

Optimisation de structures composées de cellules périodiques modulées orthotropes par la méthode d'homogénéisation

P. Geoffroy-Donders¹

¹ CMAP, Ecole Polytechnique, France, perle.geoffroy@cmap.polytechnique.fr

Résumé — Nous proposons ici une méthode d'optimisation topologique basée sur la méthode d'homogénéisation afin d'obtenir des structures composées de cellules périodiques de densité variable. Une projection de nos solutions optimales permet d'envisager des applications à la fabrication additive

Mots clefs — homogénéisation, optimisation topologique, fabrication additive

1. Introduction

L'optimisation topologique consiste à déterminer la meilleure répartition de matière dans un volume donné tout en respectant un certain nombre de contraintes. Les méthodes actuelles sont multiples (par exemple la méthode SIMP [3], ou la méthode des level sets [2]) et conduisent à des formes macroscopiques. Or il est connu que l'optimum d'un problème d'optimisation de forme, présente généralement des inclusions infinitésimales [1], c'est-à-dire que l'optimum est un matériau composite obtenu par homogénéisation. C'est le cas par exemple des laminés qui permettent de réaliser la compliance minimale pour les équations de l'élasticité. Une telle solution n'a au premier abord qu'un intérêt limité d'un point de vue industriel, car non usinable. Toutefois, le développement des techniques de fabrication additive permet d'envisager aujourd'hui des pièces mécaniques de très grande complexité topologique et donc notamment microperforées, potentiellement plus performantes que des pièces de structures macroscopiques.

Des méthodes d'optimisation de structures composées de cellules périodiques ont été proposées, par exemple la méthode originelle de Bendsoe et Kikuchi [8], celle de Zhang [10] basée sur l'homogénéisation et pour des cellules hexagonales isotropes, ou la méthode paramétrique de Geihe pour des cellules carrées percées d'une ellipse [4]. Nous proposons ici une méthode similaire à celle de Zhang, mais appliquée à des cellules non isotropes dont on optimise également l'orientation. L'un des défis de l'optimisation topologique par homogénéisation est à proprement parler la « déshomogénéisation », c'est-à-dire la projection des solutions sur l'ensemble des formes composées d'une microstructure de taille compatible avec la résolution des outillages de fabrication additive. Dans le cas de cellules isotropes, une solution naturelle consiste à calculer la densité moyenne sur chacune des cellules afin de déterminer la taille des inclusions correspondantes. Mais une autre approche est nécessaire dans le cas général, car il faut tenir compte du champ d'orientation homogénéisé optimal des cellules anisotropes. La principale originalité de notre travail est une méthode de projection qui repose sur l'introduction d'une transformation du plan compatible avec l'orientation des cellules.

2. Optimisation par la méthode d'homogénéisation

On se place ici dans le cadre de l'élasticité et on considère un problème plan. On note le tenseur d'élasticité du matériau A et les tenseurs de déformation linéarisée et de contraintes,

respectivement ε et σ . Le problème d'optimisation que nous étudions ici est un problème classique de minimisation de la compliance sous la contrainte d'un volume fixe, dans un domaine de travail Ω .

2.1. Cellules

Dans le cas de notre étude, nous considérons une cellule Y carrée orthotrope, de taille unitaire, percée en son centre d'un trou rectangulaire de dimensions l_x et l_y , voir Figure 1. En effet, la structure d'une telle cellule s'approche de celle des laminés de rang 2, dont on sait qu'ils permettent d'atteindre le minimum de compliance. Mais à la différence de ces derniers, une telle cellule ne présente pas deux échelles de matière distinctes et il est donc envisageable de l'usiner. Cette cellule a déjà été utilisée dans la littérature, à commencer par Bendsoe et Kikuchi [8], puis Kikuchi et Suzuki [9], dont notre méthode est très proche, mais qui obtenaient des structures pénalisantes tandis que nos résultats montrent la pertinence de la densité intermédiaire. Nous pouvons aussi citer par exemple Rezaie [7], qui s'intéresse à ce type de cellule dans le cadre de la fabrication additive.

La cellule étant orthotrope, plusieurs termes de son tenseur d'élasticité homogénéisé A^* s'annulent. Le tenseur A^* est alors entièrement déterminé par seulement quatre de ses coefficients : A^*_{1111} , A^*_{1122} , A^*_{2222} , A^*_{1212} (on se place dans la base des axes principaux e_1 et e_2 de la cellule). Notons que le tenseur homogénéisé dépend de la taille de l'inclusion rectangulaire l_x et l_y .

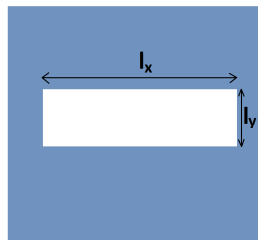


Figure 1 – Cellule périodique orthotrope

2.2. Homogénéisation

Par la méthode d'homogénéisation, nous cherchons à établir la loi de Hooke de nos cellules en fonction de ses paramètres de forme l_x et l_y , c'est-à-dire $A^*(l_x, l_y)$. Nous ne tenons pas compte ici de l'orientation φ de la cellule. En effet, que ce soit du point de vue de l'interpolation ou de l'optimisation, il est plus aisé de dissocier l'orientation de la cellule de son comportement élastique en recourant à un opérateur rotation $R(\varphi)$ du tenseur $A^*(l_x, l_y)$ dans les calculs.

Nous renvoyons le lecteur à [1] pour une présentation détaillée de la méthode d'homogénéisation, nous ne présenterons ici que les résultats principaux nécessaires pour la compréhension de notre méthode. Pour déterminer le tenseur d'élasticité homogénéisé correspondant à la cellule considérée Y, il est nécessaire dans un premier temps de résoudre le *problème de cellule* suivant :

$$\begin{cases} -\text{div } A(y)(e_{ij} + \nabla w_{ij}) = 0 \text{ dans } Y \\ y \rightarrow w_{ij}(y) \text{ } Y \text{ p\'eriodique} \end{cases}$$

où les (e_{ij}) sont les tenseurs unitaires de la base canonique des tenseurs symétriques d'ordre 2, et où les (w_{ij}) sont les variations locales du champ des déplacements lorsque la cellule est soumise à un déplacement moyen e_{ij} . Le tenseur homogénéisé d'élasticité A^* est ensuite obtenu par intégration sur la cellule Y :

$$A_{ijkl}^* = \int_Y A(y)(e_{ij} + \nabla w_{ij}) : (e_{kl} + \nabla w_{kl}) dy$$

Il est judicieux de remarquer que lorsque l'une des deux dimensions de l'inclusion vaut 1, nous retrouvons un laminié de rang 1 : il existe des formules explicites pour calculer son tenseur homogénéisé [1] sans passer par la résolution du problème de cellule.

Dans le cas de notre étude, nous avons calculé numériquement les coefficients (A_{ijkl}^*) pour un échantillon de couples (l_x, l_y) à l'aide du logiciel Freefem ++. Nous avons ensuite établi par interpolation la loi de comportement de notre matériau $A^*(l_x, l_y)$, ainsi que ses dérivées.

2.3. Optimisation topologique

Les variables d'optimisation sont ici les champs homogénéisés des dimensions de l'inclusion dans les cellules ainsi que leur orientation. Nous cherchons à minimiser la compliance J , sous la contrainte d'un volume fixe V , où :

$$J = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (R(\phi)A^*(l_x, l_y)R(\phi)')^{-1} \sigma : \sigma \quad V = \int_{\Omega} (1 - l_x l_y)$$

Pedersen [6] a établi l'orientation optimale d'une cellule orthotrope soumise à un champ de déplacement donné. Un raisonnement semblable donne l'orientation optimale pour un champ de contraintes donné. Nous préférons utiliser le tenseur des contraintes pour assurer la convergence de notre algorithme d'optimisation (de type point fixe). En effet, nous avons alors un problème de type min-min (minimisation par rapport à l'orientation, puis minimisation par rapport aux contraintes lors de la résolution du problème d'élasticité). Dans le cas très précis de nos cellules carrées percées d'un trou rectangulaire, nous remarquons que l'orientation optimale revient à aligner la cellule avec les directions principales des contraintes, exactement comme pour les laminés optimaux dont le design de notre cellule s'inspire.

Concernant l'optimisation des dimensions de l'inclusion rectangulaire, nous avons recours à un algorithme de gradient projeté. En effet, nous avons déterminé les dérivées partielles de $A^*(l_x, l_y)$ et nous sommes donc en mesure de calculer les dérivées partielles de la compliance. Par ailleurs, les dimensions internes sont comprises entre 0 et 1, d'où la projection. Elles doivent également permettre de satisfaire une contrainte de volume, d'où l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange λ .

L'algorithme d'optimisation complet est alors :

- Initialisation des paramètres de forme l_x, l_y et ϕ
- Jusqu'à convergence : pour $k > 0$, on calcule les contraintes σ_k et les déformations ϵ_k . On calcule alors l'orientation optimale ϕ_{k+1} , en fonction de σ_k , ainsi que les dérivées partielles de J par rapport à $l_{x,k}$ et $l_{y,k}$. Puis on met à jour les dimensions :

$$l_{i,k+1} = \max(0, \min(1, l_{i,k} - t (\lambda_{k+1} l_{j,k} - R(\phi) \frac{\partial A^*}{\partial l_i}(l_{1,k}, l_{2k}) R(\phi)' \epsilon_k \cdot \epsilon_k)))$$

où le multiplicateur de Lagrange est déterminée par dichotomie à chaque itération de façon à respecter la contrainte de volume et où t est le pas de descente. Notons que nous étudions ici le cas particulier de l'élasticité où l'état adjoint est simplement l'opposé de l'état des déplacements.

3. Résultats numériques

Nous présentons ici nos premiers résultats numériques, obtenus avec le logiciel Freefem++, sur un pont de dimensions 2×1 , soumis à un chargement vertical en son centre, voir Figure 2. La contrainte de volume est de 30% du volume considéré. D'un point de vue quantitatif, la compliance optimale est de 3.14, contre 42.67 à l'initialisation, (c'est-à-dire en l'absence de rotation et avec $l_x = l_y$ constants et permettant de satisfaire la contrainte de volume). Par ailleurs, la compliance optimale obtenue avec des laminés de rang 2 est de 2.86. Les cellules considérées permettent donc de s'approcher de l'optimum à 9%.

Les dimensions optimales de l'inclusion sont représentées sur la Figure 3, la densité de matière correspondante sur la Figure 4. Notons que la densité optimale comporte des zones de densité intermédiaire : on tire bel et bien profit des matériaux composites, ce qui justifie l'intérêt de notre méthode.

L'orientation optimale des cellules est représentée sur la Figure 5. La non-isotropie des cellules considérées est à son tour exploitée par l'optimisation. Notons que l'orientation dans les zones de faible densité importe peu car ces cellules ont un faible rôle mécanique. Lorsque les cellules sont pleines (densité égale à 1) on retrouve un matériau isotrope : l'orientation n'a donc aucune influence. Par ailleurs, les rayons internes, comme l'arche externe, s'approchent de laminés de rang 1, alignés avec les directions principales des contraintes.

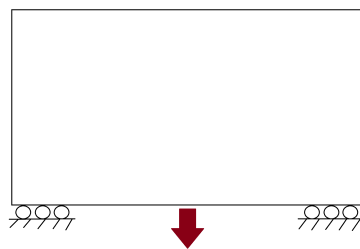


Figure 2 – Modèle du pont : chargement vertical au centre et condition de glissement

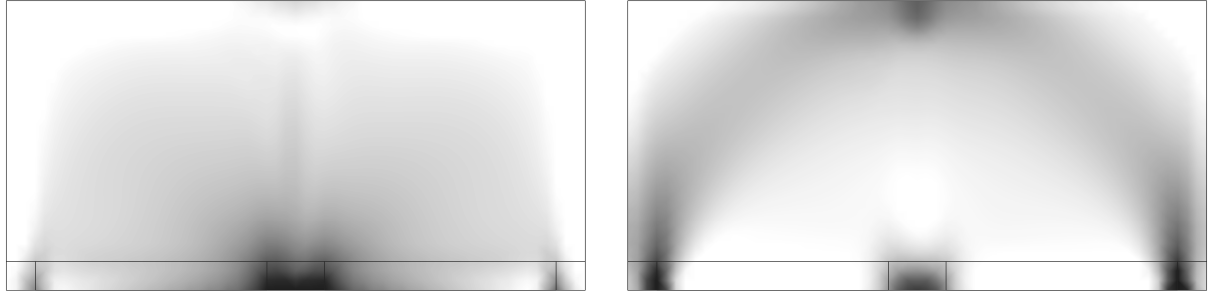


Figure 3 – Dimensions internes l_x (gauche) et l_y (droite) optimales (échelle du noir ($l=0$) au blanc ($l=1$))

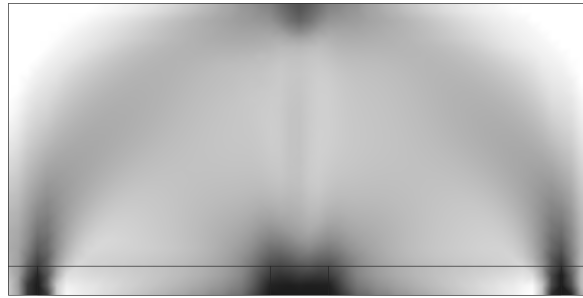


Figure 4 – Densité optimale (échelle du blanc ($d=0$) au noir ($d=1$))

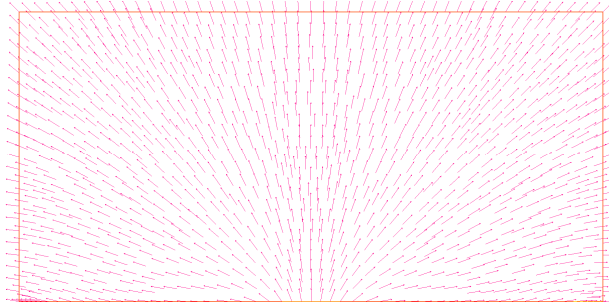


Figure 5 – Orientation optimales par rapport à l'axe horizontal (droite)

4. Projection de la forme homogénéisée optimale

Une méthode de projection des formes optimales obtenues par homogénéisation est proposée dans [5]. Celle-ci repose sur l'introduction d'une transformation du plan qui respecte localement la rotation optimale des cellules. En nous inspirant de cette approche, il est alors possible de projeter notre solution optimale, voir Figure 6, et même d'adapter la taille des cellules périodiques sur lesquelles la projection est réalisée.

Soit $\Psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ un difféomorphisme, de dérivée $D_x \Psi = (u_1, u_2)$. Que Ψ oriente localement chaque cellule selon l'orientation optimale φ , s'écrit :

$$u_1 = C (\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \text{ et } u_2 = C (-\sin(\varphi), \cos(\varphi)),$$

avec $C: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$.

Nous souhaitons que les cellules carrées, ne soient pas excessivement déformées lors de la projection. Nous imposons donc une condition supplémentaire : que Ψ soit une transformation conforme du plan, c'est-à-dire qu'elle conserve les angles. Pour cela, il est nécessaire d'effectuer

une régularisation de l'angle optimale, de sorte que : $\Delta\varphi = 0$. Nous sommes ensuite en mesure d'exprimer le champ de dilatation anisotrope C en fonction de φ , puis Ψ en résolvant des formulations variationnelles.

Notons que le champ d'orientation optimale est connu à un angle π près, et n'est donc pas nécessairement continu. Nous tenons compte de cette difficulté dans notre algorithme. Nous renvoyons le lecteur à [5], aux articles et au manuscrit de thèse à venir.

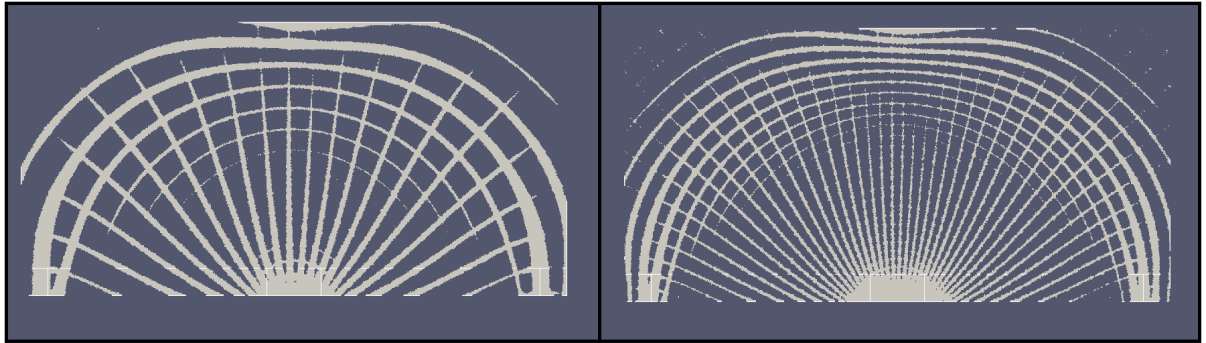


Figure 6 – Projection de la forme optimale du demi-cantilever supérieur, sur des cellules de tailles différentes (rapport de 2 - en clair : matière).

5. Conclusions et perspectives

La méthode par homogénéisation permet d'établir les paramètres de forme optimaux d'une structure composée de cellules périodiques non isotropes, choisies par l'utilisateur. Par projection, il est ensuite possible de déshomogénéiser la forme optimale, cette étape permet également de choisir la taille des cellules considérées et donc d'adapter la pièce finale à la résolution d'une imprimante 3D par exemple.

Toutefois un post-traitement est encore nécessaire pour raffiner la pièce à usiner. Par exemple, les zones de très faible densité ne présentent que peu d'intérêt d'un point de vue mécanique. Il est donc envisageable de les supprimer par une méthode de pénalisation qui interviendrait après convergence de l'algorithme d'optimisation. De même il est possible d'imposer une densité égale à 1 dans les zones de forte densité. En effet, dans ces zones, nous sommes limités par la résolution des procédés de fabrication additive.

6. Remerciements

Cette étude a été réalisée dans le cadre d'une thèse CIFRE, financée par Safran Tech. L'auteur remercie ses directeurs de thèse Grégoire Allaire (CMAP) et Olivier Pantz (LJAD), ainsi que son encadrant industriel Julien Cortial (Safran Tech) pour leur aide et leurs conseils.

7. Références

- [1] G. Allaire, Shape optimization by the Homogenization Method, Vol. 146, Springer Science et Business Media, 2012.
- [2] G. Allaire, F. Jouve, A.M. Toader, A level-set method for shape optimization, *Comptes Rendus Mathématiques*, 334(12), 1125-1130, 2002
- [3] M.P. Bendsoe, O. Sigmund, *Topology Optimization : theory, methods, and applications*, Springer Science et Business Media, 2013
- [4] B. Geihe, M. Lenz, M. Rumpf, R. Schulz, Risk averse elasticshape optimization with parametrized fine scale geometry, *Mathematical Programming* 141(1-2), 383-403, 2013

- [5] O. Pantz, K. Trabelski, A post-treatment of the homogenization method for shape optimization, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 47(3), 1380-1398, 2008
- [6] P. Pedersen, On optimal orientation of orthotropic materials, *Structural Optimization*, 1(2), 101-106, 1989
- [7] R. Rezaie, M. Badrossamay, A. Ghaie, H. Moosavi, Topology optimization for fused deposition modeling process, *Procedia CIRP*, vol.6, 521-526, 2013
- [8] M.P. Bendsoe, N. Kikuchi, Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 71(2), 197-224, 1988
- [9] K. Suzuki, N. Kikuchi, A homogenization method for shape and topology optimization, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 93(3), 291- 318, 1991
- [10] P. Zhang, J. Toman, Y. Yu, et al., Efficient design-optimization of variable-density hexagonal cellular structure by additive manufacturing: theory and validation, *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 137 (2), 2015