

## Analyse comparative de trois méthodes performantes de simulation numérique de la fissuration.

Kajetan Wojtacki<sup>1,2</sup>, Loïc Daridon<sup>1,2</sup>, Frédéric Dubois<sup>1,2</sup>,  
Nicolas Moës<sup>3</sup>, Yann Monerie<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> LMGC, Univ. Montpellier, CNRS, Montpellier, France. [prenom.nom@umontpellier.fr](mailto:prenom.nom@umontpellier.fr)

<sup>2</sup> MIST Lab., CNRS, IRSN, Univ. Montpellier, France.

<sup>3</sup> GeM, École Centrale de Nantes, France. [nicolas.moes@ec-nantes.fr](mailto:nicolas.moes@ec-nantes.fr)

**Résumé** — Au cours des 20 dernières années différentes méthodes numériques ont été développées pour améliorer la simulation de la fissuration et notamment pour les matériaux hétérogènes. L'objectif de ce papier est de confronter sur cette thématique trois approches : Zones Cohésives (CZM), Thick Level Set TLS et Eigenerosion. Les résultats numériques obtenus ont été comparés avec des données expérimentales pour un cas d'une fissuration du béton en mode mixte. Avantages, inconvénients et liens entre chacune des méthodes sont décrits en détail.

**Mots clés** — zones cohésives, thick level-set, Eigenerosion, fissuration, mode mixte, béton.

## 1 Introduction

La prédiction de la ruine des matériaux revêt une grande importance en génie et en sciences des matériaux. Au cours des deux dernières décennies, un énorme effort a été fait pour développer de nouvelles méthodes de calcul plus efficaces et plus robustes afin de simuler la fissuration des matériaux quasi-fragiles. De fait des progrès considérables ont été réalisés. Ce travail se concentre sur l'analyse et la comparaison entre différents modèles permettant de simuler la rupture fragile et quasi-fragile. Les approches retenues sont : les Modèles de Zone Cohésive (CZM), les méthodes Thick Level Set (TLS) et l'Eigenerosion.

## 2 CZM - Modèle de la Zone Cohésive

La notion de modèle de zone cohésive a été introduit pour la première fois par Dugdale [1] pour les matériaux ductiles et par Barenblatt dans [2] pour les milieux fragiles. Dans ces modèles, une loi cohésive est imposée entre les lèvres de la fissure. Elle consiste à relier le vecteur contrainte,  $\sigma$ , au saut de déplacement entre les deux lèvres de la fissure,  $[\delta]$ , en train de se créer [Fig. 1].

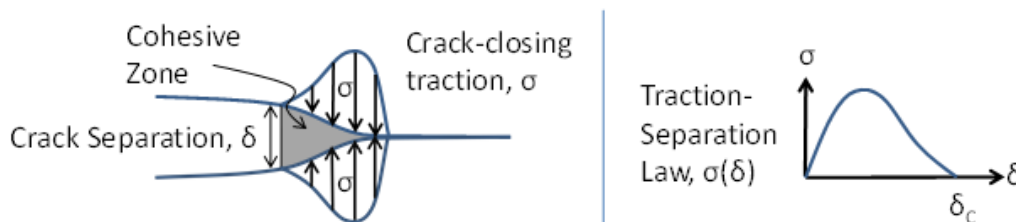


FIGURE 1 – Un exemple de modèle de la zone cohésive.

La zone totalement endommagée est libre de contrainte tandis que la zone d'élaboration reste soumise à des forces cohésives qui s'opposent à la séparation des lèvres de la fissure. Il existe de nombreux modèles de lois [3], [4]. Lorsque le trajet de fissure n'est pas connu a priori, la séparation des comportements cohésifs et volumiques est réalisé en introduisant des zones cohésives entre chaque élément d'un maillage Éléments Finis [5]. Ce type de configuration autorise la multi-fissuration et la bifurcation des fissures. Ce modèle est largement utilisé et est considéré comme ayant de bonnes capacités pour reproduire les

résultats expérimentaux. Les deux difficultés de cette méthode sont l'existence de solutions instables et une dépendance à la taille et à la topologie du maillage. Sur ce dernier point de récents travaux apportent des solutions [5].

### 3 Thick Level Set

Le modèle TLS (Thick Level Set) est un modèle qui offre une transition naturelle entre l'endommagement et la rupture. L'approche TLS a été présentée dans Moës et al. [10] avec une première implémentation numérique pour une loi d'évolution d'endommagement. Ce type d'approche permet de modéliser l'évolution de l'endommagement dans un solide à l'aide d'un ensemble de courbes de niveau séparant la zone intacte de la zone endommagée.

Le modèle TLS s'appuie sur un modèle d'endommagement local dans lequel l'énergie libre peut être définie de la manière suivante :

$$\Psi(\tilde{\epsilon}, d) = \frac{1}{2} (1 - d) \tilde{\epsilon} : HK : \tilde{\epsilon}, \quad (1)$$

où  $\tilde{\epsilon}$  est le tenseur des déformations,  $HK$  le tenseur de Hooke et  $d$  la variable d'endommagement. De cette énergie dérive le tenseur des contraintes  $\sigma = \frac{\partial \Psi(\tilde{\epsilon}, d)}{\partial \tilde{\epsilon}} = (1 - d) HK : \tilde{\epsilon}$  et le taux de restitution d'énergie élastique  $Y = -\frac{\partial \Psi(\tilde{\epsilon}, d)}{\partial d} = \frac{1}{2} \tilde{\epsilon} : HK : \tilde{\epsilon}$ .

La propagation d'endommagement est pilotée par des équations de complémentarité :

$$f(Y, d) \leq 0, \quad \dot{d} \geq 0 \text{ et } f(Y, d) \dot{d} = 0, \quad (2)$$

où  $f(Y, d) = Y - h(d)Y_c$  est la fonction seuil,  $Y_c$  une constante caractéristique du matériau considéré relié au taux de restitution de l'énergie critique et  $h(d)$  une fonction d'adoucissement adhoc en fonction du comportement du matériau considéré ( $h(d) = 1$  dans le cas d'un matériau fragile). Classiquement dans

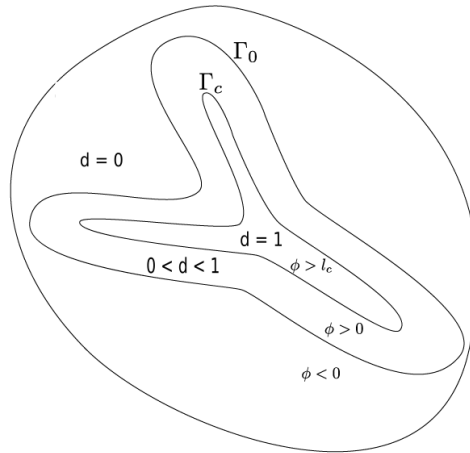


FIGURE 2 – La methode TLS : zone endommagée, notion de fonctions  $\phi$  et  $l_c$ .

un modèle d'endommagement local, l'endommagement a tendance à se localiser dans une bande dont la largeur est celle d'un élément fini. Pour palier cet inconvénient, la méthode TLS introduit une zone dans laquelle le gradient d'endommagement est fini,  $\|\nabla d\| \leq g(d)$ , où la fonction  $g(d)$  est bornée. Pour ce faire, une longueur caractéristique critique de la zone endommagée  $l_c$  est introduite. Finalement la variable d'endommagement  $d$  devient dépendante des fonctions de niveau  $\phi$  [Fig. 2] :

$$\begin{cases} d(\phi) = 0 & \text{si } \phi \leq 0 \\ 0 < d(\phi) < 1 & \text{si } 0 \leq \phi \leq l_c \text{ et } d(\phi) > 0 \\ d(\phi) = 1 & \text{si } l_c \leq \phi \end{cases} \quad (3)$$

Selon le modèle choisi et la longueur  $l_c$ , la process zone peut être plus ou moins épaisse et de fait se rapprocher ou s'éloigner d'un modèle cohésif et l'évolution locale est remplacée par des moyennes spatiales [10].

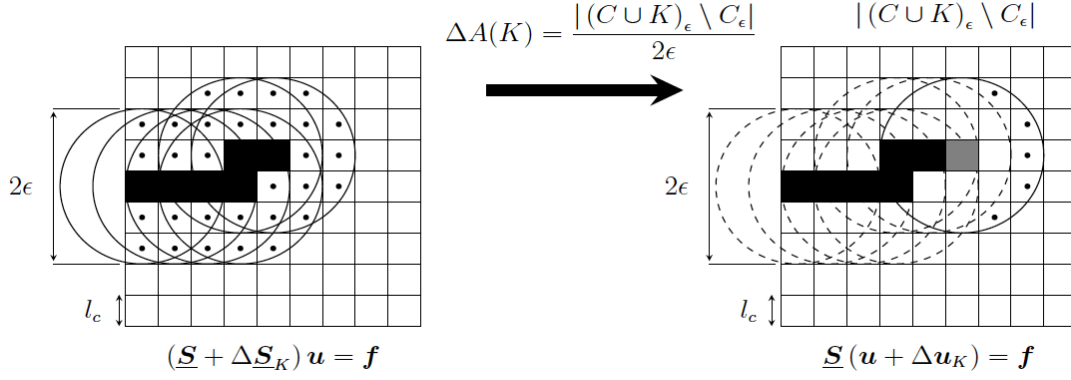


FIGURE 3 – Recherche de voisins : incrément suivant.

## 4 Eigenerosion

En 1920, Griffith [6] a introduit le concept de taux de restitution d'énergie pour expliquer la rupture des matériaux fragiles en présence d'une fissure : en dessous d'une certaine quantité d'énergie, aucune extension de fissure ne peut se produire. Une formulation variationnelle et une généralisation de cette idée a été proposée par Francfort et Marigo [7] à la fin des années 90, puis une régularisation de cette formulation a été récemment développée par Schmidt et al. [8] :

$$F_\epsilon(u, \tilde{\epsilon}^*, t) = \int_{\Omega} W(\tilde{\epsilon}(u) - \tilde{\epsilon}^*) dV - \int_{\Gamma_f} T \cdot u dS + G_c \frac{|C_\epsilon|}{2\epsilon} \quad (4)$$

où  $T$  le chargement sur le bord  $\Gamma_f$  du domaine  $\Omega$ ,  $W$  la densité d'énergie élastique du solide,  $\tilde{\epsilon}$  l'opérateur de déformation de l'élasticité linéaire,  $\tilde{\epsilon}^*$  le champ d'eigen-déformation,  $G_c$  le taux de restitution d'énergie critique et  $C_\epsilon$  une boule de rayon  $\epsilon$ .  $|D|$  est une mesure d'un domaine  $D$  quelconque.

La minimisation de la fonctionnelle (4) dans le cadre des éléments finis a été tout d'abord réalisée par A. Pandolfi et M. Ortiz [9] dans le contexte des milieux élastiques homogènes. Ces auteurs ont proposé de modéliser la propagation des fissures associée à l'Eigenerosion en utilisant une méthode de suppression d'éléments du maillage. Deux quantités physiques sont impliquées dans ce processus.

— la variation d'énergie [Fig. 3] :

$$\Delta E_K = \frac{1}{2} u^T \Delta S_K u + \frac{1}{2} u^T \Delta S_K S^{-1} \Delta S_K u, \quad (5)$$

où  $S$  est la matrice de rigidité de la structure sans élément supprimé et  $\Delta S_K$  la matrice de rigidité de l'élément supprimé,  $u$  le champs de déplacement.

— l'incrément d'avancée de fissure. Pour une fissure occupant un domaine  $C$ , la taille de son extension est évaluée en fonction de son  $\epsilon_{\text{voisinage}}$  :

$$\Delta A(K) = \frac{|(C \cup K)_\epsilon \setminus C_\epsilon|}{2\epsilon}, \quad (6)$$

Où  $(C \cup K)_\epsilon$  est le voisinage actuel de la fissure,  $C_\epsilon$  est la configuration précédente du voisinage de la fissure et  $K$  est l'élément supprimé à l'étape en cours.

## 5 Description du cas test et résultats numériques

Des données expérimentales sur la fracture en mode mixte du béton utilisées pour comparer les résultats numériques sont ceux de Gálvez et al. [12]. Dans la Figure 4 la géométrie, les forces et les conditions aux limites du test sont montrées. Tous les essais numériques ont été réalisés sur la même géométrie et le même maillage (Élément P1). La Figure 5 présente la comparaison de la trajectoire de la fissure pour le modèle d'Eigenerosion et de TLS. La Figure 6 présente une comparaison de la courbe Force-CMOD (Crack Mouth Opening Displacement) pour le modèle de zone cohésive bilinéaire et le modèle TLS [13].

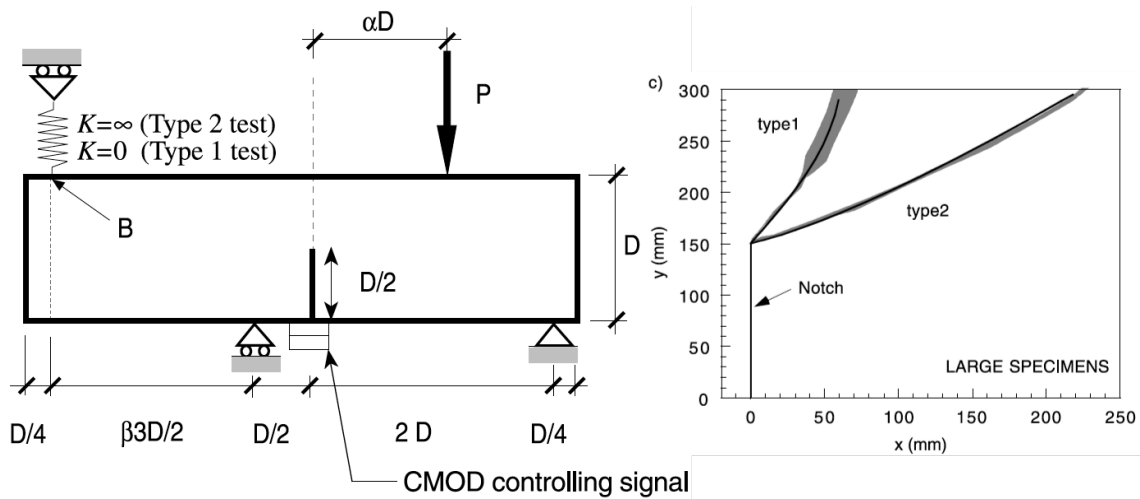


FIGURE 4 – La géométrie, les conditions aux limites du cas test envisagé et des résultats [12].

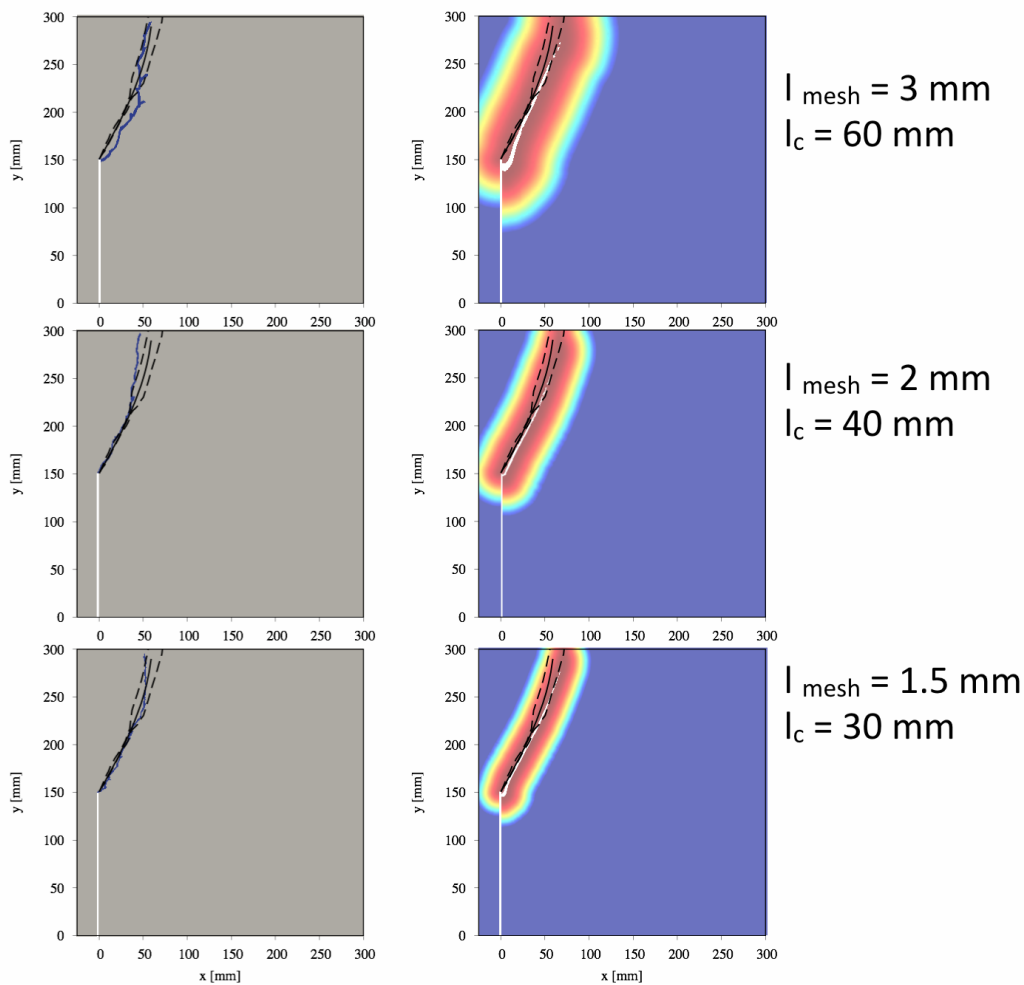


FIGURE 5 – Comparaison de trajet de fissure avec des données expérimentales (en noir) de la méthode d'Eigeneration (à gauche), TLS pour différents paramètres :  $l_{mesh}$  - taille caractéristique du maillage,  $l_c$  - longueur caractéristique de la zone endommagée et  $\epsilon = 3 \times l_{mesh}$ .

## 6 Conclusions

La comparaison des modèles de zones cohésive, de Thick Level set et d'Eigeneration sur des cas de fissuration mixte en milieu quasi-fragile révèle que ces méthodes - au plus récent de leur développement - sont comparables à l'échelle des structures. cependant des différences notables peuvent être révélées sur

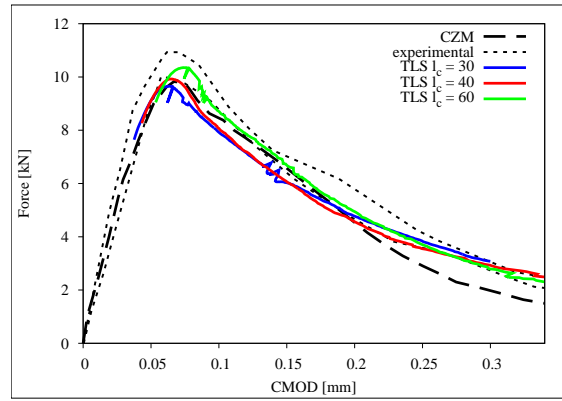


FIGURE 6 – Comparaison de la courbe Force-CMOD pour différentes valeurs de  $l_c$ , enveloppe expérimentale et résultat pour la loi cohésive bilinéaire en noir [12].

la taille de la zone d'élaboration des fissures. Pour ordonnancer rapidement ces méthodes, la méthode d'Eigenerosion donne lieu à la plus petite zone d'élaboration, la méthode de zone cohésive à la plus grande et la méthode Thick Level Set à une valeur intermédiaire que l'utilisateur peut faire évoluer à l'aide du paramètre  $l_c$ . Ces différences en pointe de fissure devraient jouer un rôle plus significatif macroscopiquement dans le cas des milieux fortement hétérogènes.

## Références

- [1] D. Dugdale. *Yielding of steel sheets containing slits*. Journal of the Mechanics and Physics of Solid, 100-104, 1960.
- [2] G. Baranblatt. *The mathematical theory of equilibrium cracks formed by brittle fracture*. Zh. Prkl. Mekh. Tekh. Fiz, Éditeur, 3-56, 1961.
- [3] V. Tvergaard & J. W. Hutchinson. *The relation between crack growth resistance and fracture process parameters in elastic-plastic solids*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 1377 - 1397 , 1992.
- [4] L. Daridon, B. Wattrisse, A. Chrysochoos & M. Potier Ferry. . *Solving fracture problems using an asymptotic numerical method*. Computers & Structures, 476-484, 2011.
- [5] N. Blal, L. Daridon, Y. Monerie et S. Pagano . *Artificial compliance inherent to the intrinsic cohesive zone models : criteria and application to planar meshes*. International Journal of Fracture, vol 1, 71-83, 2012.
- [6] A.A. Griffith. *The Phenomena of Rupture and Flow in Solids*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 100-104, 1920.
- [7] G.A. Francfort, J.-J. Marigo. *Revisiting brittle fracture as an energy minimisation problem*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1319-1342, 1998.
- [8] B. Schmidt, F. Fraternali, M. Ortiz. *Eigenfracture : an eigen deformation approach to variational fracture*. Multiscale Modeling and Simulation, 1237-1266, 2009.
- [9] A. Pandolfi, M. Ortiz. *An Eigenerosion approach to brittle fracture*. International Journal For Numerical Methods In Engineering, 694-714, 2012.
- [10] N. Moës, C. Stolz, P.E. Bernard, N. Chevaugeon. *A level set based model for damage growth : the thick level set approach*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 358-380, 2011.
- [11] P.E. Bernard, N. Moës, N. Chevaugeon. *Damage growth modeling using the Thick Level Set (TLS) approach : efficient discretisation for quasi-static loadings*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 233-236, 2012.
- [12] J.C. Gálvez, M. Elices, G.V. Guinea, J. Planas, *Mixed mode fracture of concrete under proportional and nonproportional loading*. International Journal of Fracture, 267-284, 1998.
- [13] A. Parrilla Gómez, N. Moës, C. Stolz. *Comparison between thick level set (TLS) and cohesive zone models*. Advanced Modelling and Simulation in Engineering Sciences , 2-18, 2015.