

Optimisation de forme et matériaux architecturés: du design à l'intégration

A. Faure¹, G. Michailidis¹, R. Estevez¹

¹ Laboratoire SIMaP, Université Grenoble-Alpes, {alexis.faure, rafael.estevez, georgios.michailidis}@simap.grenoble-inp.fr

Résumé — Dans cette étude on traite de l'intérêt des matériaux architecturés à travers une étude d'optimisation de forme à deux échelles : de la microstructure à la structure. On commence par présenter l'optimisation de l'architecture des matériaux, cela dans le but d'obtenir un comportement effectif cible. Ensuite est abordé le problème de l'intégration de ces matériaux au sein de structures macroscopiques, par le biais de divers exemples d'optimisation de structures soumises à des sollicitations thermoélastiques. On discutera au cas par cas l'intérêt des matériaux architecturés pour une application donnée.

Mots clés — optimisation de forme, lignes de niveaux, fabrication additive, matériaux architecturés

1 Introduction

Les matériaux architecturés constituent une classe de matériaux composites (ou hybrides) aux propriétés très prometteuses. Comme le décrivent Ashby et Brechet [6], cette famille de matériaux a le potentiel pour "remplir les vides" dans l'espace des propriétés matériaux. Par exemple, avoir des combinaisons de propriétés antagonistes inatteignables avec les matériaux monolithiques connus (voir Figure 1). Ils présentent d'autres avantages notables, comme la multi-fonctionnalité ou encore le fait qu'ils puissent avoir des propriétés physiques qui approchent des limites théoriques (par exemple des composites qui approchent les bornes de Gibinasky-Torquato [12]). On trouve dans la littérature de nombreux exemples de matériaux architecturés développant des comportements extrêmes, Andreassen et al. [7] proposent ainsi des matériaux auxétiques (coefficient de Poisson négatif). Sigmund et Torquato [14] proposent des composites aux coefficients de dilatation thermiques nul ou fortement négatif. Ces propriétés rares dans les matériaux monolithiques sont de potentiels vecteurs d'amélioration. Mohsenizadeh et al. [8] montrent par exemple l'effet bénéfique de l'utilisation de mousses auxétiques pour la résistance au chocs. Wang et al. [9] présentent aussi l'intérêt des matériaux auxétiques dans le design d'amortisseurs.

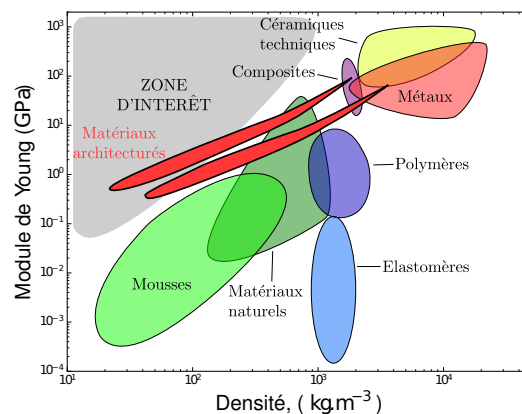


FIGURE 1 – Carte d'Ashby présentant la répartition de l'ensemble des matériaux connus dans l'espace (masse volumique, module de Young), la zone d'intérêt (en gris) est vide à ce jour. Elle correspond aux matériaux à la fois rigides et légers. On voit comment les deux bulles rouges relatives à une sous-classe spécifique des matériaux architecturés permettent d'investir la zone d'intérêt. Source : [15]

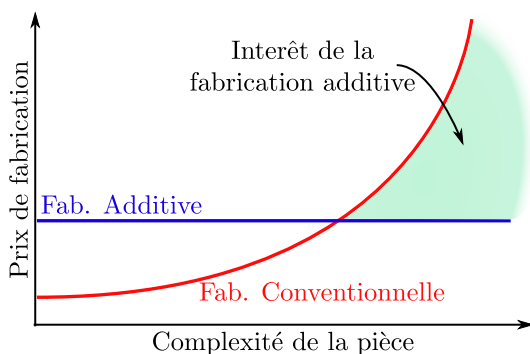
Bien que très prometteurs, il subsiste un frein majeur à une utilisation généralisée des matériaux architecturés : la complexité de leurs architectures les rend souvent difficile ou trop coûteux à produire. Cette contrainte majeure les confine pour le moment à des niches de haute technologie.

Une solution envisageable à ce problème est de définir des architectures simples permettant la fabrication de ces matériaux sous forme de semi-produits. Wang et al. [10] introduisent par exemple un assemblage auto-bloquant présentant des propriétés auxétiques. Cependant, ces solutions posent le problème de la fiabilité de l'assemblage entre les matériaux architecturés et les autres zones d'une même structure.

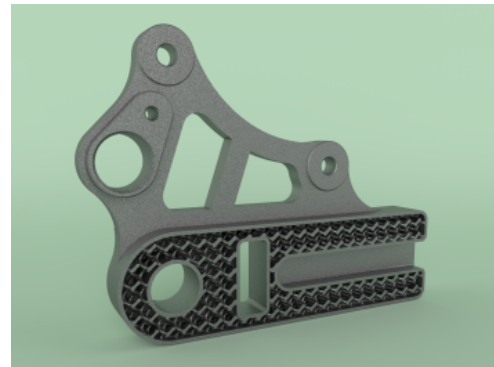
Une autre solution pouvant permettre l'utilisation des matériaux architecturés au sein de structures réelles est la fabrication additive. Les méthodes d'impression 3D ont évolué rapidement ces dix dernières années, elles sont même présentées comme une "révolution industrielle" [1]. Ces méthodes de fabrication sont sujettes à nettement moins de contraintes que les méthodes classiques soustractives. Elles présentent aussi l'avantage majeur de décorrélérer le coût de fabrication d'une pièce de sa complexité [1] (voir Figure 2 a). Dans ce contexte, il devient alors possible d'intégrer les matériaux architecturés au sein de structures. La Figure 2 b présente un exemple de pièce imprimée où les parties massives ont été remplacées par un matériau architecturé. La combinaison de l'impression 3D et des matériaux architecturés offre un tout nouvel espace dans la conception de structures.

Afin de rendre son exploration plus simple et plus efficace, de nombreux auteurs proposent d'utiliser l'optimisation topologique. Elle a été initialement appliquée à l'optimisation des structures [2, 4], puis par la suite à l'optimisation de microstructures de matériaux architecturés périodiques [3, 5]. Certains auteurs proposent l'optimisation conjointe d'une structure et de la microstructure la constituant [16, 21, 19, 22].

On propose ici d'appliquer l'optimisation topologique à deux échelles différentes : celle de l'optimisation d'une microstructure puis celle de l'optimisation d'une structure comportant des matériaux architecturés. A travers cette étude, on essaie d'évaluer le gain apporté par l'utilisation de matériaux architecturés au sein d'une structure.



(a)



(b)

FIGURE 2 – a) Illustration schématique du coût de production d'une pièce en fonction de sa complexité (nombre d'étapes d'usinage, complexité des usinages, ...). b) Exemple de pièce imprimée par Selective Laser Melting, on constate la présence d'un treillis périodique dans la pièce.

2 Méthode d'optimisation de forme

On utilise une méthode d'optimisation de forme basée sur la méthode des lignes de niveaux [4]. Cette méthode a déjà été appliquée à des problèmes d'optimisation topologique de structures [4] et de propriétés de composites poly-phasés [5, 3], entre autres. Il s'agit d'un processus d'optimisation où l'unique paramètre est la distribution de la matière dans l'espace. A chaque itération, la répartition de la matière dans l'espace est modifiée selon la direction d'un ou d'une combinaison de gradients, cela dans le but de minimiser/maximiser une ou plusieurs quantités en respectant certaines contraintes.

2.1 Méthode des lignes de niveau

La méthode des lignes de niveaux est utilisée pour paramétrer le domaine à optimiser. Soit le domaine D sur lequel on définit la fonction ϕ représentant le sous-domaine Ω ,

$$\begin{cases} \phi(\bar{x}) < 0 & \bar{x} \in \Omega \\ \phi(\bar{x}) = 0 & \bar{x} \in \partial\Omega \\ \phi(\bar{x}) > 0 & \bar{x} \in D \setminus \Omega \end{cases}, \quad (1)$$

avec \bar{x} le vecteur position. La Figure 3 présente un exemple de ce type de fonction.

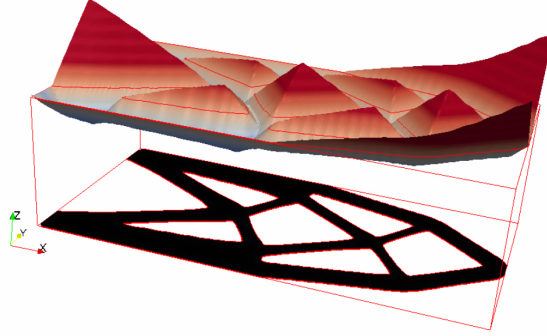


FIGURE 3 – Exemple d’une fonction lignes de niveaux décrivant un domaine (en noir). La fonction ligne de niveau est négative (bleue) à l’intérieur du domaine noir, et positive (rouge) ailleurs.

La fonction lignes de niveaux du domaine optimisé est ensuite transportée [17] suivant les directions permettant d’atteindre un objectif donné, cela à chaque itération du processus d’optimisation. Pour cela, on résout une équation du type Hamilton-Jacobi [4] qui s’écrit

$$\frac{\partial \phi(t, \bar{x})}{\partial t} + V(t, \bar{x}) |\nabla \phi(t, \bar{x})| = 0, \quad (2)$$

avec t le temps et $V(t, \bar{x})$ la vitesse d’advection.

Afin de représenter plusieurs phases d’un composite, on utilise plusieurs fonctions lignes de niveaux [13], N fonctions ϕ permettant de représenter 2^N phases distinctes.

2.2 Dérivation de forme

On guide le processus d’optimisation à l’aide des gradients des quantités à optimiser par rapport aux paramètres du problème. Dans le cas de la méthode d’optimisation de forme présentée ici, on utilise la théorie de la dérivation de forme. Il s’agit de la dérivée d’un critère par rapport à une variation $\bar{\theta}$ du bord du domaine optimisé $\partial\Omega$. La Figure 4 illustre les différentes quantités apparaissant dans l’expression de la dérivée de forme au sens de Gâteaux, qui s’écrit

$$A'(\Omega)(\bar{\theta}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{A(\Omega(Id + \delta \bar{\theta})) - A(\Omega)}{\delta}. \quad (3)$$

$A(\Omega)$ est un critère, par exemple le volume, le déplacement d’un point ou encore l’énergie élastique emmagasinée par la structure soumise à un chargement donné. Cette valeur dépend du domaine Ω , c’est à dire de la répartition de la matière dans le domaine D . Cea [18] propose une méthode de dérivation permettant d’établir la dérivée de forme de tels critères.

On utilise ici des dérivées de forme classiques de la littérature qui sont détaillées par Allaire et al. dans [4].

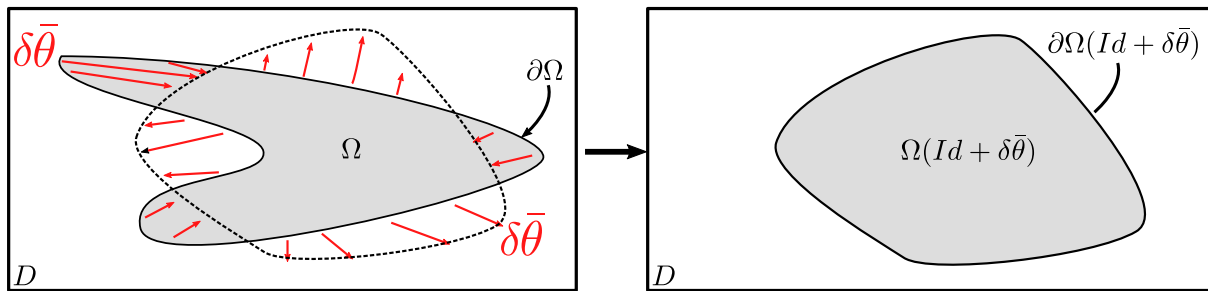


FIGURE 4 – Illustration des différentes quantités apparaissant dans l'expression de la dérivée de forme au sens de Gâteaux.

3 Optimisation de matériaux architecturés

3.1 Présentation du problème

Nous nous intéressons à l'optimisation des propriétés mécaniques ou thermomécaniques d'un matériau hétérogène constitué de phases thermo-élastiques linéaires isotropes, caractérisées par un module d'Young E et un coefficient de Poisson ν , ainsi qu'un coefficient de dilatation thermique α . Nous définissons une cellule périodique de taille ϵ , suffisamment petite vis à vis de la taille globale du volume considérée, définissant le volume élémentaire représentatif.

On appelle $Y = (0, 1)^N$ la cellule unitaire périodique. Les propriétés matériau du domaine D de la cellule sont décrites par un tenseur d'élasticité d'ordre 4 $C(y)$ et un second tenseur de contraintes thermiques d'ordre 2 $A^{th}(y)$, avec $y = x/\epsilon \in Y$ et $x \in D$. Le tenseur des contraintes thermiques est défini comme $A^{th}(y) = C(y)\alpha^{th}(y)$, avec $\alpha^{th}(y)$ le tenseur des dilatations thermiques.

Tenant compte de $f(x)$ les force extérieures et des conditions aux limites de Dirichlet, les équations de l'élasticité linéarisées s'écrivent :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(C\left(\frac{x}{\epsilon}\right)e\left(u_{\epsilon}\right)-A^{th}\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\Delta T\right) & = f \quad \text{dans } D, \\ u_{\epsilon} & = 0 \quad \text{le long de } \partial D, \end{cases} \quad (4)$$

avec u_{ϵ} le champ de déplacement, et $e(u_{\epsilon}) = \frac{1}{2}(\nabla u_{\epsilon} + {}^T \nabla u_{\epsilon})$ le tenseur de déformation, égal au gradient symétrisé de u_{ϵ} et ΔT un champ de température uniforme.

Les propriétés homogénéisées du domaine hétérogène D sont obtenues par une analyse asymptotique décrite dans [11]. Nous essayons ici de répartir une ou plusieurs phases dans la cellule unitaire de façon à atteindre des composantes C_{ijkl}^* , α_{ij}^* et A_{ij}^{th*} effectives cibles.

La figure 5 illustre le processus d'homogénéisation.

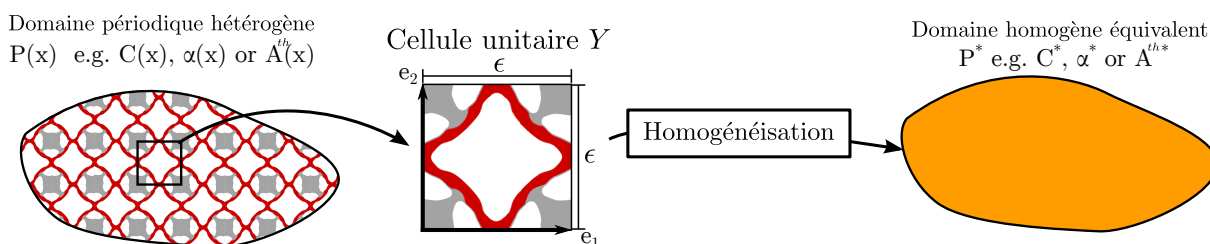


FIGURE 5 – Illustration du principe d'homogénéisation périodique : on évalue les propriétés effectives C^* , α^* et A^{th*} correspondant aux propriétés locales $C(x)$, $\alpha(x)$ et $A^{th}(x)$ du matériau hétérogène.

Plusieurs auteurs ont travaillé sur la recherche de propriétés extrêmes par optimisation topologique de cellule périodique. Andreassen et al. [7] proposent des structures isotropes ayant des coefficients de Poisson très négatifs, Sigmund et al. [3] proposent quant à eux plusieurs matériaux architecturés aux propriétés thermoélastiques extrêmes au sens des bornes de Gibiansky-Torquato [12].

Dans le contexte de cette étude, on choisit une méthode d'optimisation fondée sur une description de la microstructure avec les fonctions lignes de niveaux afin de générer des microstructures ayant des propriétés cibles. La figure 6 présente quelques exemples de matériaux architecturés ayant des dilatations thermiques effectives proches de zéro (en haut) ou négative (en bas). Ces microstructures ont été

reportées dans l'espace (module de compressibilité, dilatation thermique) afin de mettre en évidence le fait que les microstructures obtenues ici approchent les bornes théoriques de Gibiansky-Torquato [12] (en rouge).

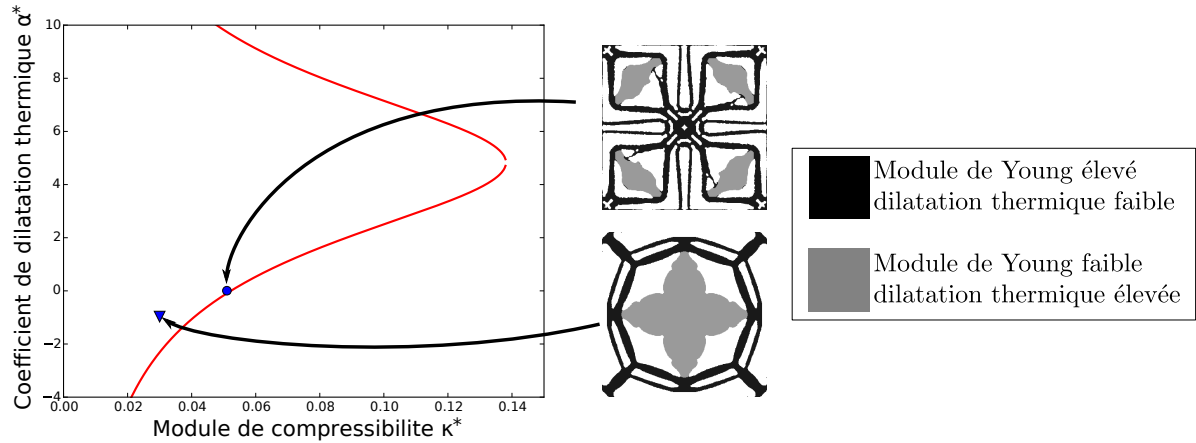


FIGURE 6 – Présentation de plusieurs architectures de matériaux architecturés constitués de deux phases solides (noire et grise) et de vide (blanc).

Cette étape d'optimisation de microstructures permet de définir de nouveaux matériaux que l'on peut ensuite utiliser dans un processus d'optimisation de forme de structure.

4 Intégration des matériaux architecturés au sein des structures

L'optimisation de forme des microstructures permet d'obtenir des matériaux architecturés ayant des propriétés cibles. On propose maintenant de traiter ces matériaux architecturés comme des phases homogènes et continues pour l'optimisation d'une structure, à l'échelle macroscopique.

4.1 Présentation du problème

On s'intéresse ici à l'optimisation de la masse d'une structure sollicitée par des chargements thermo-mécaniques. La réponse de la structure est définie par les équations d'état :

$$\begin{cases} -\text{div}(C\varepsilon(\bar{u}) - \alpha\Delta T) & = \bar{f} & \bar{x} \in \Omega \\ C\varepsilon(\bar{u}) \cdot \bar{n} & = \bar{g} & \bar{x} \in \Gamma_N \\ \bar{u} & = 0 & \bar{x} \in \Gamma_D, \end{cases} \quad (5)$$

avec \bar{f} la force volumique, \bar{g} le vecteur traction appliqué sur le bord de Neumann Γ_N et Γ_D le bord de Dirichlet où le déplacement est imposé. ΔT une variation uniforme de la température. Dans le cadre de ce résumé, on ne présente que des cas où le chargement est uniquement mécanique, ce qui implique $\Delta T = 0$.

Le problème d'optimisation traité est

$$\begin{aligned} \min_{\Omega} \quad & \text{Masse} \\ & C_i \leq C_{i,max}, \end{aligned} \quad (6)$$

avec les C_i des contraintes de rigidité suffisante ou de déplacements maximum toléré, les indices $_{max}$ définissent les valeurs maximum pour les différentes contraintes C_i considérées.

4.2 Exemples numériques

On considère l'optimisation d'une structure de type "MBB beam", les conditions aux limites sont présentées sur la figure 7. On présente ici un exemple où seule une sollicitation mécanique est appliquée,

des cas impliquant des chargements thermomécaniques seront aussi traités durant la présentation. Le problème d'optimisation traité est

$$\begin{aligned} \min_{\Omega} \quad & \text{Masse} = \sum_i \rho_i V_i \\ & C \leq C_{max}, \end{aligned} \quad (7)$$

avec ρ_i les densités des différents matériaux constituant la structure, V_i les volumes occupés par ces différents matériaux et C une contrainte sur l'énergie élastique emmagasinée.

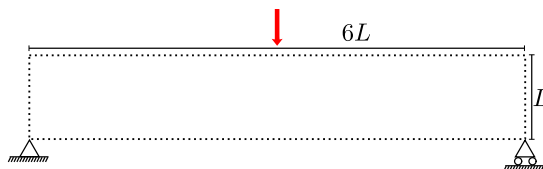


FIGURE 7 – Conditions aux limites et dimension du domaine optimisable pour le cas du MBB beam.

On présente trois configurations différentes :

- 1- Une structure composée d'un matériau monolithique et de vide
- 2- Une structure composée d'un matériau monolithique, d'un matériau architecturé et de vide
- 3- Une structure composée d'un matériau monolithique, d'un matériau architecturé auxétique (coefficient de Poisson négatif) et de vide

Les propriétés des différentes phases constitutives de ces trois cas ainsi que leurs masses finales sont reportées dans le tableau 1, la figure 8 présente les formes optimales finales.

TABLE 1 – Propriétés des matériaux utilisés pour chaque cas test et valeurs finales de masse.

cas	matériau monolithique	matériau architecturé (gris)	masse finale
1	$\rho = 1, E = 1, \nu = 0.33$	—	0.6
2	$\rho = 1, E = 1, \nu = 0.33$	$\rho = 0.1, E = 0.05, \nu = 0.33$	0.7
3	$\rho = 1, E = 1, \nu = 0.33$	$\rho = 0.1, E = 0.05, \nu = -0.5$	0.538

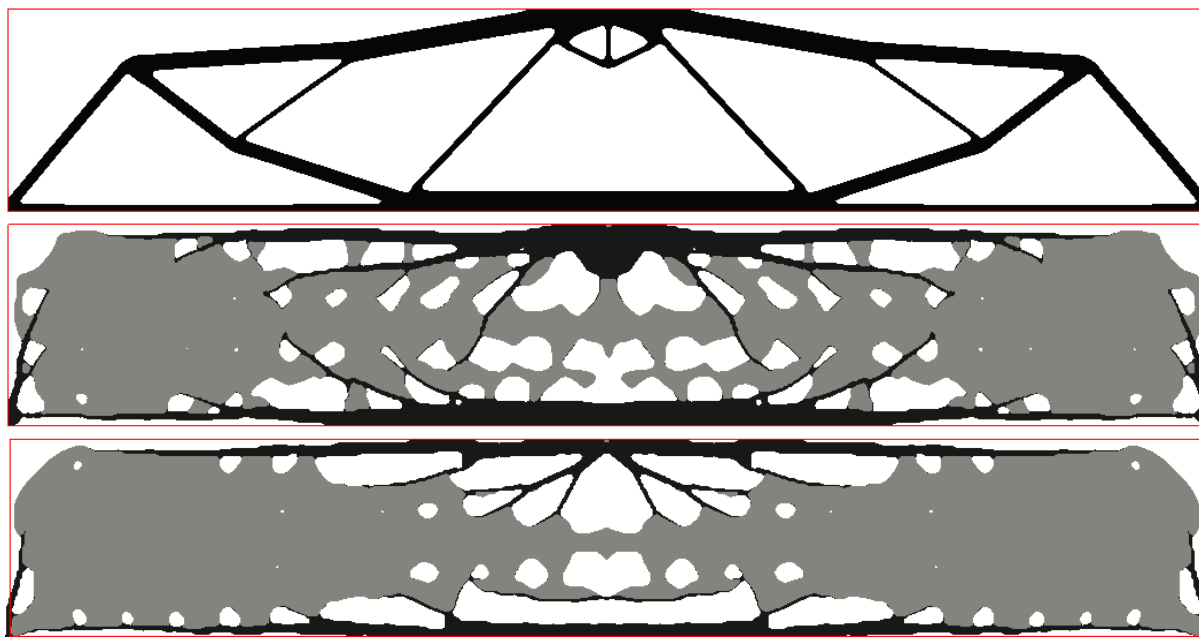


FIGURE 8 – Résultats d'optimisation pour le cas 1 (en haut), le cas 2 (au milieu) et le cas 3 (en bas). Le matériau monolithique est représenté en noir alors que le matériau architecturé est représenté en gris.

Cet exemple montre comment l'ajout d'un matériau architecturé permet d'améliorer la performance (ici la masse) d'une structure. La prise en compte d'un matériau architecturé (cas 2 et 3) conduit à une structure sandwich distincte de celle obtenue avec le seul matériau monolithique (cas 1). On note que seul le matériau architecturé auxétique permet d'améliorer la performance (ici la masse).

5 Conclusion

Dans cette étude, on présente une approche à deux échelles basée sur l'utilisation de méthodes d'optimisation de forme. Dans un premier temps, on s'intéresse à l'optimisation de la microstructure de matériaux architecturés dans le but d'atteindre des propriétés cibles. Ensuite, on s'intéresse à l'intégration de ces nouveaux matériaux architecturés au sein d'une structure macroscopique subissant des sollicitations mécaniques. En particulier, on montre que l'emploi des matériaux architecturés permet l'amélioration des performances.

Références

- [1] N. Hopkinson, R.J.M. Hague, P.M. Dickens. *Rapid Manufacturing : An Industrial Revolution for the Digital Age*, Wiley, 2006.
- [2] Bendsøe, M. P. *Optimal shape design as a material distribution problem*, Structural Optimization, 1989
- [3] Sigmund, O and Torquato, S. *Composites with extremal thermal expansion coefficients*, Applied Physics Letters, 1996
- [4] G. Allaire, F. Jouve, A.M. Toader. *Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method*, Journal of Computational Physics, 2004
- [5] Wang, X. Mei, Y. Wang, M. Yu . *Level-set method for design of multi-phase elastic and thermoelastic materials*, International Journal of Mechanics and Materials in Design, 2004
- [6] M. F. Ashby, Y. Bréchet. *Designing hybrid materials*, Acta Materialia, 2003
- [7] E. Andreassen, B. Lazarov, O. Sigmund. *Design of manufacturable 3D extremal elastic microstructure*, Mechanics of Materials, 2014
- [8] S. Mohsenizadeh, R. Alipour, M. Shokri Rad, A. Farokhi Nejad, Z. Ahmad. *Crashworthiness assessment of auxetic foam-filled tube under quasi-static axial loading*, Materials and Design, 2015
- [9] Y. Wang, L. Wang, Z. Ma, T. Wang. *A negative Poisson's ratio suspension jounce bumper*, JMADE, 2016
- [10] X. Wang, X. Tao, L. Ma. *Interlocking assembled 3D auxetic cellular structures*, Materials & Design, 2016
- [11] G. Allaire. *Conception Optimale des Structures*, Springer, 2007
- [12] L. V. Gibiansky, S. Torquato. *Thermal expansion of isotropic multiphase composites and polycrystals*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1997
- [13] G. Allaire, C. Dapogny, G. Delgado, G. Michailidis. *Multi-phase structural optimization via a level set method*, HAL, 2013
- [14] O. Sigmund, S. Torquato. *Design of materials with extreme thermal expansion using a three-phase topology optimization method*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1997
- [15] N. Fleck, V. Deshpande, M. Ashby. *Micro-architected materials : past, present and future*, Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2010
- [16] Y. Wang, M. Y. Wang, F. Chen. *Structure-material integrated design by level sets*, Structural and Multidisciplinary Optimization, 2016
- [17] S. Osher, J. A. Sethian. *Fronts Propagating with Curvature Dependent Speed : Algorithms Based on Hamilton-Jacobi Formulations*, Journal of Computational Physics, 1987
- [18] J. Céa. *Conception optimale ou identification de formes, calcul rapide de la dérivée directionnelle de la fonction de coût*, RAIRO, 1986
- [19] L. Xia *Simultaneous Topology Optimization of Structure and Materials*, SMO, 2016
- [20] L. Xia, P. Breitkopf *A reduced multiscale model for nonlinear structural topology optimization*, Computer Method in Applied Mechanics and Engineering, 2014
- [21] L. Xia *Towards optimal design of multiscale nonlinear structures : reduced-order modeling approaches*, HAL, 2015
- [22] D.C. Da, X.Y. Cui, K. Long, G.Y. Li *Concurrent topological design of composite structures and the underlying multi-phase materials*, Computer & Structures, 2017