

Améliorations de la précision de la méthode θ pour le calcul des facteurs d'intensité des contraintes en 3D

M. Le Cren¹, N. Moës², P. Massin¹, A. Martin¹

¹ IMSIA, UMR EDF-CNRS-CEA-ENSTA 9219, matthieu.le-cren@edf.fr, patrick.massin@ensta-paristech.fr, alexandre-externe.martin@edf.fr

² LUNAM Université, GEM, UMR CNRS 6183, Ecole Centrale de Nantes, nicolas.moes@ec-nantes.fr

Résumé — La θ méthode permettant d'évaluer le taux de restitution d'énergie G est fondée sur le calcul de la dérivée de l'énergie potentielle par rapport à l'avancée de fissure. La méthode permet d'obtenir de très bons résultats dans le cas 2D mais ne permet pas d'atteindre une précision raisonnable sur des calculs en volume, même lorsque le cas 3D est une simple extrusion du cas 2D. Dans ce travail, nous tentons d'analyser les écarts observés dans le cas d'extrusion et d'apporter des améliorations afin de les réduire.

Mots clefs —taux de restitution d'énergie, θ méthode

1 Introduction

La méthode des éléments finis étendue (X-FEM) [1] couplée avec une représentation de la fissure par des fonctions de niveau s'est révélée intéressante pour simuler la propagation de fissures. L'avantage principal de la combinaison de ces deux outils est la possibilité d'introduire la fissure indépendamment du maillage. La fissure est représentée par deux fonctions de niveau orthogonales entre elles et il suffit d'actualiser ces fonctions pour simuler la propagation de fissure. Pour représenter correctement l'avancée et le trajet de la fissure, il est donc important d'évaluer correctement les quantités d'intérêt que sont le taux de restitution d'énergie ou les facteurs d'intensité de contrainte. Pour le calcul numérique du taux de restitution d'énergie, les techniques les plus utilisées consistent à mettre l'expression du taux de restitution d'énergie G sous la forme d'une intégrale de contour ou de domaine plus facile à évaluer dans le cadre d'une méthode numérique. On retrouve principalement deux méthodes : l'intégrale de Rice [2], intégrale de contour, qui est la plus ancienne expression de G , et la méthode θ [3] qui s'exprime sous la forme d'une intégrale de domaine. Pour l'évaluation numérique des facteurs d'intensité de contrainte, la méthode d'extrapolation des déplacements [4] [5] [6] rencontre beaucoup de succès par sa simplicité de mise en œuvre : elle est cependant moins précise que les méthodes énergétiques [4] [5].

2 Méthode θ

On considère un solide élastique fissuré occupant le domaine Ω de l'espace \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 . Soit :

- \mathbf{u} le champ de déplacement,
- T le champ de température,
- Γ_0 désigne la position du fond de fissure,
- \mathbf{f} le champ de forces volumiques appliquées sur Ω ,
- \mathbf{F} le champ de forces surfaciques appliquées sur $\Gamma_F \in \partial\Omega$,
- \mathbf{U} le champ de déplacements imposés sur $\Gamma_u \in \partial\Omega$.

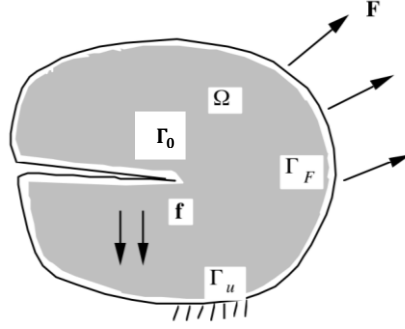


Figure 1 : solide élastique fissuré.

Par définition [7] le taux de restitution d'énergie est défini comme étant l'opposé de la dérivée de l'énergie potentielle par rapport à la longueur de la fissure.

$$\mathcal{G} = -\frac{\partial W}{\partial \Gamma_0}$$

Ce taux de restitution peut être calculé par la méthode θ proposée par Destuynder *et al.* [3] qui est fondée sur la dérivation lagrangienne de l'énergie potentielle. On introduit des transformations géométriques fictives $F^\eta : M \rightarrow M + \eta\theta(M)$ de tous les points M du domaine de référence Ω en un domaine Ω^η modélisant des propagations de la fissure, où η est un temps fictif ($\eta = 0$ correspond à la configuration de référence) et $\theta(M)$ est une vitesse initiale de transformation (pour l'extension virtuelle de la fissure Γ_0). Ces transformations doivent modifier la position du fond de fissure Γ_0 sans modifier le contour extérieur du solide fissuré. Les champs θ doivent donc être tangents à $\partial\Omega$, c'est-à-dire en notant \mathbf{n} la normale à $\partial\Omega$, on a $\theta \in \Theta = \{\boldsymbol{\mu} \text{ tels que } \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$.

D'après [8], le taux de restitution d'énergie locale $G(s)$ est solution de l'équation suivante :

$$\int_{\Gamma_0} G(s)\boldsymbol{\theta}(s) \cdot \mathbf{m}(s) ds = \mathcal{G}(\boldsymbol{\theta}), \forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta,$$

où \mathbf{m} est la normale unitaire à Γ_0 située dans le plan de la fissure, où s est l'abscisse curviligne de Γ_0 permettant de discrétiser le fond de fissure en 3D et où $\mathcal{G}(\boldsymbol{\theta})$ sous sa forme la plus générale vaut :

$$\begin{aligned} -\mathcal{G}(\boldsymbol{\theta}) = & \int_{\Omega} \Psi \operatorname{div}(\boldsymbol{\theta}) - \boldsymbol{\sigma} : (\nabla \mathbf{u} \nabla \boldsymbol{\theta}) dV + \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\theta}) \mathbf{u} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \operatorname{div} \boldsymbol{\theta} dV + \int_{\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{T}} (\nabla \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\theta}) dV \\ & - \int_{\Gamma_F} \mathbf{F}^T (\nabla \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\theta}) ds + \int_{\Gamma_u} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \cdot (\nabla \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\theta}) ds \end{aligned}$$

Le premier terme de l'intégrale ci-dessus, fait intervenir $\boldsymbol{\sigma}$, qui est singulier au voisinage du fond de fissure. Il est donc intéressant de définir des champs $\boldsymbol{\theta}$ permettant d'éviter le calcul d'intégrales dans ce voisinage. Cela revient à demander l'annulation de $\nabla \boldsymbol{\theta}$ dans ce voisinage.

Un procédé simple consiste à définir $\|\boldsymbol{\theta}\|$ tel que :

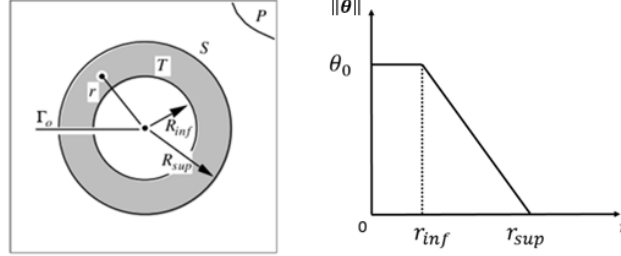
$$\begin{cases} \|\boldsymbol{\theta}\| = \theta_0 & , 0 \leq r \leq R_{inf} \\ \|\boldsymbol{\theta}\| = \frac{R_{sup}-r}{R_{sup}-r_{int}} \theta_0 & , R_{inf} \leq r \leq R_{sup} \\ \|\boldsymbol{\theta}\| = 0 & , R_{sup} \leq r \end{cases}$$


Figure 2 : à gauche, la couronne d'intégration de la méthode $\boldsymbol{\theta}$ permettant de s'affranchir d'un calcul par intégrale au voisinage du fond de fissure, où r est la distance au fond de fissure Γ_0 . À droite, les valeurs de la norme de $\boldsymbol{\theta}$ en fonction de la distance au fond de fissure.

Dans la suite de cette présentation, on considère des transformations isothermes ($T = T_0$), et des forces volumiques nulles $\mathbf{f} = \mathbf{0}$. Compte tenu des conditions limites, les termes de bords sont nuls et on a directement que :

$$-\mathcal{G}(\boldsymbol{\theta}) = \int_{\Omega} \Psi \operatorname{div}(\boldsymbol{\theta}) - \boldsymbol{\sigma} : (\nabla \mathbf{u} \nabla \boldsymbol{\theta}) \, dV \quad (\text{Eq.1})$$

2.1 Discrétisation du fond de fissure en 3D

Le champ scalaire $G(s)$ peut-être discrétisé sur une base que nous noterons $(\gamma_j(s))_{1 \leq j \leq N}$.

Soient G_j les composantes de $G(s)$ dans cette base :

$$G(s) = \sum_{j=1}^N G_j \gamma_j(s)$$

On choisit une base de fonctions tests pour le champ $\boldsymbol{\theta}$ tel que : $\boldsymbol{\Theta} = \{\boldsymbol{\theta}_i \text{ tels que } \boldsymbol{\theta}_i \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$. Les G_j vérifient alors :

$$\int_{\Gamma_0} \left(\sum_{j=1}^N G_j \gamma_j(s) \right) \boldsymbol{\theta}^i(s) \cdot \mathbf{m}(s) \, ds = \mathcal{G}(\boldsymbol{\theta}^i) , \forall i \in [1, P]$$

Les G_j peuvent donc être déterminés en résolvant le système linéaire à P équations et N inconnues :

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} G_j = b_i , i = 1, P \text{ avec : } \begin{cases} a_{ij} = \int_{\Gamma_0} \gamma_j(s) \boldsymbol{\theta}^i(s) \cdot \mathbf{m}(s) \, ds \\ b_i = \mathcal{G}(\boldsymbol{\theta}^i) \end{cases}$$

Ce système a une solution si on choisit P champs θ^i indépendants tels que : $P \geq N$.

Comme base, on utilise la famille de polynôme de Legendre $\gamma_j(s)$ de degré j normée où $\gamma_j(s) = \sqrt{\frac{2j+1}{l}} P_j\left(\frac{2s}{l} - 1\right)$ avec l la longueur du fond de fissure et P_j le polynôme de Legendre de degré j .

2.2 Test d'une fissure débouchante en mode I pur

On présente un test de fissure en mode I pur afin d'étudier les résultats obtenus par la méthode θ .

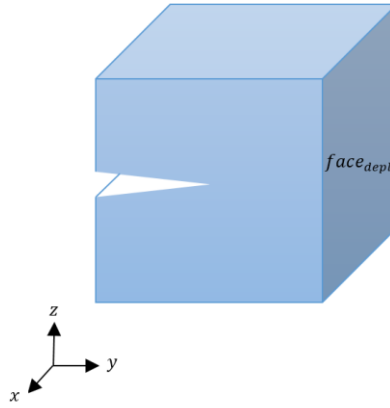


Figure 3 : fissure droite débouchante.

Dans cette étude, on pose $E = 10^5 Pa$, $\nu = 0$ et $K_I = 1 Pa \cdot \sqrt{m}$.

Pour les conditions limites, on impose une condition de Dirichlet sur $face_{depl}$ à l'aide de la solution analytique en déplacement du mode I pur.

$$\mathbf{u} = K_I U_1^I \mathbf{e}^y + K_I U_2^I \mathbf{e}^z \text{ avec : } \begin{cases} U_1^I = \frac{(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) (3 - 4\nu - \cos(\theta)) \\ U_2^I = \frac{(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) (3 - 4\nu - \cos(\theta)) \end{cases}$$

où $\{U_1^I, U_2^I\}$ représentent les composantes du champ de déplacement pour le 1^{er} mode de fissuration, définies dans le repère local ($\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3$) en coordonnées cylindriques (r, θ, z) [9].

Pour toutes les autres faces du cube, une condition de Neumann est appliquée $\mathbf{F} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ ou \mathbf{n} est la normale sortante à la face et $\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur des contraintes du mode 1. La forme du tenseur des contraintes dans le repère ($\mathbf{e}^x, \mathbf{e}^y, \mathbf{e}^z$) est :

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{11} \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + \sigma_{22} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z + \sigma_{12} (\mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_y) : \begin{cases} \sigma_{11} = \sqrt{\frac{1}{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) \\ \sigma_{12} = \sqrt{\frac{1}{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_{22} = \sqrt{\frac{1}{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) \end{cases}$$

Une étude de convergence sur le déplacement et sur l'énergie montre que le modèle est correct et que l'on retrouve les ordres théoriques de convergence pour des éléments X-FEM linéaires avec un enrichissement géométrique, c'est-à-dire 1 en énergie et 2 en déplacement [10].

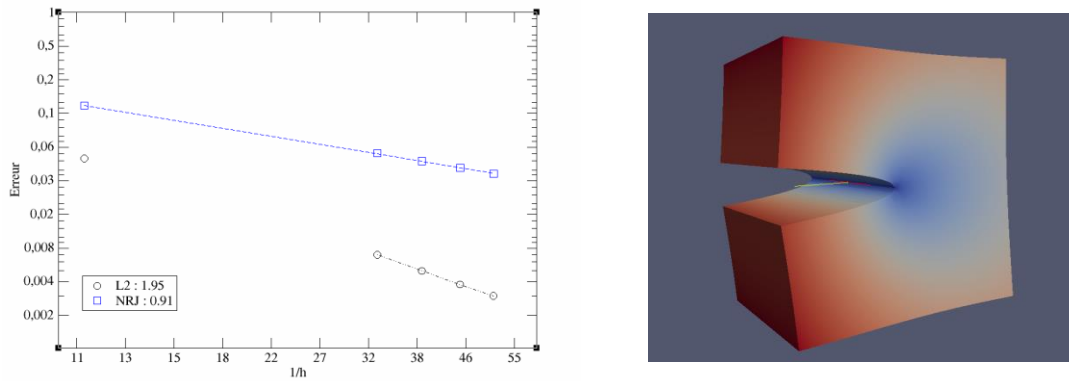


Figure 4 : à gauche, ordre de convergence sur le déplacement et sur l'énergie pour des éléments X-FEM ; à droite, le champ de déplacement pour une ouverture en mode 1 pur.

2.3 Calcul du taux de restitution d'énergie par la méthode θ

On estime le taux de restitution d'énergie en utilisant la méthode θ mise en œuvre dans le logiciel libre de calcul des structures Code_Aster [11]. Dans ce test, le cas 3D est obtenu par extrusion du cas 2D. Comme $\nu = 0$, l'hypothèse des déformations planes est identique à celle des contraintes planes et les mêmes résultats sont attendus pour la solution 2D et la solution 3D. L'erreur prise pour l'étude de convergence sur G est $e = \frac{\|G^{calc} - G^{ana}\|_{\infty}}{\|G^{ana}\|_{\infty}}$ où $G^{ana} = \frac{1}{E} K_I^2 = 10^{-5} J/m^2$.

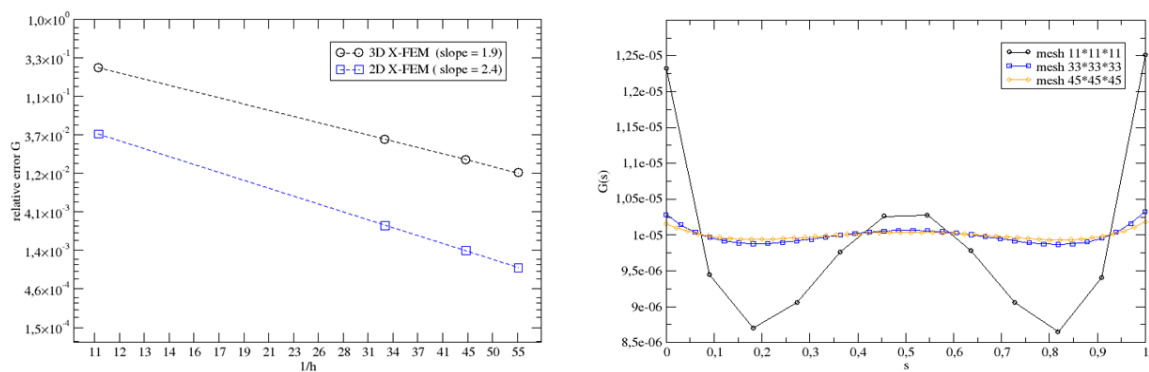


Figure 5 : à gauche, les courbes de convergence de G en 2D et en 3D obtenues par la méthode θ (X-FEM) ; à droite, la courbe de G en fonction de l'abscisse curviligne s pour différents raffinements de maillage.

On observe sur la figure 5 que le niveau d'erreur est considérablement amplifié dans le cas 3D. En revanche, les ordres de convergence correspondent à ceux donnés par la théorie pour des éléments X-FEM [10]. En revanche, figure 5, on observe des oscillations importantes de G le long du fond de fissure, alors que dans le cas d'une fissure droite, un G uniforme est attendu tout le long de ce dernier.

Pour éliminer les éventuelles erreurs d'intégration dues à l'utilisation d'éléments X-FEM sur les champs de déplacements et de contraintes, l'étude a été réalisée avec des éléments FEM. On aboutit à des résultats similaires, à savoir une différence importante sur le niveau d'erreur sur G entre le cas 2D et le cas 3D et des oscillations de G le long du fond de fissure.

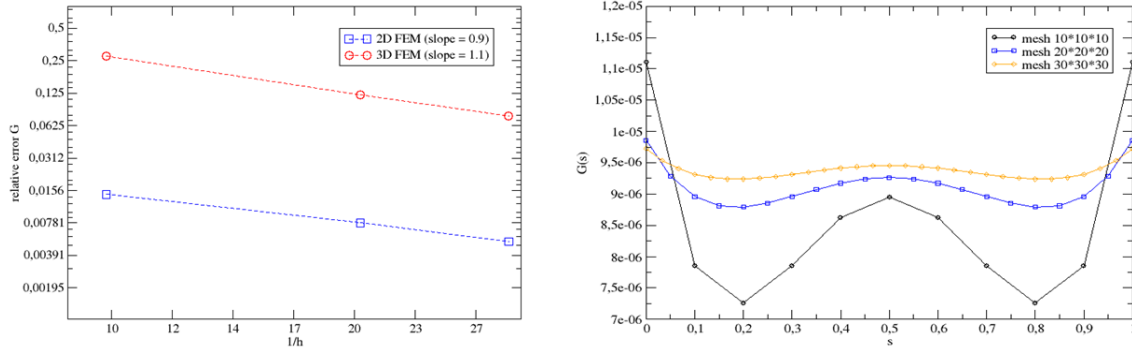


Figure 6 : à gauche, les courbes de convergence de G en 2D et en 3D obtenues par la méthode θ (FEM) ; à droite, la courbe de G en fonction de l'abscisse curviligne s pour différents raffinements de maillage.

Les résultats des figures 5 et 6 sont obtenus pour une discrétisation de G par les cinq premiers polynômes de Legendre $G(s) = \sum_{j=0}^5 G_j \gamma_j(s)$. En observant les coefficients de $G(s)$ dans cette base, au niveau du tableau 1, on remarque que pour le degré 2 et le degré 4, une contribution non négligeable est apportée à la solution. Ce résultat est en contradiction avec le fait que pour une fissure droite, seule la contribution du polynôme de degré 0 doit être non nulle et doit permettre de représenter un G uniforme le long du fond de fissure.

| | |
|---------|-------------------|
| Degré 0 | $8.23 * 10^{-6}$ |
| Degré 1 | $1.09 * 10^{-20}$ |
| Degré 2 | $1.84 * 10^{-7}$ |
| Degré 3 | $1.25 * 10^{-21}$ |
| Degré 4 | $8.18 * 10^{-7}$ |
| Degré 5 | $1.4 * 10^{-20}$ |

Tableau 1 : coefficients de $G(s)$ dans la base des polynômes de Legendre.

Pour identifier les problèmes rencontrés, on s'intéresse au calcul du champ θ qui s'exprime en fonction des polynômes de Legendre et de la norme θ_0 :

$$\theta^i(\mathbf{x}) = \gamma_i(s(\mathbf{x}))\theta_0(r(\mathbf{x}))t(\mathbf{x}) \quad s \in \Gamma_0, i \in \llbracket 1,5 \rrbracket$$

avec γ_i le polynôme de degré i et t la direction de propagation.

Pour garantir la continuité du champ θ^i , on interpole ce champ aux points de Gauss. Dans la mise en œuvre initiale, l'interpolation est faite sur toutes les variables de ce champ : $I(\theta^i) = I(\gamma_i \theta_0 t)$. Néanmoins, on remarque que l'équation 1 fait intervenir $\nabla \theta$ et donc θ_0' , qui est discontinue à travers le domaine de la figure 2. On constate donc que seule l'interpolation sur θ_0 est nécessaire pour retrouver les propriétés liées à la continuité. Cette analyse est proposée dans [12], où on remarque que l'interpolation n'est appliquée que sur la fonction de r , donc sur θ_0 .

On propose alors de modifier l'interpolation du champ θ^i pour interpoler uniquement θ_0 :

$$I(\theta^i) = I(\theta_0) \gamma_i t$$

Suite à cette modification, on compare les résultats de la figure 7 obtenus en FEM entre les deux interpolations. On constate une nette amélioration du taux de restitution d'énergie, avec un G uniforme le long du fond de fissure en concordance avec les valeurs analytiques du test présenté ici. En revanche, même si le niveau d'erreur a diminué, il n'atteint pas encore celui du cas 2D.

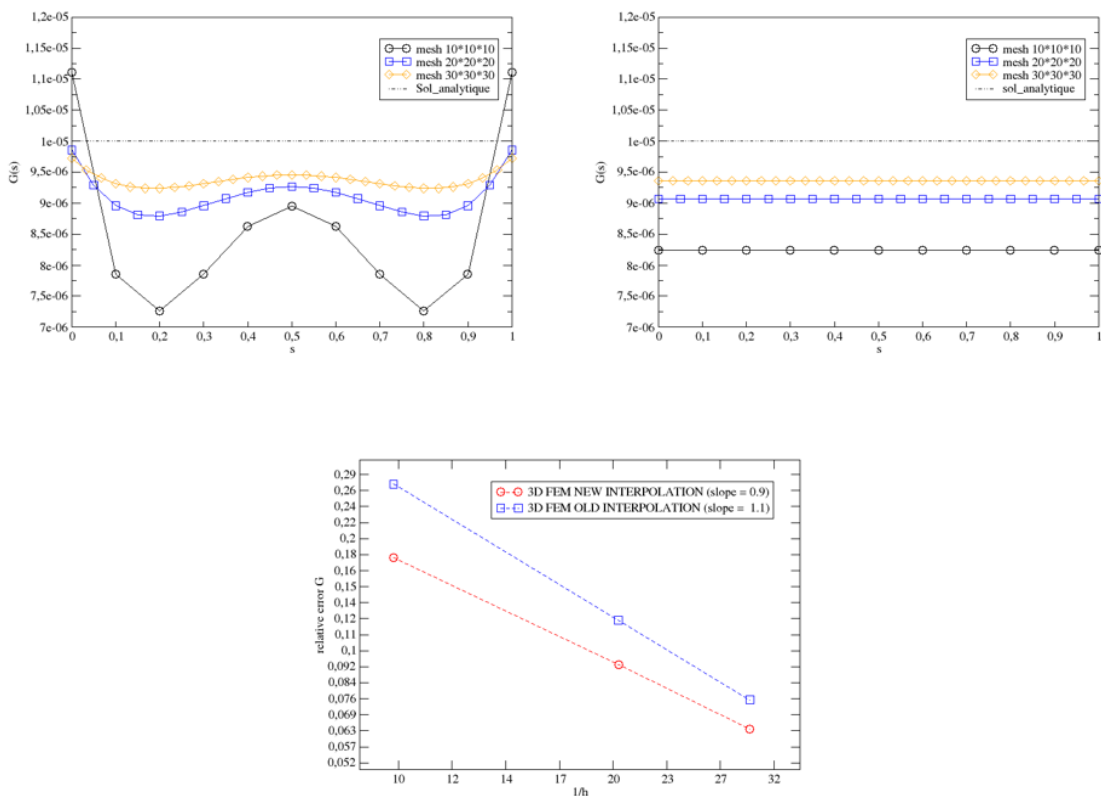


Figure 7 : en haut à gauche, variations de G le long du fond de fissure pour l'interpolation globale initiale ; en haut à droite, variations de G le long du fond de fissure suite à la modification de l'interpolation du champ θ . En bas, comparaison entre les convergences obtenues pour les deux interpolations.

3 Conclusions et perspectives

L'interpolation proposée dans le cas 3D montre une nette amélioration du résultat sur les valeurs de G . En revanche, on n'atteint toujours pas la précision du cas 2D, ce qui montre que des problèmes

persistent dans le cas tridimensionnel. On propose dans la suite de ces travaux d'étudier le cas X-FEM, afin de comparer les résultats entre les méthodes suite à la modification de l'interpolation du champ θ .

Références bibliographiques

- [1] N. Moes, J. Dolbow et T. Belytschko, «A finite element method for crack growth without remeshing,» *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, pp. 135-150, 1999.
- [2] J. Rice, «A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks,» *Journal of applied mechanics*, pp. 379-386, 1968.
- [3] P. Destuynder, M. Djaoua et S. Lescure, «Quelques remarques sur la mécanique de la rupture élastique,» *J. Méc. Théor. Appl*, vol. 2, pp. 113-135, 1983.
- [4] W. X. Zhu et D. J. Smith, «On the use of displacement extrapolation to obtain crack tip singular stresses and stress intensity factors,» *Engineering fracture mechanics*, vol. 51, pp. 391-400, 1995.
- [5] L. Banks-Sills, «Update - Application of the finite element method to linear elastic fracture mechanics,» *Applied Mechanics Reviews*, vol. 63, 2010.
- [6] P. C. Paris et G. C. Sih, «Stress analysis of cracks,» *In fracture toughness testing and its applications*, pp. 30-83, 1965.
- [7] H. D. Bui, *Mécanique de la rupture fragile*, Masson, 1977.
- [8] P. Mialon, «Calcul de la dérivée d'une grandeur par rapport à un fond de fissure par la méthode théta,» 1988.
- [9] G. R. Irwin, «Analysis of stresses and strains near the end of crack traversing a plate,» *Journal of applied mechanics*, 1957.
- [10] E. Bechet, H. Minnebo, N. Moes et B. Burgardt, «Improved implementation and robustness study of the X-FEM for stress analysis around cracks,» *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 64, pp. 1033-1056, 2005.
- [11] EDF, «<https://www.code-aster.org>,» [En ligne].
- [12] H. Ozer, C. Duarte et I. Al-Qadi, «Formulation and implementation of a high-order 3D domain integral method for the extraction of energy release rates,» *Computational mechanics*, vol. 49, pp. 459-476, 2012.