

Méthode de régularisation évanescence pour l'identification en élasticité linéaire de conditions aux limites à partir de mesures de champs partielles.

L. Caillé¹, N. Michaux-Leblond¹, J-L. Hanus², F. Delvare¹

¹ LMNO, Université de Caen Normandie, {laetitia.caille,nathalie.leblond,franck.delvare}@unicaen.fr

² PRISME, INSA Centre Val de Loire, jean-luc.hanus@insa-cvl.fr

Résumé — Nous nous intéressons à un problème d'identification de conditions aux limites à partir de mesures de champs partielles. Le problème inverse est résolu en utilisant une méthode du type régularisation évanescence. Elle consiste à rechercher parmi les solutions de l'opérateur de Lamé celle qui s'approche au mieux des mesures de champs partielles. Les performances et la robustesse de la méthode sont mises en évidence en utilisant d'une part des cas tests numériques et d'autre part deux essais de compression où les mesures de champs partielles sont obtenues par corrélation d'images numériques.

Mots clés — Identification ; problème inverse ; régularisation ; complétion de données, corrélations d'images numériques.

1 Contexte de l'étude

Les problèmes inverses interviennent dans de nombreux domaines de l'ingénierie, comme par exemple, en thermique ou en mécanique, et trouvent des applications dans le contrôle non destructif, en mécanique de la rupture ou dans le domaine médical. Les problèmes inverses se définissent par opposition aux problèmes directs. Ces derniers sont des problèmes où sont connues la géométrie du domaine, les équations d'équilibre, la loi de comportement, les conditions aux limites sur toute la frontière du domaine et, si nécessaire, les conditions initiales. Par opposition, un problème inverse est caractérisé par l'absence d'au moins une de ces informations. Ainsi, de nombreux problèmes, comme l'identification de frontières, de cavités ou de fissures, de paramètres matériau, de conditions aux limites inaccessibles à la mesure (complétion de données), ou de conditions initiales, sont alors considérés comme des problèmes inverses.

Au sens mathématique, les problèmes directs sont considérés comme des problèmes bien posés. C'est à dire, qu'ils ont une unique solution qui dépend continûment des données contrairement aux problèmes inverses qui sont généralement des problèmes mal posés au sens d'Hadamard, puisque l'existence, l'unicité ou la dépendance continue de leurs solutions par rapport aux données ne peuvent pas être garanties. De ce fait, la résolution des problèmes inverses ne peut donc se faire par les techniques usuelles utilisées pour résoudre les problèmes directs.

Parmi les problèmes de complétion de données qui se posent en mécanique, nous nous intéressons au problème d'identification de conditions aux limites à partir de mesures de champs partielles. Lorsque les mesures de champs sont compatibles, le problème admet une unique solution. Néanmoins, la solution obtenue est instable, c'est à dire qu'elle est sensible à de petites perturbations des données. C'est cette situation que l'on rencontre lors de l'analyse de résultats d'essais puisque malheureusement, à cause des limites de l'instrumentation, les données sont entachées d'un bruit de mesure.

Les problèmes de complétion de données ne peuvent donc être résolus de manière directe et de nombreuses méthodes ont été introduites pour les résoudre [1, 3, 5, 6, 8]. En particulier, la méthode de régularisation évanescence, introduite pour résoudre des problèmes inverses de type Cauchy [2, 3], repose sur l'idée de chercher parmi toutes les solutions d'un opérateur elliptique celle qui s'approche au mieux des quantités mesurées. La méthode est, en particulier, capable de débruiter les données.

Nous présentons la généralisation de la méthode de régularisation évanescence aux problèmes d'identification de conditions aux limites à partir de mesures de champs partielles.

2 Méthode d'identification à partir de mesures de champs partielles

2.1 Le problème modèle

Nous considérons un matériau élastique à comportement linéaire et isotrope. Le solide décrit le domaine Ω de \mathbb{R}^2 , borné par sa frontière Γ , voir Figure 1. On note Γ_d la partie sur laquelle des conditions aux limites sont éventuellement données et Γ_i la partie où aucune information n'est fournie, telles que $\Gamma_d \cup \Gamma_i = \Gamma$ et $\Gamma_d \cap \Gamma_i = \emptyset$. Nous définissons également le sous-domaine $\Omega_d \subset \Omega$, où le champ de déplacement est mesurable, par exemple en utilisant la corrélation d'images numériques.

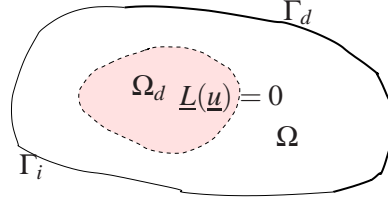


FIGURE 1 – Domaine

L'équation d'équilibre combinée à la loi de comportement élastique linéaire et isotrope amène à :

$$\underline{L}(\underline{u}) = 0 \quad \forall x \in \Omega \quad (1)$$

où \underline{L} désigne l'opérateur de Lamé. Nous supposons que le champ de déplacement \underline{u} est mesurable sur la partition Ω_d de Ω .

$$\underline{u} = \underline{\phi}_d \quad \forall x \in \Omega_d \quad (2)$$

L'équation de Lamé (1) et les quantités mesurées (2) conduisent à la formulation du problème de complétion de données :

$$\begin{cases} \underline{L}(\underline{u}) = 0 & \forall x \in \Omega \\ \underline{u} = \underline{\phi}_d & \forall x \in \Omega_d \end{cases} \quad (3)$$

Si les données (2) sont compatibles, le problème (3) admet une unique solution. Néanmoins, la solution obtenue est instable, c'est à dire qu'elle est sensible à de petites perturbations des données (2). C'est cette situation qui est rencontrée lors de l'analyse de résultats d'essais puisque malheureusement il est fort probable que les données soient entachées d'un bruit de mesure.

2.2 Régularisation du problème modèle par la méthode de régularisation évanescence

Le problème (3) ne peut pas être résolu par les méthodes réservées aux problèmes directs et nous faisons le choix d'utiliser une méthode de régularisation évanescence [2, 3] pour régulariser le problème. Soit $H(\Omega)$ l'espace des solutions de l'équation (1) :

$$H(\Omega) = \{ \underline{v} \in H^1(\Omega) \quad / \quad \underline{L}(\underline{v}) = 0 \text{ dans } \Omega \}$$

Une formulation équivalente du problème (3) est :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \underline{u} \in H(\Omega) \text{ tel que :} \\ \underline{u} = \underline{\phi}_d \text{ dans } \Omega_d \end{cases}$$

L'idée de chercher parmi toutes les solutions de l'équation (1) celle qui s'approche au mieux des données accessibles à la mesure sur Ω_d , amène à la formulation suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H(\Omega) \text{ tel que :} \\ J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in H(\Omega) \text{ avec} \\ J(v) = \|v|_{\Omega_d} - \phi_d\|_{\Omega_d}^2 \end{cases} \quad (4)$$

Le problème d'optimisation (4) permet de définir la solution du problème (3) en tant qu'élément proximal. Cependant, le problème (4) reste instable. En effet, nous pouvons trouver une solution $u \in H(\Omega)$ dont la restriction $u|_{\Omega_d}$ est aussi proche que l'on veut de ϕ_d , ce qui engendre une instabilité de la solution sur le reste du domaine $\Omega \setminus \Omega_d$. C'est la raison pour laquelle le problème d'optimisation est remplacé par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H(\Omega) \text{ tel que :} \\ J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in H(\Omega) \text{ avec} \\ J(v) = \|v|_{\Omega_d} - \phi_d\|_{\Omega_d}^2 + c\|v - \phi\|_{\Omega}^2 \end{array} \right. \quad (5)$$

où un terme de régularisation a été ajouté afin de rendre la solution stable, avec c un coefficient réel strictement positif et $\phi \in H(\Omega)$. Le problème d'optimisation (5) est désormais bien posé mais sa solution dépend continûment, non seulement des données ϕ_d , mais également du paramètre c et de ϕ .

Afin d'éviter ces dépendances, la solution du problème (5) est définie en tant que point fixe d'un opérateur de $H(\Omega)$ dans $H(\Omega)$ obtenu grâce à une suite de problèmes d'optimisation bien posés :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \underline{u}^{k+1} \in H(\Omega) \text{ tel que :} \\ J_c^k(\underline{u}^{k+1}) \leq J_c^k(\underline{v}) \quad \forall \underline{v} \in H(\Omega) \text{ avec} \\ J_c^k(\underline{v}) = \|\underline{v}|_{\Omega_d} - \underline{\phi}_d\|_{\Omega_d}^2 + c\|\underline{v} - \underline{u}^k\|_{\Omega}^2 \end{array} \right.$$

Les fonctionnelles sont composées de deux termes qui jouent différents rôles. Le premier est un terme de relaxation des données qui représente l'écart entre les mesures et la solution optimale calculée sur Ω_d , les données potentiellement entachées d'un bruit de mesure sont alors recalculées. Le second terme agit sur tout le domaine Ω , il s'agit d'un terme de régularisation qui contrôle la distance entre deux itérés successifs. Ce terme tend vers zéro au fur et à mesure des itérations et justifie le terme de régularisation évanescence. La solution obtenue à la fin du processus itératif ne dépend pas du coefficient de régularisation, vérifie l'équation de Lamé et est stable vis à vis du bruit sur les données puisque celles-ci sont recalculées afin d'être compatibles.

2.3 Reconstruction à partir de données synthétiques

Ici, nous présentons des résultats obtenus en utilisant la méthode des solutions fondamentales (MFS) [7] même si l'algorithme peut être implémenté en utilisant d'autres méthodes numériques (méthode des éléments finis, méthode des éléments de frontière,..).

Nous considérons le champ de déplacements $\underline{u}^{an} = (u_1^{an}, u_2^{an})$ qui correspond à un état de compression uniaxial :

$$\begin{aligned} u_1^{an}(x_1, x_2) &= \frac{\nu}{2G(1+\nu)} \sigma_0 x_1, & (x_1, x_2) \in \overline{\Omega}, \\ u_2^{an}(x_1, x_2) &= \frac{-1}{2G(1+\nu)} \sigma_0 x_2, & (x_1, x_2) \in \overline{\Omega}, \end{aligned} \quad (6)$$

où $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, $E = 1$ Pa, $\nu = 0.2$ et $\sigma_0 = 0.1 \times 10^{10}$ N.m⁻². Le domaine Ω borné par sa frontière Γ telle que $\Gamma = \Gamma_d \cup \Gamma_i$ et le sous-domaine $\Omega_d \in \Omega$ sont définis sur la Figure 2.

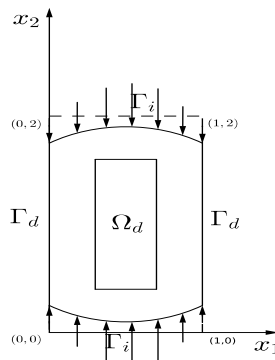


FIGURE 2 – Compression uniaxiale : domaine d'étude

Les Figures 2.3 (a) et (b) représentent les composantes horizontale u_1 et verticale u_2 du déplacement identifiées sur toute la frontière Γ et pour différents niveaux de bruit δ .

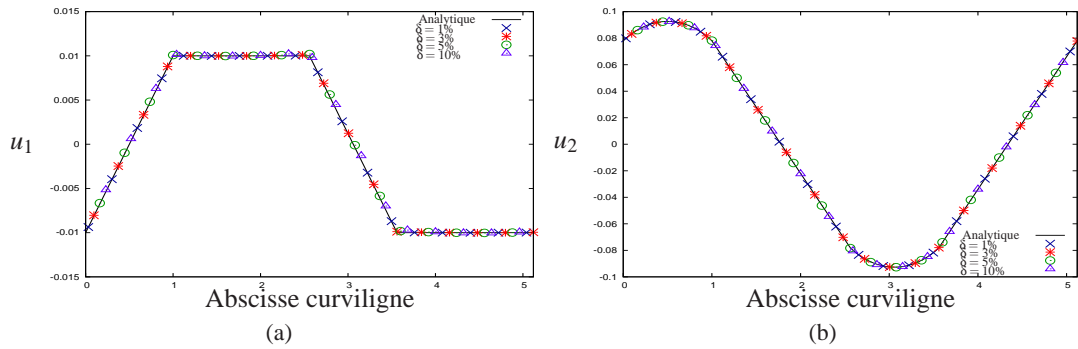


FIGURE 3 – (a) La solution analytique u_1^{an} et sa reconstruction numérique u_1 et (b) la solution analytique u_2^{an} et sa reconstruction numérique u_2 obtenues sur Γ , pour différents niveaux de bruit.

De la même manière, les Figures 2.3 (a) et (b) représentent respectivement les composantes horizontale p_1 et verticale p_2 du vecteur-contrainte obtenue sur toute la frontière Γ .

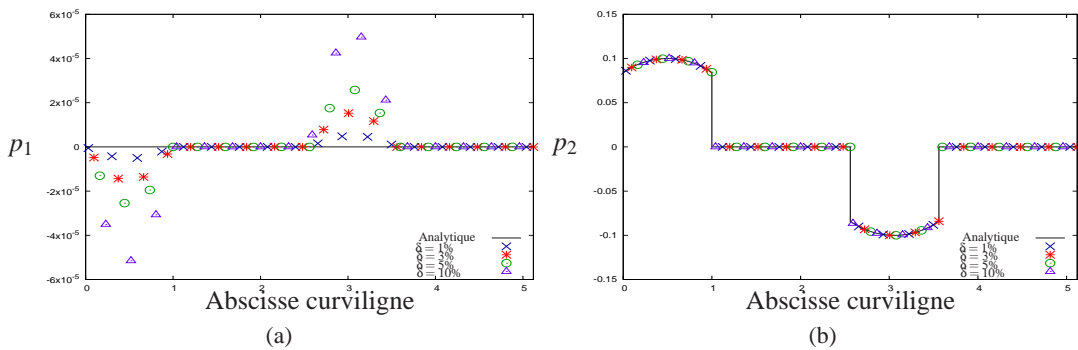


FIGURE 4 – (a) La solution analytique p_1^{an} et sa reconstruction numérique p_1 et (b) la solution analytique p_2^{an} et sa reconstruction numérique p_2 obtenues sur Γ , pour différents niveaux de bruit.

Cet exemple académique a permis d’illustrer l’efficacité de la méthode à reconstruire les conditions aux limites (déplacement et répartition d’efforts) à partir de données fortement bruitées.

3 Reconstructions à partir de données expérimentales : application à deux types d’essai de compression

Les limites de l’instrumentation engendrent deux difficultés concomitantes, les mesures ne se font que sur une partie de l’échantillon et ces mesures sont entachées d’un bruit, qui conduisent naturellement à définir un problème inverse de complétion de données. Nous utilisons la méthode présentée précédemment pour analyser des essais de compression diamétrale, présentant de faibles intensités de chargement, sur des matériaux à comportement linéaire, élastique et isotrope. Il s’agit de deux essais de compression sur des éprouvettes cylindriques en polyéthylène (Figure 5(a)) et en béton (Figure 5(b)). Ces dernières sont écrasées entre deux plateaux, le plateau supérieur se déplace de \underline{u}_0 tandis que le plateau inférieur est supposé fixe, voir Figure 5(c).

Dans ce type d’essai, la charge est appliquée suivant une génératrice du cylindre. Il est ainsi souvent utilisé pour déterminer la résistance en traction de matériaux quasi-fragiles et est alors nommé essai de fendage. Pour ce type de matériau, afin d’éviter l’écrasement de l’échantillon au droit de la charge, du aux contraintes de compression, des lamelles de contre-plaqué sont insérées entre le cylindre et les plateaux pour répartir la charge. De ce fait, ni l’étendue de la zone de contact, ni le type de répartition de la charge ne sont connus.

Le champ de déplacement est obtenu par corrélation d’images numériques (CIN) [4] sur une zone cen-

trale de la surface observée et nous exploitons également l'information de bord libre (Γ_d) hors des zones de contact (Γ_i), voir Figure 5(c). Nous identifions les conditions aux limites inaccessibles à la mesure ainsi que le champ de déplacements (solution) sur toute la surface du solide.

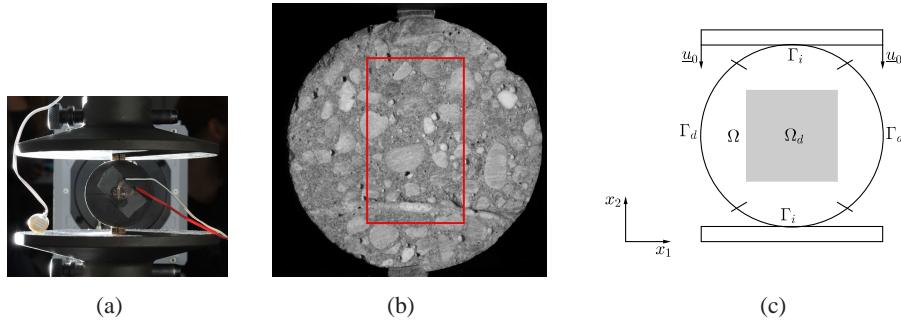


FIGURE 5 – (a) Cylindre de polyéthylène compressé, (b) éprouvette de béton et zone d'intérêt utilisée pour la CIN (rouge) et (c) modélisation des essais de compression.

Des études bidimensionnelles, en faisant l'hypothèse de déformations planes (resp. contraintes planes) pour le polyéthylène (resp. pour le béton), sont justifiées par l'importante (resp. la faible) épaisseur du cylindre. Il convient de préciser que nous résolvons initialement un problème adimensionnel ($E = 1$ MPa) et que nous identifions a posteriori le module d'Young du matériau.

3.1 Compression d'un cylindre de polyéthylène entre deux plans

Dans un premier temps, un cylindre de polyéthylène haute densité est caractérisé par son module d'Young $E = 850$ MPa, son coefficient de Poisson $\nu = 0.46$, son rayon $R = 123.1$ mm et son épaisseur $e = 2 \times R$.

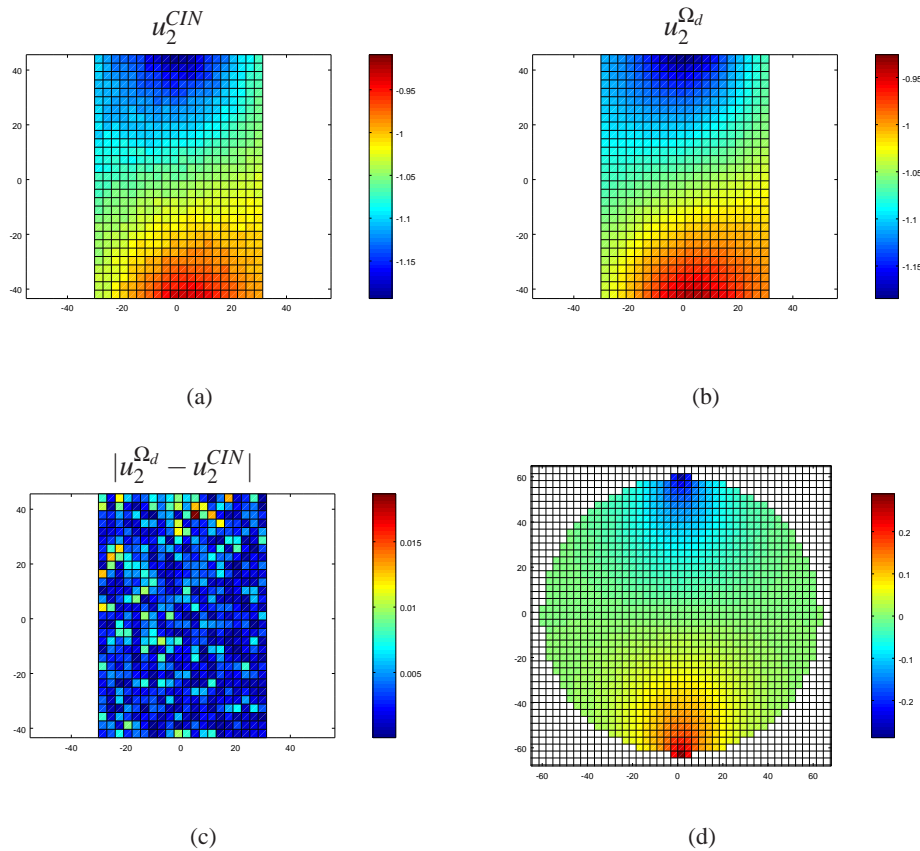


FIGURE 6 – (a) Le déplacement vertical mesuré u_2^{CIN} , (b) sa reconstruction $u_2^{\Omega_d}$, (c) le résidu $|u_2^{\Omega_d} - u_2^{CIN}|$ sur Ω_d et (d) la partition déformable du champ de déplacement $u_2^{def^{\Omega}}$ sur Ω .

Nous présentons des résultats obtenus à partir de mesures, issues de CIN (Icasoft [9]), entre les images 500 et 2000, ce qui correspond à une force d'intensité 15120 N sur le plateau supérieur. Les Figures 6 (a), (b) et (c) donnent respectivement le déplacement vertical mesuré u_2^{CIN} , sa reconstruction $u_2^{\Omega_d}$ et le résidu calculé $|u_2^{\Omega_d} - u_2^{CIN}|$ sur Ω_d . Nous sommes capables de retrouver a posteriori la partie déformable du champ de déplacement $u_2^{def\Omega}$ sur Ω , voir Figure 6 (d). Les résultats pour la composante horizontale du champ de déplacements u_1 ne sont pas présentés car ils sont similaires à ceux pour la composante verticale.

Nous remarquons la précision de la reconstruction sur Ω_d et la capacité de la méthode à débruiter les mesures. Le niveau de bruit pour la composante verticale est estimé à 10%.

Les Figures 7 (a) et (b) représentent respectivement les composantes verticales du déplacement u_2 et du vecteur-contrainte p_2 identifiées sur toute la frontière Γ . Les conditions aux limites identifiées sont précises et permettent de connaître a posteriori l'étendue et la répartition de contraintes sur la zone de contact supérieure (une partie de Γ_i). En reliant la distribution de pression identifiée à la force appliquée sur le plateau supérieur, nous identifions un module d'Young de $E = 837$ MPa.

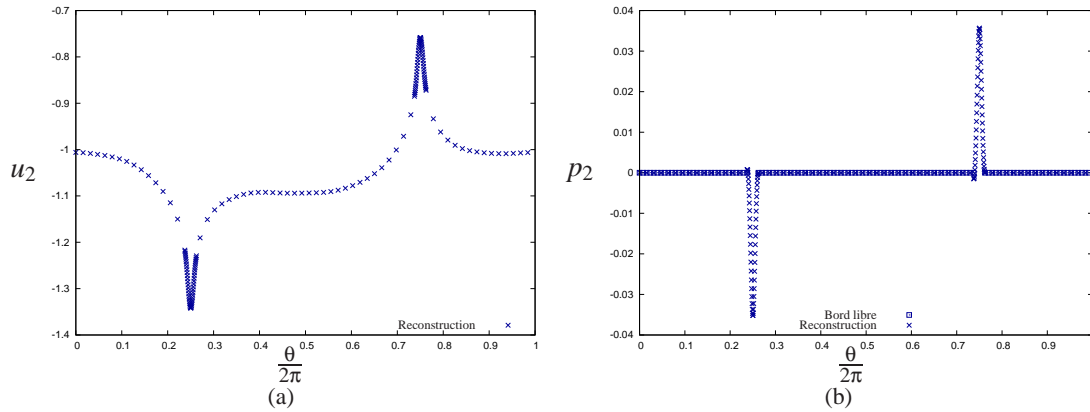


FIGURE 7 – (a) Reconstructions sur le bord Γ de la composante verticale u_2 (a) du champ de déplacements et de la composante verticale p_2 (b) du vecteur-contrainte.

La discrétisation par la méthode des solutions fondamentales nous permet aussi de calculer a posteriori, de manière analytique, le champ de déformations dans tout le domaine. Les composantes du tenseur des déformations, ϵ_{11} , ϵ_{22} et ϵ_{12} , sont représentées sur les Figures 8 (a), (b) et (c), respectivement.

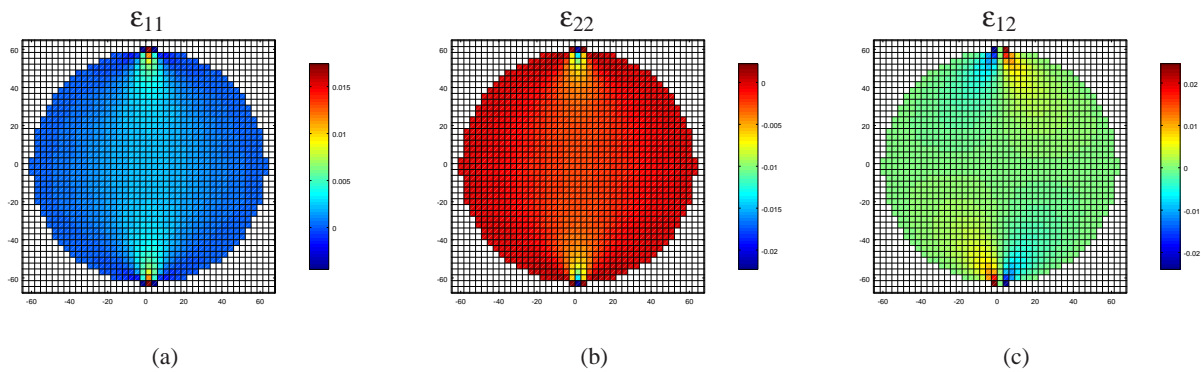


FIGURE 8 – (a) ϵ_{11} , (b) ϵ_{22} et (c) ϵ_{12} , composantes du champ de déformations sur Ω .

3.2 Essai de fendage sur matériau quasi-fragile

Nous nous intéressons désormais à un essai Brésilien afin d'appliquer la méthode inverse à des mesures de champs de déplacements de très faible intensité.

Comme précédemment, nous présentons des résultats obtenus à partir de mesures issues de CIN.

Cette dernière est effectuée dans une zone d'intérêt centrale à l'éprouvette, voir Figure 5(b) et entre les images 1 et 4953, ce qui correspond à une force d'intensité 2870 N sur la plaque supérieure.

Les Figures 9 (a), (b), (c) et (d) donnent respectivement le déplacement horizontal mesuré u_1^{CIN} , sa reconstruction $u_1^{\Omega_d}$, le résidu calculé $|u_1^{\Omega_d} - u_1^{CIN}|$ et le déplacement dû au caractère déformable de la structure $u_1^{def\Omega_d}$ sur Ω_d . La composante verticale du champ de déplacement u_2 n'est pas présentée car les résultats obtenus sont similaires à ceux pour la composante horizontale.

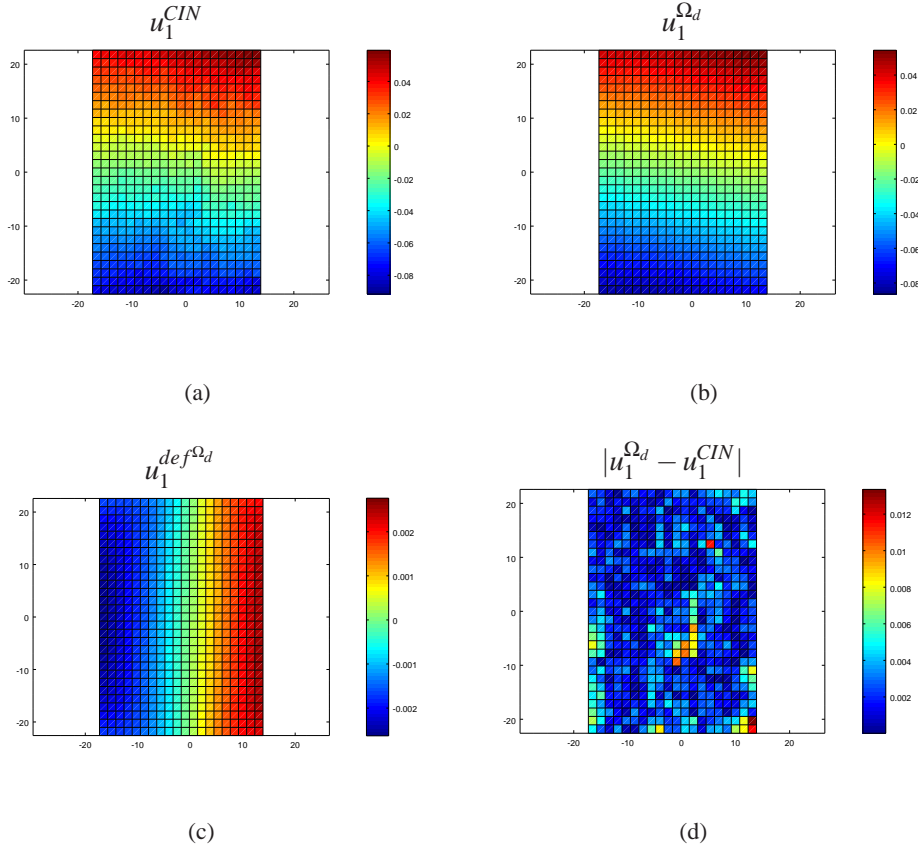


FIGURE 9 – (a) Le déplacement horizontal mesuré u_1^{CIN} , (b) sa reconstruction $u_1^{\Omega_d}$, (c) la partition déformable du champ de déplacement $u_1^{def\Omega_d}$ et (d) le résidu $|u_1^{\Omega_d} - u_1^{CIN}|$, sur Ω_d .

Nous observons un très petit déplacement horizontal mesuré u_1^{CIN} et une reconstruction précise $u_1^{\Omega_d}$, voir Figures 9 (a) et (b). Nous remarquons que le déplacement associé à la déformation de l'échantillon $u_1^{def\Omega_d}$, calculé a posteriori, ne représente qu'environ 14% du déplacement mesuré, ce qui traduit un déplacement de solide rigide prépondérant, voir Figure 9 (c). Le déplacement mesuré comporte également une composante de bruit, qui est représentée entre autres par le résidu $|u_1^{\Omega_d} - u_1^{CIN}|$. Des valeurs plus élevées sont observées au centre de la zone d'intérêt Ω_d , voir Figure 9 (d). En observant la Figure 10(a), qui représente l'éprouvette à l'instant de fissuration (image 4954), nous constatons que la fissure coïncide avec l'endroit où le résidu est prépondérant, ce qui peut s'interpréter comme un écart à l'élasticité. En effet, en superposant sur une même figure, l'éprouvette, la fissure et la cartographie du résidu, la composante du résidu $|u_1^{\Omega_d} - u_1^{CIN}|$ correspond au contournement d'un grain par la fissure, voir Figure 10 (b).

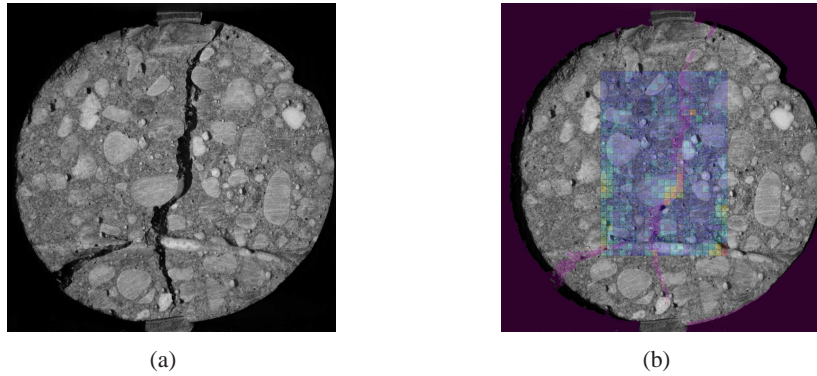


FIGURE 10 – (a) Éprouvette fissurée (image 4954) et (b) superposition de l'éprouvette, de la fissure et de la cartographie du résidu $|u_1^{\Omega_d} - u_1^{CIN}|$.

4 Conclusion

L'objectif principal de cette étude est de présenter une généralisation de la méthode de régularisation évanescence pour la résolution de problèmes de complétion de données à partir de mesures de champs partielles. La méthode ramène la résolution du problème inverse à une suite de problèmes d'optimisation sous contraintes. Le premier terme des fonctionnelles est un terme de relaxation qui représente l'écart entre les données et la solution optimale calculée. Le second terme agit sur tout le domaine et exprime la distance entre deux solutions optimales. Ce terme de régularisation tend vers zéro au fur et à mesure des itérations. Nous avons appliqué la méthode pour une situation avec des données synthétiques et analysé deux essais mécaniques où nous obtenons la reconstruction du champ de déplacements et identifions les conditions aux limites inaccessibles à la mesure. L'analyse d'un essai Brésilien a montré la capacité de la méthode à détecter l'apparition d'une non linéarité, telle que l'apparition d'une fissure. L'application de la méthode à des situations expérimentales souligne la précision et la stabilité de la méthode proposée ainsi que sa capacité à débruiter des mesures. Il est aussi important de souligner que la méthode a un formalisme général et qu'elle est aussi applicable pour d'autres problèmes régis par un opérateur elliptique et peut être implémentée en utilisant différentes méthodes numériques.

5 Remerciements

Les régions Centre (projet IMFRA2) et Normandie (financement de la thèse de Laëticia Caillé) sont remerciées pour leur soutien financier respectif.

Références

- [1] S. Andrieux, T.N. Baranger, A.B. Abda. *Solving Cauchy problems by minimizing an energy-like functional*, Inverse Problems, 115, 2006.
- [2] A. Cimetière, F. Delvare, M. Jaoua, F. Pons. *Solution of the Cauchy problem using iterated Tikhonov regularization*, Inverse Problems, 553-570, 2001.
- [3] A. Cimetière, F. Delvare, F. Pons. *Une méthode inverse à régularisation évanescence*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IIB-Mechanics, 639-644, 2000.
- [4] F. Hild, S. Roux. *Digital Image Correlation : from displacement measurement to identification of elastic properties—a review*, Strain, 69–80, 2006.
- [5] V.A. Kozlov, V.G. Maz'ya, A.V. Fomin. *An iterative method for solving the Cauchy problem for elliptic equation*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, 45-52, 1922.
- [6] R. Lattès, J.L. Lions. *Méthode de quasi-réversibilité et applications*, Dunod, 1967.
- [7] L. Marin, D. Lesnic. *The method of fundamental solutions for the Cauchy problem in two-dimensional linear elasticity*, International Journal of Solids and Structures, 3425–3438, 2004.
- [8] A.N.Tikhonov, V.Y. Arsenin. *Solution of ill-posed problems*, John Wiley and Sons, 1977.
- [9] S. Touchal, F. Morestin, M. Brunet. *Mesure de champs de déplacements et de déformations par corrélation d'images numériques*, Actes du Colloque National Mécamat'96, 179–182, Aussois, 1996.