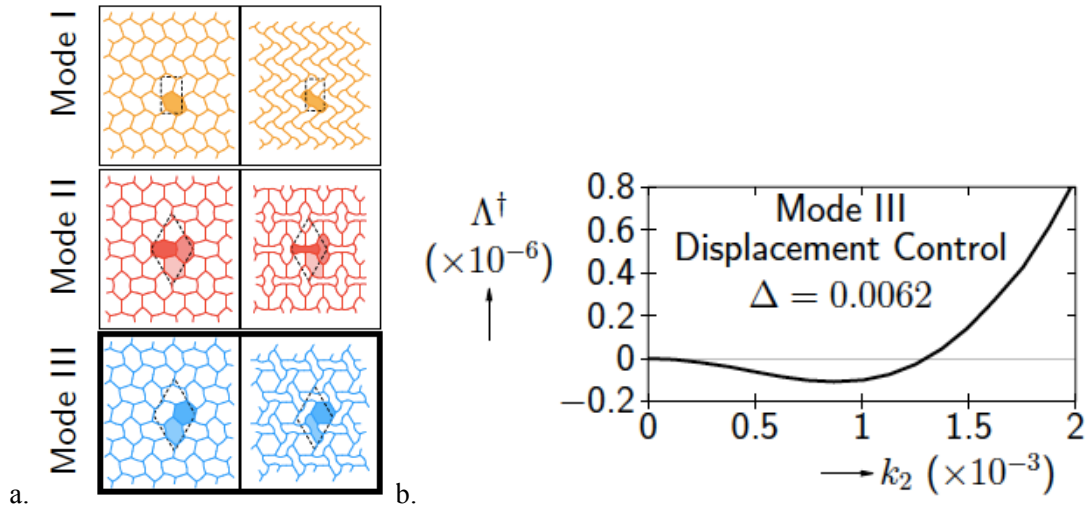


Figure 2 : Chemins d'équilibres et leur stabilité suivant les trois critères de stabilité étudiés

Considérant cette cellule unitaire plus grande, il apparaît que le premier point de bifurcation est un point triple présentant les mêmes modes propres pour tous les chargements présentés en Figure 3.a. Une étude de stabilité de ces modes fait apparaître que le mode I est stable au sens de tous les critères uniquement pour un chargement de type charge suivieuse, alors que le mode III n'est stable qu'au sens du critère ad-hoc pour les chargements de charge morte ou en déplacement contrôlé. Cela semble en contradiction avec les résultats expérimentaux présentés en [7] où, sous déplacement contrôlé, un mode III stable a été observé. En réalité, une étude plus détaillée de l'analyse par ondes de Bloch sur la branche bifurquée correspondant au mode III pour un chargement en déplacement contrôlé montre

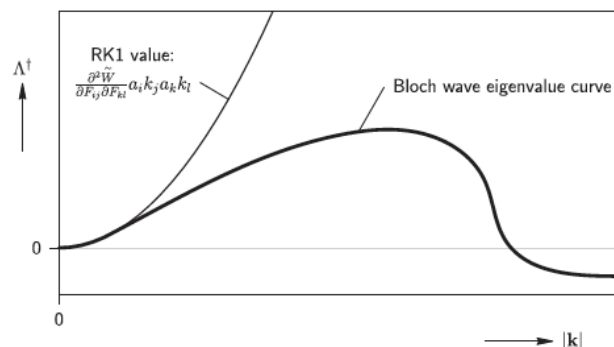
que ce mode est instable pour de très longues longueurs d'ondes (cf **Figure 3.b.**), ce qui ne serait observable que dans un échantillon comportant environ 100x100 cellules primitives. Or, les résultats expérimentaux dont nous disposons ont été réalisés sur un échantillon comportant 18x21 cellules, ce qui explique l'apparente stabilité du mode III observé.



**Figure 3 : a. Modes de bifurcation pour un nid d'abeille en compression équi-biaxiale et b. zoom autour des longues longueur d'ondes pour le critère par ondes de Bloch pour une configuration d'équilibre juste après le point de bifurcation sur le chemin bifurqué du mode III sous sollicitation de déplacement contrôlé.**

### 3.2. Lien les différents critères de stabilité

Les résultats précédents et l'analyse détaillée de la branche bifurquée de mode III sous sollicitation de déplacement contrôlé permettent d'explicitier le rôle de chaque critère de stabilité étudié dans ces travaux. Le critère ad-hoc coïncide systématiquement avec la branche de plus faible énergie. Quant aux critères d'ellipticité forte et des ondes de Bloch, ils sont concomitants dans la limite des longues longueurs d'ondes. Ainsi, comme il est schématiquement représenté en Figure 4, la considération du critère de forte ellipticité permet de détecter les instabilités à longues longueurs d'ondes, donc les instabilités macroscopiques, qui pourraient également être détectées par les ondes de Bloch. D'ailleurs, dans le cas de déplacement contrôlé, le critère de stabilité de forte ellipticité n'était pas respecté sur la branche bifurquée du mode III. Cependant, pour des raisons pratiques, il est très coûteux de « zoomer » avec les ondes de Bloch autour des longues longueurs d'ondes et il est donc conseillé de considérer, pour ces études, à la fois le critère par ondes de Bloch et celui de forte ellipticité, le premier détectant les bifurcations microscopiques et le second les macroscopiques.



**Figure 4 : Lien entre critère de stabilité par ondes de Bloch et de forte ellipticité (RK1).**

## 4. Conclusions

Les résultats présentés ici permettent de mieux comprendre le rôle de chacun des critères de stabilité et de valider la méthodologie proposée dans ces travaux. Il sera présenté, lors de la conférence, des résultats étendus aux structures lattices tridimensionnelles, pour lesquelles la nécessité d'automatisation de la procédure ainsi que l'intérêt de la théorie des groupes pour l'étude de telles structures deviennent évidents.

## Références

- [1] C. Combescure, P. Henry, and R.S. Elliott, *Post-bifurcation and stability of a finitely strained hexagonal honeycomb subjected to equi-biaxial in-plane loading*. International Journal of Solids and Structures, Vol. 88, p. 296-318, 2016.
- [2] N.A. Fleck, V. S. Deshpande, and M. F. Ashby. *Micro-architected materials: past, present and future*. Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. Vol. 466. No. 2121, 2010.
- [3] M. Ashby. *Designing architected materials*. Scripta Materialia Vol. 68, No. 1, 2013.
- [4] R. Lakes. *Deformation mechanisms in negative Poisson's ratio materials: structural aspects*. Journal of Materials Science, Vol. 26, No. 9, p. 2287-2292, 1991.
- [5] M. Plihal and A.A. Maradudin. *Photonic band structure of two-dimensional systems: The triangular lattice*. Physical Review B, Vol. 44, No. 16, p. 8565, 1991.
- [6] K. Bertoldi, P. M. Reis, S. Willshaw, and T. Mullin. *Negative Poisson's ratio behavior induced by an elastic instability*. Advanced Materials, Vol. 22, No. 3, p.361-366, 2010.
- [7] S.D. Papka, S. Kyriakides, *Biaxial crushing of honeycombs : Part 1 : Experiments*. Int. J. of Solids and Structures, Elsevier, 36(29) :4367–4396, 1999.
- [8] N. Triantafyllidis, M. Schraad. *Onset of failure in aluminum honeycombs under general loading*. J. of the Mechanics and Physics of Solids, Elsevier, 46, 1089-1124, 1998.
- [9] I. Saiki, K. Ikeda, K. Murota. *Flower patterns appearing in a honeycomb structure and their bifurcation mechanism*. Int. J. of Bifurcation and Chaos 15, 497-515, 2005.
- [10] T. Hahn. *International tables for crystallography*. D. Reidel Publishing Company, 2005.
- [11] N. Ohno, D. Okumura, and H. Noguchi. *Microscopic symmetric bifurcation condition of cellular solids based on a homogenization theory of finite deformation*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids Vol. 50. No.5, p.1125-1153, 2002.
- [12] C. Truesdell, and W. Noll. *The non-linear field theories of mechanics*. The non-linear field theories of mechanics. Springer Berlin Heidelberg, p. 1-579, 2004.
- [13] R.S. Elliott, N. Triantafyllidis, J.A. Shaw, *Stability of crystalline solids I: continuum and atomic lattice considerations*. J. Mech. Phys. Solids Vol. 54, No. 1, p.161–192, 2006.