

# La Proper Generalized Decomposition comme intégrateur spatio-temporel pour des problèmes élastoplastiques

J.-M. Bergheau<sup>1</sup>, L. Giraud<sup>1,2</sup>, J.-C. Roux<sup>1</sup>, E. Feulvarch<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Univ Lyon, ENISE, LTDS, UMR 5513 CNRS, 58 rue Jean Parot, 42023 Saint-Etienne cedex 02, France, {jean-michel.bergheau, landry.giraud, jean-christophe.roux, eric.feulvarch}@enise.fr

<sup>2</sup> TRA-C industrie, ZAC La Croisette, Allée des Savoir-faire, 69490 Les Olmes, France, l.giraud@tra-c.com

**Résumé** — Le développement de la Proper Generalized Decomposition (PGD) utilisée comme un intégrateur spatio-temporel pour des problèmes élastoplastiques est exposée ici. Sa capacité à déterminer les états élastoplastiques résultants de chargement cycliques est montrée. La résolution pas à pas dans le temps de problèmes élastoplastiques est d'abord rappelée, puis l'implémentation de la PGD est ensuite développée. Enfin, des applications et simulations numériques sont présentées pour illustrer la pertinence de la méthode.

**Mots clés** — Proper Generalized Decomposition, éléments finis espace-temps, élastoplasticité.

## 1 Introduction

La prédiction de la durée de vie en fatigue de composants mécaniques nécessite de bien connaître les états mécaniques stabilisés. Des sollicitations thermomécaniques appliquées périodiquement à une structure peuvent en effet conduire à différents états :

- L'adaptation : le comportement cyclique en tout point est alors élastique. Une déformation plastique a pu se développer au cours des premiers cycles mais finit par se stabiliser. L'analyse du comportement en fatigue de la structure relève alors de la fatigue à grand nombre de cycle
- L'accommodation : le comportement cyclique en chaque point se stabilise alors sur un cycle élastoplastique qui se répète au cours des cycles suivants. L'analyse en fatigue relève alors de la fatigue oligocyclique.
- Le rochet : il apparaît alors une déformation progressive qui s'incrémente cycle après cycle. Ce phénomène est lié au comportement du matériau combiné à certains types de chargement et peut conduire à la ruine de la structure.

La recherche de ces états limites par une méthode pas à pas, certes précise, peut conduire à des temps de calcul extrêmement longs. En pratique cette méthode est inutilisable lorsque le nombre de cycles est très élevé. Pour prédire les états limites, plusieurs auteurs ont proposé des méthodes simplifiées qui reposent sur des estimations des paramètres de l'état stabilisé [1, 2]. Peigney et Stolz [3] ont proposé une approche par contrôle optimal et Maitournam et al. [4] ont développé une méthode de recherche directe des états limites par décomposition en séries de Fourier des équations et des variables du problème. D'autres pratiques courantes dans l'industrie consistent à rechercher les états stabilisés à partir d'un calcul pas à pas mais en utilisant un modèle de comportement identifié sur la courbe cyclique du matériau de façon à obtenir les états stabilisés en quelques cycles seulement. D'autres auteurs [5, 6] ont cherché à réduire les temps de simulation en réduisant le nombre de cycles simulés par une méthode de sauts de cycles. Des méthodes alternatives aux calculs pas à pas des transitoires élastoplastiques ont également été développées ; elles reposent généralement sur la convergence d'un processus itératif entre la résolution globale des équations d'équilibre sur tout l'intervalle de temps d'analyse pour obtenir une solution statiquement et cinématiquement admissibles et la résolution locale des équations de comportement pour le calcul de la correction plastique des contraintes.

La méthode Large Time Increment (LATIN) est, à la connaissance des auteurs, la première méthode proposée dans ce domaine [7, 8].

La méthode que nous proposons [9] rentre dans cette dernière catégorie. Elle vise à réduire les temps de calcul en utilisant la Proper Generalized Decomposition (PGD) comme intégrateur spatio-temporel

du problème élastoplastique pour déterminer les états élastoplastiques ou viscoplastiques résultants de sollicitations thermomécaniques cycliques mais plus généralement de toute histoire de chargement.

La PGD est une méthode de réduction de modèle dont le principe consiste à rechercher une solution globale à un problème comportant de nombreuses variables (variables d'espace, temps, paramètres variés) en séparant ces variables [10, 11, 12]. On recherche ainsi la solution sous la forme d'une somme de modes, chaque mode étant calculé sous la forme d'un produit de fonctions de chacune des variables considérées. La PGD est une méthode a priori et ne nécessite pas le calcul d'une base de référence contrairement à la « Proper Orthogonal Decomposition » (POD). Bien que la convergence de la méthode ne soit pas encore démontrée de façon générale, des travaux récents ont montré un comportement numérique satisfaisant en mécanique du solide [13] et plus particulièrement pour le traitement de la viscoélasticité [14, 15].

## 2 Résolution de problèmes élastoplastiques pas à pas dans le temps

### 2.1 Formulation mécanique

Le problème à résoudre est régi à tout instant  $t \in T = [0, \tau]$  par les équations d'équilibre d'un milieu continu auxquelles sont adjointes des conditions aux limites classiques :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{f}_v = \mathbf{0} & \text{in } \Omega & (1a) \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T}^p & \text{on } \Gamma_T & (1b) \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{on } \Gamma_u & (1c) \end{cases}$$

Dans ces équations,  $T = [0, \tau]$  est l'intervalle de temps de l'analyse ;  $\Omega$  est le domaine spatial de l'étude, de frontière  $\partial\Omega = \Gamma_T \cup \Gamma_u$  ;  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$  est le tenseur des contraintes de Cauchy ;  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  est le vecteur de déplacement ;  $\mathbf{f}_v(\mathbf{x}, t)$  représente les forces de volume et  $\mathbf{T}^p(\mathbf{x}, t)$  une densité surfacique d'efforts. A noter que les sollicitations peuvent dépendre du temps.

Nous nous plaçons dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations. A tout instant  $t$  et en chaque point,  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$  est relié à l'histoire de la déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$  au même point par les équations constitutives de l'élastoplasticité (ou élastoviscoplasticité). Tout modèle de comportement peut à ce stade être utilisé, et, plus généralement, la méthode présentée ci-dessous peut être appliquée telle quelle à d'autres types de modèle de comportement.

### 2.2 Formulation variationnelle et problème éléments finis

La résolution classique par éléments finis pas à pas des problèmes élastoplastiques repose sur la formulation variationnelle classique qui consiste à rechercher à chaque instant  $t$  le champ de déplacement  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  vérifiant :

$$\forall \mathbf{v}^*(\mathbf{x}), \quad \int_{\Omega} \mathbf{v}^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}_v(\mathbf{x}, t) \, d\omega + \int_{\Gamma_T} \mathbf{v}^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{T}^p(\mathbf{x}, t) \, ds - \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^*(\mathbf{x})) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \, d\omega = 0 \quad (2)$$

où  $\mathbf{v}^*(\mathbf{x})$  sont des fonctions test et  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^*) = \frac{1}{2} (\mathbf{grad} \mathbf{v}^* + \mathbf{grad}^t \mathbf{v}^*)$ .

Notons que l'état mécanique ne dépend du temps  $t$  qu'à travers le chargement. Le temps  $t$  ne sert en fait qu'à décrire le chargement, les forces d'inertie étant négligées.

D'après la formulation variationnelle (2), l'approximation par éléments finis en espace du problème (1) conduit alors à rechercher à chaque instant et dans chaque élément le champ de déplacement  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  sous la forme suivante [16, 17] :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{n^e} N_i^e(\mathbf{x}) U_i^e(t) = \mathbf{N}^e(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}^e(t) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}(t) \quad (3)$$

où  $\mathbf{N}^e(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x})$  et  $\mathbf{U}^e(t) = \mathbf{U}(t)$  représentent respectivement le tableau des fonctions de forme élémentaires et le vecteur des déplacements des noeuds de l'élément  $e$  à l'instant  $t$ , en omettant dans la suite la notation  $^e$  pour des raisons de clarté. Les fonctions test seront aussi écrites sous la forme :  $\mathbf{v}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{N} \cdot \mathbf{V}^*$ .

Le problème (2) peut ainsi s'écrire :

Déterminer à chaque instant  $t$  le vecteur des déplacements nodaux  $\mathbf{U}(t)$  tel que :

$$\forall \mathbf{V}^*, \quad \mathbf{V}^{*t} \cdot \mathbf{R}(t) = 0$$

i.e. tel que :

$$\mathbf{R}(t) = 0 \quad (4)$$

Dans (4),  $\mathbf{R}(t)$  représente le vecteur des résidus nodaux instantanés à l'instant  $t$  qui résulte de l'assemblage des résidus élémentaires  $\mathbf{R}^e(t)$  :

$$\mathbf{R}(t) = \int_{\Omega} \mathbf{N}(\mathbf{x})^t \cdot \mathbf{f}_v(\mathbf{x}, t) \, d\omega + \int_{\Gamma_T} \mathbf{N}(\mathbf{x})^t \cdot \mathbf{T}^p(\mathbf{x}, t) \, ds - \int_{\Omega} \mathbf{B}(\mathbf{x})^t \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \, d\omega \quad (5)$$

où  $\mathbf{B}(\mathbf{x})^t$  représente la matrice permettant de passer des déplacements nodaux aux composantes du tenseur des déformations et où  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = (\sigma_{11} \sigma_{22} \sigma_{33} \sigma_{12} \sigma_{13} \sigma_{23})^t$  représente la notation classique de Voigt pour les composantes du tenseur des contraintes.

Il est à noter que le vecteur des résidus instantanés  $\mathbf{R}(t)$  dépend du temps au travers de la donnée « chargement » et de l'état de contrainte en tout point qui lui dépend de l'histoire de la déformation et donc de l'histoire des déplacements jusqu'au temps  $t$ .

Enfin, les intégrales apparaissant dans (5) sont calculées par intégration de Gauss et le problème (4) est résolu par la méthode de Newton-Raphson. Voir [9] pour plus de détails sur ces mises en œuvre.

### 3 Mise en œuvre de la PGD

#### 3.1 Principe

La PGD consiste à rechercher les solutions d'un problème en utilisant la séparation des variables. Dans notre cas, nous l'appliquons à la résolution des problèmes élastoplastiques en recherchant des solutions en séparant les variables d'espace  $\mathbf{x}$  et de temps  $t$ . Le but est donc d'approcher le champ de déplacement par une suite de fonctions  $\mathbf{u}_M(\mathbf{x}, t)$  de la forme suivante :

$$\mathbf{u}_M(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha=1}^M \mathbf{d}_{\alpha}(\mathbf{x}) f_{\alpha}(t) \quad (6)$$

où les fonctions  $\mathbf{d}_{\alpha}(\mathbf{x})$  et  $f_{\alpha}(t)$  sont maintenant déterminées par une approximation éléments finis en espace pour  $\mathbf{d}_{\alpha}(\mathbf{x})$  et en temps pour  $f_{\alpha}(t)$ . Nous ne cherchons donc plus à résoudre le problème pas à pas dans le temps mais globalement sur tout l'intervalle de temps de l'étude  $T = [0, \tau]$ .

La recherche des modes en espace et en temps se fait alors itérativement : connaissant une approximation  $\mathbf{u}_M(\mathbf{x}, t)$  d'ordre  $M$ , nous recherchons un couple de fonctions  $(\mathbf{d}_{M+1}(\mathbf{x}), f_{M+1}(t))$  tel que  $\mathbf{u}_{M+1}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_M(\mathbf{x}, t) + \mathbf{d}_{M+1}(\mathbf{x}) f_{M+1}(t)$  constitue une meilleure approximation de la solution  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ .

#### 3.2 Formulation variationnelle

Pour appliquer la méthode des éléments finis en espace et en temps, la formulation variationnelle est obtenue en multipliant l'équation (1a) par des fonctions test de la forme :

$$\mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t) = \mathbf{d}^*(\mathbf{x}) f(t) + \mathbf{d}(\mathbf{x}) f^*(t) \quad (7)$$

En intégrant le résultat sur l'intervalle de temps  $T$ , en intégrant par parties sur le domaine spatial  $\Omega$  et en tenant compte des conditions aux limites (1b,1c), le problème variationnel est formulé comme :

Trouver  $\mathbf{d}(\mathbf{x})$  et  $f(t)$  telles que :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t), \quad & \int_T \int_{\Omega} \mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{f}_v(\mathbf{x}, t) \, d\omega dt + \int_T \int_{\Gamma_T} \mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{T}^p(\mathbf{x}, t) \, ds dt \\ & - \int_T \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t)) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \, d\omega dt = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Comme l'équation (8) doit être vérifiée quelle que soit  $\mathbf{v}^*$  donnée par (7), elle doit être satisfaite quelles que soit  $\mathbf{d}^*$  et  $f^*$  indépendamment :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{d}^*(\mathbf{x}), \quad & \int_T f(t) \int_{\Omega} \mathbf{d}^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}_v(\mathbf{x}, t) \, d\omega \, dt + \int_T f(t) \int_{\Gamma_T} \mathbf{d}^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{T}^p(\mathbf{x}, t) \, ds \, dt \\ & - \int_T f(t) \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{d}^*(\mathbf{x})) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \, d\omega \, dt = 0 \end{aligned} \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} \forall f^*(t), \quad & \int_T f^*(t) \int_{\Omega} \mathbf{d}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}_v(\mathbf{x}, t) \, d\omega \, dt + \int_T f^*(t) \int_{\Gamma_T} \mathbf{d}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{T}^p(\mathbf{x}, t) \, ds \, dt \\ & - \int_T f^*(t) \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{d}(\mathbf{x})) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \, d\omega \, dt = 0 \end{aligned} \quad (9b)$$

La formulation variationnelle est ainsi constituée de deux équations variationnelles, l'une relative aux variables d'espace (9a) et l'autre à la fonction temporelle (9b).

Après résolution, nous posons  $\mathbf{d}_{M+1}(\mathbf{x}) = \mathbf{d}(\mathbf{x})$  et  $f_{M+1}(t) = f(t)$  et nous passons au mode suivant.

### 3.3 Formulation éléments finis

Nous considérons un maillage du domaine spatial  $\Omega$  et une subdivision en sous-intervalles du domaine temporel  $T = [0, \tau]$ .

Le champ  $\mathbf{d}(\mathbf{x})$  et la fonction  $f(t)$  sont alors recherchés sous la forme :

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{D} \quad \text{et} \quad f(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{F} \quad (10)$$

où  $\mathbf{N}(\mathbf{x})$  et  $\mathbf{D}$  représentent respectivement le tableau des fonctions de forme élémentaires et le vecteur des valeurs nodales de  $\mathbf{d}(\mathbf{x})$ ;  $\mathbf{P}(t)$  et  $\mathbf{F}$  représentent respectivement le tableau des fonctions de forme des éléments temporels et le vecteur des valeurs de  $f(t)$  aux nœuds temporels.

Le champ  $\mathbf{d}^*(\mathbf{x})$  et la fonction  $f^*(t)$  sont approchés de la même façon par  $\mathbf{d}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{D}^*$  et  $f^*(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{F}^*$ .

En considérant les approximations (10), notons que (6) devient  $\mathbf{u}_M(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}(t)_M$  avec :

$$\mathbf{U}(t)_M = \sum_{\alpha=1}^M \mathbf{D}_{\alpha} \cdot \mathbf{P}(t)^t \cdot \mathbf{F}_{\alpha} \quad (11)$$

où  $\mathbf{U}(t)_M$  est le vecteur des déplacements des nœuds de  $\Omega$  au cours du temps obtenu avec  $M$  modes et  $\mathbf{D}_{\alpha}, \mathbf{F}_{\alpha}$  ( $\alpha = 1, \dots, M$ ) sont les modes en espace et en temps calculés.

Avec le schéma d'approximation (10), le problème variationnel (9) équivaut à rechercher  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{F}$  tels que :

$$\begin{aligned} & \int_T f(t) \left( \int_{\Omega} \mathbf{N}(\mathbf{x})^t \cdot \mathbf{f}_v(\mathbf{x}, t) \, d\omega + \int_{\Gamma_T} \mathbf{N}(\mathbf{x})^t \cdot \mathbf{T}^p(\mathbf{x}, t) \, ds - \int_{\Omega} \mathbf{B}(\mathbf{x})^t \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \, d\omega \right) dt = 0 \\ & \int_T \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{D} \left( \int_{\Omega} \mathbf{N}(\mathbf{x})^t \cdot \mathbf{f}_v(\mathbf{x}, t) \, d\omega + \int_{\Gamma_T} \mathbf{N}(\mathbf{x})^t \cdot \mathbf{T}^p(\mathbf{x}, t) \, ds - \int_{\Omega} \mathbf{B}(\mathbf{x})^t \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \, d\omega \right) dt = 0 \end{aligned}$$

que nous pouvons réécrire compte tenu de (5) sous la forme :

$$\boldsymbol{\varphi}_{\Omega} = \int_T f(t) \mathbf{R}(t) \, dt = 0 \quad (12a)$$

$$\boldsymbol{\psi}_T = \int_T \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{D}^t \cdot \mathbf{R}(t) \, dt = 0 \quad (12b)$$

Ces équations définissent les résidus en espace et en temps dont les dimensions sont respectivement égales à trois fois le nombre de nœuds de  $\Omega$  (en 3D) et au nombre de nœuds temporels.  $\boldsymbol{\varphi}_{\Omega}$  et  $\boldsymbol{\psi}_T$  dépendent non linéairement de  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{F}$  au travers du vecteur des résidus instantanés  $\mathbf{R}(t)$  défini par (5) et qui dépend à chaque instant de  $\mathbf{U}(t)_{M+1} = \sum_{\alpha=1}^M \mathbf{D}_{\alpha} \cdot \mathbf{P}(t)^t \cdot \mathbf{F}_{\alpha} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}(t)^t \cdot \mathbf{F}$ .

Remarquons que les équations (12a) et (12b) sont couplées, malgré la décomposition PGD du champ de déplacements. En effet, les contraintes  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$  sont calculées de manière standard, pas à pas en temps

et sans décomposition. Ceci contrairement à la méthode LATIN où il est par exemple possible d'utiliser une décomposition de type « Proper Orthogonal Decomposition », mais pour laquelle l'expérience montre que cela introduit un bruit numérique néfaste à la qualité des calculs [18].

Au lieu d'une intégration de Gauss classique, l'intégration en temps des équations (12) est réalisée grâce à une intégration nodale, et les points d'intégration sont donc les nœuds temporels. L'avantage de ce choix est qu'il découple les composantes du vecteur  $\psi_T$  dans (12b) et qui s'écrivent ainsi comme :

$$\forall i = 1, \dots, N_t, \quad \psi_{i_T} = \omega_i \mathbf{D}^t \cdot \mathbf{R}(t_i) = 0 \quad (13)$$

Cette intégration consiste donc en la résolution de  $N_t$  équations scalaires non-linéaires  $\mathbf{D}^t \cdot \mathbf{R}(t_i) = 0$ .

### 3.4 Stratégies de résolution en élastoplasticité

Pour résoudre des problèmes élastoplastiques, plusieurs stratégies de résolution peuvent être envisagées. Nous présentons ici deux choix différents et on pourra se référer à [9] pour plus de détails.

La première stratégie consiste à considérer le problème espace-temps dans son intégralité. Nous procédons ainsi à une succession de calculs reliés entre eux et comprenant une itération de résolution de (12a) pour corriger  $\mathbf{D}$  en supposant  $\mathbf{F}$  connu, suivie d'une résolution de (13) pour calculer  $\mathbf{F}$  tout en fixant  $\mathbf{D}$  à la valeur trouvée. Ce processus est répété jusqu'à convergence comme illustré dans l'algorithme 1 :

---

#### Algorithme 1 : Première stratégie de résolution

---

##### Boucle sur les modes PGD

##### Boucle de résolution en espace et en temps

Itération de Newton-Raphson appliquée à l'équation (12a) pour calculer  $\mathbf{D}$

Méthode de Newton-Raphson pour résoudre les équations (13) pour  $i = 1, \dots, N_t$

**jusqu'à convergence;**

**jusqu'à Critère PGD atteint;**

---

Une deuxième stratégie consiste à ne plus s'efforcer de résoudre parfaitement l'équation (12a). Pour chaque mode,  $\mathbf{D}$  peut donc être calculé en supposant que le comportement est élastique, c'est-à-dire par la résolution d'un système linéaire dérivé de (12a), et être ensuite utilisé pour résoudre (13) précisément. Ceci conduit à la méthode décrite dans l'algorithme 2. Il est clair que cette approche conduit au calcul d'un nombre de modes plus grand que celui effectué avec d'autres stratégies. Mais en considérant le temps de résolution, cette méthode peut s'avérer efficace.

---

#### Algorithme 2 : Deuxième stratégie de résolution

---

##### Boucle sur les modes PGD

**Résolution linéaire en espace pour  $\mathbf{D}$**

##### Résolution en temps

Méthode de Newton-Raphson pour résoudre les équations (13) pour  $i = 1, \dots, N_t$

**jusqu'à convergence;**

**jusqu'à Critère PGD atteint;**

---

## 4 Applications

L'objectif est de montrer la capacité du PGD à simuler les évolutions des variables mécaniques et donc l'effet de rochet. Nous considérons ainsi un matériau élastoplastique de von Mises à écrouissage

cinématique non linéaire de type 'Armstrong-Frederick', connu pour conduire à un rochet constant au cours des cycles dans le cas de cycles dissymétriques de contraintes imposées. La loi d'évolution de la variable cinématique est donnée par :  $\dot{\chi} = \frac{2}{3} c \dot{\epsilon}^P - \gamma \chi \dot{p}$

où  $\dot{\chi} = \frac{d\chi}{dt}$ ,  $\epsilon^P$  est le tenseur des déformations plastiques,  $\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}^P : \dot{\epsilon}^P}$  est le taux de déformation plastique équivalente cumulée et  $c$  et  $\gamma$  sont deux paramètres.

#### 4.1 Algorithme 1 : plaque trouée soumise à un chargement cyclique

Nous considérons une plaque trouée dont le maillage et le chargement sont donnés figure 1.

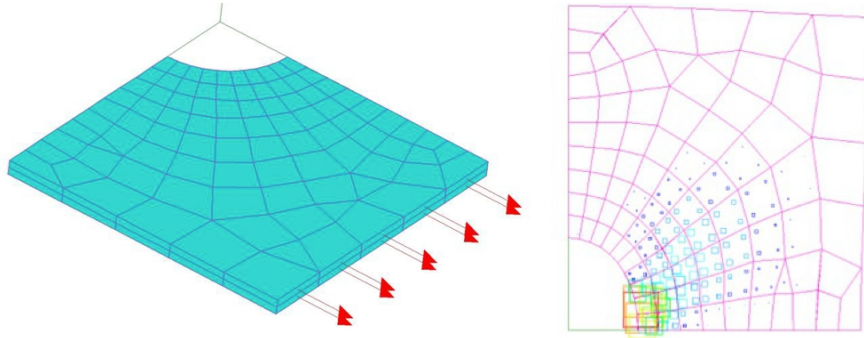


FIGURE 1 – Maillage et chargement de la plaque perforée – Zone plastique à 75 MPa [9].

La plaque est soumise à un chargement cyclique de type sinusoïdal, et les paramètres du modèle utilisé sont  $E = 210000 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $\sigma^y = 100 \text{ MPa}$ ,  $c = 25000 \text{ MPa}$  et  $\gamma = 125$ .

La figure 2 montre la convergence de l'algorithme 1, et la figure 3 donnant les évolutions de la contrainte axiale en fonction de la déformation axiale dans un élément proche du trou révèle, durant les premiers cycles, un phénomène de déformation progressive combinée avec une relaxation de la contrainte moyenne.

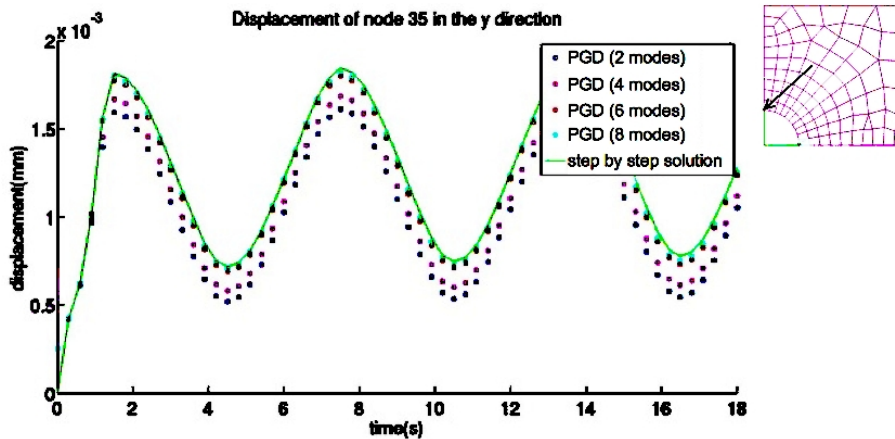


FIGURE 2 – Déplacement axial du nœud 35 au cours du temps [9].

#### 4.2 Algorithme 2 : essai uniaxial de traction-compression

Nous considérons un élément de volume unitaire soumis à une traction-compression uniaxiale entre -220 MPa et 300 MPa. Les paramètres du modèle utilisé sont  $E = 210000 \text{ MPa}$ ,  $\sigma^y = 200 \text{ MPa}$ ,  $c = 25000 \text{ MPa}$  et  $\gamma = 125$ .

La figure 4 montre le déplacement de l'extrémité du cube lors des cycles avec une résolution pas à pas et une PGD avec 2 modes. Selon l'algorithme 2, Le premier mode est calculé en considérant un comportement totalement élastique, et le deuxième mode est ainsi le premier mode élastoplastique.

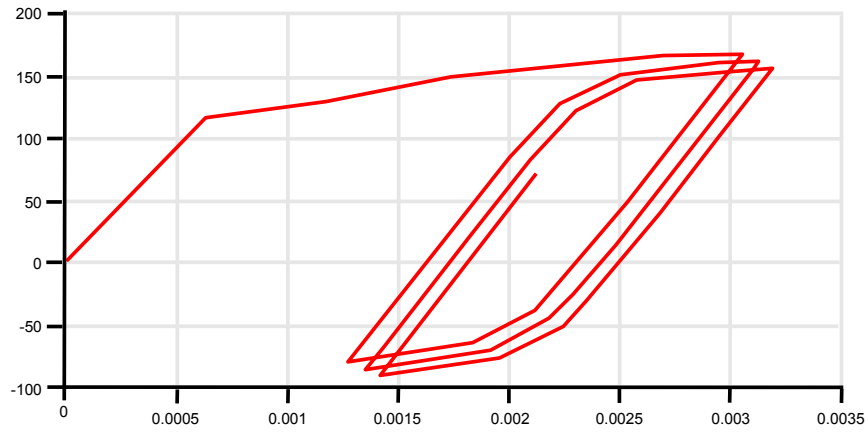


FIGURE 3 – Evolutions de la contrainte axiale en fonction de la déformation axiale [9].

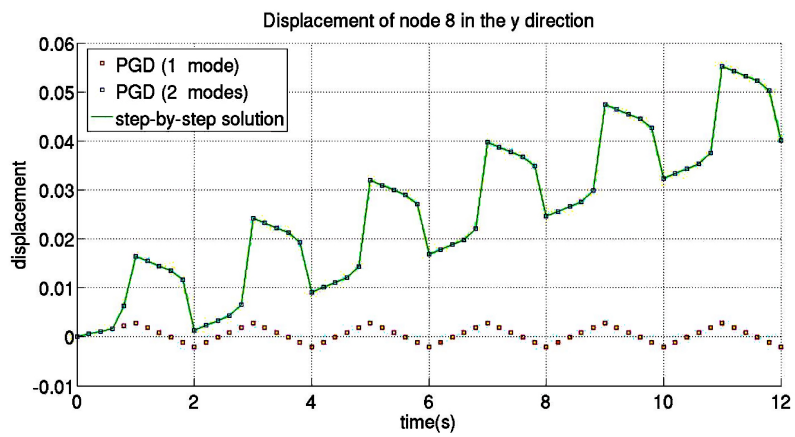


FIGURE 4 – Déplacement de l'extrémité du cube lors des cycles [9].

La figure 5 donne l'évolution de la contrainte axiale en fonction de la déformation axiale. Les deux figures 4 et 5 mettent clairement en évidence l'effet de rochet et la capacité de la PGD à le reproduire.

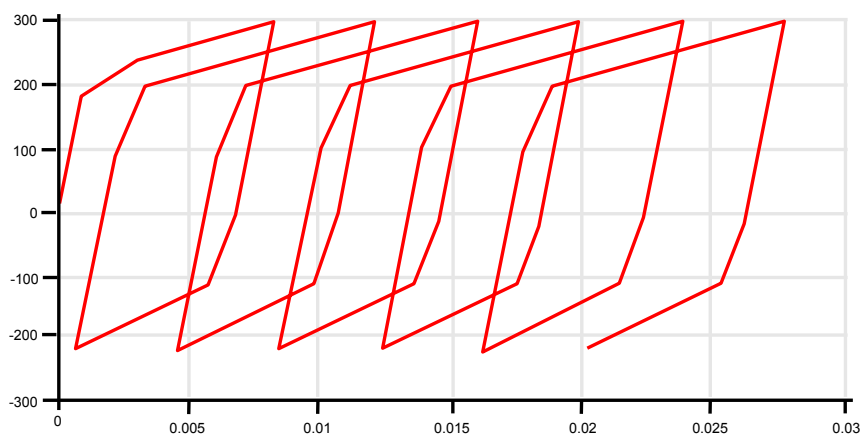


FIGURE 5 – Cycles contrainte-déformation calculés [9].

## 5 Conclusion

La PGD a été appliquée avec succès pour la simulation de problèmes élastoplastiques avec le choix d'une méthode par éléments finis pour l'approximation à la fois en espace et en temps. La méthode amène à résoudre deux problèmes non linéaires couplés, l'un en espace et l'autre en temps, et la même approche peut être appliquée à d'autres équations constitutives. Les premiers résultats sont prometteurs. Ils montrent la capacité de la PGD à simuler des évolutions cycliques complexes avec des effets de rochet. Comme il a été illustré, différentes stratégies peuvent être utilisées pour résoudre le problème couplé espace-temps. Les résultats complets relatifs au choix de la stratégie, au temps de calcul et à la convergence font l'objet de la suite de ce travail.

## Références

- [1] A. Benoit, M.-H. Maitournam, L. Rémy and F. Oger, *Cyclic Behaviour of structures under thermomechanical loadings : Application to exhaust manifolds*, International Journal of Fatigue, 38, 65-74, 2012.
- [2] K.V. Spiliopoulos and K.D. Panagiotou, *A direct method to predict cyclic steady states of elastoplastic structures*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 223 :224, 186-198, 2012.
- [3] M. Peigney and C. Stolz, *An optimal control approach to the analysis of inelastic structures under cyclic loading*, J. Mech. Phys. Solids, 51(4), 575-605, 2003.
- [4] M.-H. Maitournam, B. Pommier and J.-J. Thomas, *Determination of the asymptotic response of a structure under cyclic thermomechanical loading*, Comptes Rendus Mécanique, 330(10), 703-708, 2002.
- [5] P.-M. Lesne and S. Savalle, *An efficient cycle jump technique for viscoplastic structure calculations involving large number of cycles*, 2<sup>nd</sup> Int. Conf. on Computational Plasticity, Barcelona, 591-602, 1989.
- [6] J.-L. Chaboche and G. Cailletaud, *Integration methods for complex plastic constitutive equations*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 133, 125-155, 1996.
- [7] P. Boisse, P. Bussy and P. Ladevèze, *A new approach in non-linear mechanics : the large time increment method.*, Int. J. Num. Meth. Eng., 29, 647-663, 1990.
- [8] J.-Y. Cognard and P. Ladevèze, *A large time increment approach for cyclic viscoplasticity*, Int. J. of Plasticity, 9, 141-157, 1993.
- [9] J.-M. Bergheau, S. Zuchiatti, J.-C. Roux, E. Feulvarch, S. Tissot and G. Perrin, *The Proper Generalized Decomposition as a space-time integrator for elastoplastic problems*, Comptes Rendus Mécanique, 344(11), 759-768, 2016.
- [10] A. Ammar, M. Normandin and F. Chinesta, *Solving parametric complex fluids models in rheometric flows*, J. Non-Newton. Fluid Mech., 165, 1588-1601, 2010.
- [11] E. Pruliere, F. Chinesta and A. Ammar, *On the deterministic solution of multidimensional parametric models by using the proper generalized decomposition*, Math. Comput. Simul., 81, 791-810, 2010.
- [12] F. Chinesta, R. Keunings and A. Leygue, *The proper generalized decomposition for advanced numerical simulations : a primer*, Springer – SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology, 2014.
- [13] C. Geramoso, J. V. Aguado, A. Fraile, E. Alarcon and F. Chinesta, *Efficient PGD-based dynamic calculation of non-linear soil behavior*, Comptes Rendus Mécanique, 344(1), 21-44, 2016.
- [14] M. Hammoud, M. Beringhier and J.-C. Grandidier, *A reduced simulation applied to the viscoelastic fatigue of polymers*, Comptes Rendus Mécanique, 342, 671-691, 2014.
- [15] A. Ammar, A. Zghal, F. Morel and F. Chinesta, *On the space-time separated representation of integral linear viscoelastic models*, Comptes Rendus Mécanique, 343(4), 247-263, 2015.
- [16] R. De Borst, M.A. Crisfield, J.J. Remmers, and C.V. Verhoosel, *Nonlinear finite element analysis of solids and structures*, John Wiley & Sons, 2012.
- [17] P. Wriggers, *Nonlinear finite element methods*, Springer Science & Business Media, 2008.
- [18] P. Despret, *Simulation numérique de la solidification avec réduction de modèle PGD appliquée à la fonderie*, PhD Thesis, Univ. of Technology of Compiegne, in French, 2015.