

# Méthode de projection modale appliquée à un problème de dynamique multi-contact.

T. Catterou<sup>1,3</sup>, V. Blanc<sup>1</sup>, G. Ricciardi<sup>2</sup>, S. Bourgeois<sup>3</sup>, B. Cochelin<sup>3</sup>

<sup>1</sup> CEA Cadarache – DEN/DEC/SESC/LC2I, 13108 Saint Paul lès Durance, France

<sup>2</sup> CEA Cadarache – DEN/DTN/STCP/LHC, 13108 Saint Paul lès Durance, France

<sup>3</sup> LMA, Centrale Marseille, CNRS UPR 7051, Aix Marseille Université, F-13453 Marseille Cedex13, France

**Résumé** — Ce papier s'intéresse à la méthodologie de calcul de la réponse dynamique de systèmes présentant un grand nombre de zones de contact prédéfinies. L'objectif est de simuler la réponse dynamique d'une structure complexe composée de sous-éléments pouvant entrer en collision, afin de calculer les efforts d'interaction dans le système pour in fine le dimensionner. Après avoir identifié la méthode numérique la mieux adaptée, une calibration de ses paramètres est réalisée par comparaison à un modèle semi-analytique de référence sur un problème simple.

**Mots clefs** — Dynamique, base modale, contact, éléments-finis, méthode de pénalisation.

## Nomenclature

$u(x, t)$ : Flèche de la poutre	$M, C, K$ : Matrice de masse, d'amortissement et de raideur en base physique
$u_0, v_0$ : déplacement et vitesse initiaux	$\bar{M}, \bar{C}, \bar{K}$ : Matrice de masse, d'amortissement et de raideur sur base modale
$q_i(t)$ : Contribution modale du mode $i$	$\xi_i$ : Amortissement structurel associé au mode $i$ .
$\Phi$ : Matrice des vecteurs propres	$K_c, \xi_c$ : Paramètres de raideur de choc et d'amortissement liés à la définition du contact.
$\Phi_i(x)$ : Déformée modale du mode $i$	$R_k$ : Rapport de la raideur du contact avec la raideur de flexion de la poutre

## 1. Introduction

### 1.1. Contexte et objectif industriel

Dans les réacteurs à neutrons rapides, le combustible est contenu dans des « aiguilles », constituées de longs tubes en acier (appelés gaines) ayant un élancement d'environ 200 entourés d'un fil en hélice appelé fil espaceur. (Figure 1a)

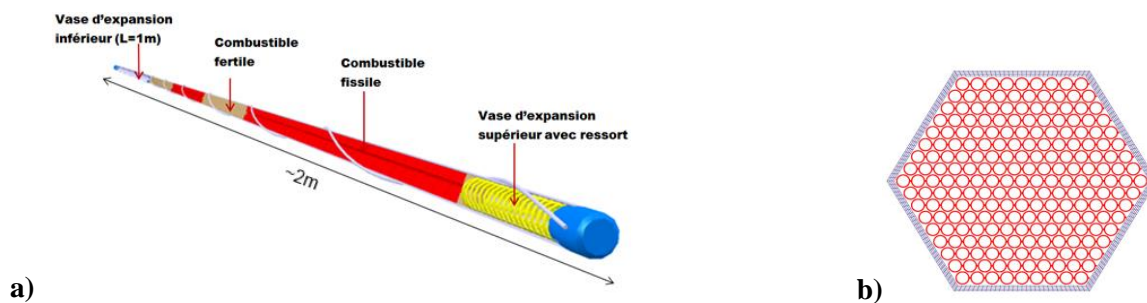
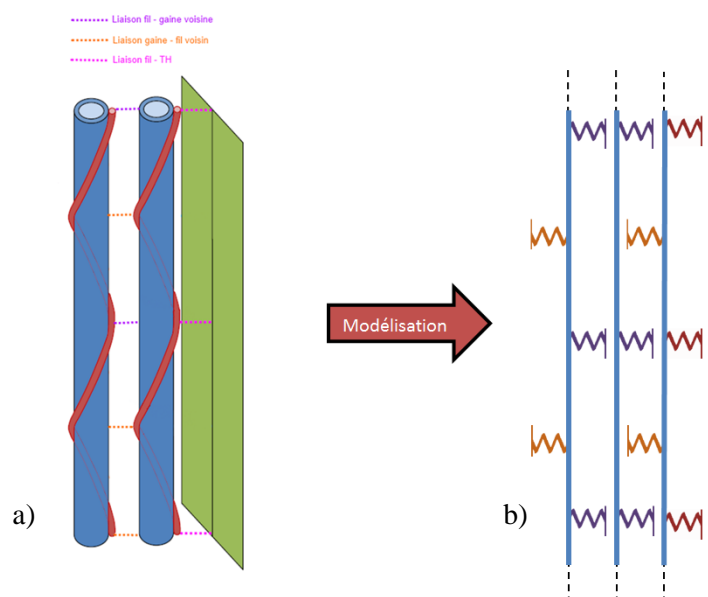


Figure 1 - Aiguille combustible ASTRID (a) et coupe du faisceau d'aiguilles dans un tube hexagonal (b)

Elles sont assemblées dans un faisceau de plusieurs centaines d'aiguilles à l'intérieur d'un tube hexagonal (**Figure 1b**). Ceux-ci forment des assemblages répartis dans le cœur du réacteur. Lors d'une sollicitation dynamique, les assemblages vont s'entrechoquer au niveau d'un bossage local (une plaquette). Le choc induit imposera des accélérations aux aiguilles contenues dans les tubes hexagonaux.

Du fait de la géométrie des aiguilles, les zones de contacts sont identifiables : le fil espaceur d'une aiguille va pouvoir entrer en contact avec la gaine de l'aiguille voisine ou les parois du tube hexagonal tous les pas de fil (**Figure 2a**). Le système peut alors être modélisé en utilisant des poutres et des éléments de contacts ponctuels de type ressort afin de tenir compte de la souplesse des contacts potentiels (**Figure 2b**).



**Figure 2 – Schéma de tronçons d'aiguilles avec emplacement des contacts (a). Modélisation du système par des poutres et des contacts de type ressorts. (b)**

A l'état neuf, il existe un jeu réparti de façon relativement homogène dans le faisceau d'aiguilles. En fonctionnement, les sollicitations thermiques et celles engendrées par l'irradiation (gonflement du matériau, pression interne,...) vont entraîner un rattrapage localement plus ou moins prononcé du jeu. L'objectif industriel est de proposer une méthode de calcul des efforts de contact engendrés par ces sollicitations (séisme, transport, manutention) quel que soit l'état du jeu dans l'assemblage. Un modèle local permettra par la suite d'en déduire précisément les contraintes associées en vue d'un dimensionnement. Les calculs développés dans la suite de l'étude ont été réalisés avec le logiciel élément finis Cast3M pour les approches purement numériques et Scilab pour les calculs de référence.

## 1.2. Problématique du contact en numérique

La modélisation du contact entre solides est un sujet ancien, dont on peut situer les prémices aux travaux de Hertz en 1882 [1] sur le contact entre deux lentilles optiques. De nombreux auteurs ont par la suite enrichi cette description en introduisant le frottement, les composantes tangentielles et les effets dynamiques [2], [3]. La modélisation numérique du contact reste néanmoins très complexe, malgré son omniprésence dans de nombreux domaines technologiques. Ce phénomène apparaît durant

des temps très courts, et provoque des forces et des accélérations très importantes [4]. Ces aspects ont tendance à nuire à la convergence ou à rendre instables les algorithmes de résolution les plus courants [5]. De nombreux schémas d'intégrations spécifiques ont été créés pour résoudre les problèmes de contact, par un redécoupage du pas de temps [6], par conservation d'énergie [7] ou par l'ajout d'une dissipation haute fréquence [8]. On distingue deux grandes familles de schéma, les schémas implicites où la convergence est recherchée à chaque pas de temps et les algorithmes explicites où le calcul est direct. Globalement, les schémas explicites sont plus adaptés pour gérer les problèmes avec des temps de contact très court, les autres schémas ayant des difficultés à converger [5].

Le choix du schéma d'intégration est aussi lié à la façon de modéliser le contact. Les différentes méthodes ont été présentées par Gilardi [4]. Elles peuvent être classées en deux catégories : les contacts « non-réguliers » (non-smooth) pour lesquelles la phase de contact est considérée instantanée, par opposition au contact « continu » ou « lisse » dans lequel on va permettre l'interpénétration entre les objets en vis-à-vis et donc assurer la continuité de la vitesse. La dissipation lors du contact non-régulier est modélisée par un paramètre  $e^*$  de « coefficient de restitution » qui relie la vitesse du point avant et après le contact [9][10][11]. Le contact lisse est géré en introduisant une force dépendante du rapprochement des centres de gravité des solides en contact. Différentes formulations de lois d'efforts sont envisageables [4], celles-ci ont été comparées pour le problème simple du pendule de Newton [12].

Enfin, les calculs dynamiques, et particulièrement lorsque l'on inclut des conditions de contacts, nécessitent une puissance de calcul importante. Des méthodes de simplification existent, notamment la projection sur base modale, qui n'est pas incompatible avec la présence de choc [13]. Sous réserve d'un choix cohérent de troncature modale [14], le nombre de degré de liberté de la structure est considérablement diminué et le calcul est donc d'autant plus court.

### 1.3. Choix de la méthode de résolution numérique

Afin de pouvoir choisir le schéma numérique et la loi d'effort adaptés à notre système, il est nécessaire de définir sur quelles hypothèses il s'appuie. Nous considérerons que le contact est la seule non-linéarité du système : on se place dans le domaine élastique et en petites déformations. Les zones de contact potentiel sont clairement définies au début du calcul. Le système est composé d'un ou plusieurs sous-systèmes indépendants de géométrie similaire (comme pour un pendule de Newton). La raideur des contacts est suffisamment importante vis-à-vis des autres raideurs pour que le temps de contact soit considéré comme court devant le temps caractéristique de la dynamique du système.

Le calcul est réalisé sur base modale du système libre d'effort de contact, ce qui permet de réduire fortement le nombre de degré de liberté du système. Puisque toutes les aiguilles sont semblables il suffit de calculer les modes d'une aiguille seule et de les reporter sur les suivantes. La projection se déroule de la façon suivante [14]:

On part de l'équation de la dynamique écrite sous base physique du système discrétisé:

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = F_{ext} + F_{choc}(u, \dot{u}) \quad (1)$$

On projette le système sur base modale :

$$u(x, t) = \sum \Phi_i(x)q_i(t) \quad (2)$$

$$\Phi^t M \Phi \ddot{q} + \Phi^t C \Phi \dot{q} + \Phi^t K \Phi q = \Phi^t F_{ext} + \Phi^t F_{choc}(u, \dot{u}) \quad (3)$$

Par construction, les matrices  $\bar{M} = \Phi^t M \Phi$  et  $\bar{K} = \Phi^t K \Phi$  sont diagonales. Si l'on considère un amortissement modal, la matrice  $\bar{C}$  sera aussi diagonale. La résolution du système est donc grandement facilitée. Lorsque l'amortissement de la structure est suffisamment élevé, nous utiliserons un schéma d'intégration de type différence centré. L'opérateur permettant de réaliser le calcul explicite sur base modale avec ce type d'algorithme est déjà programmé sur Cast3M (opérateur DYNE). Sinon, il sera nécessaire d'utiliser un schéma tel que celui de Tchamwa [8] qui améliore sa stabilité au détriment de la précision du calcul. A chaque pas de temps, on détermine les déplacements sur base « physique » aux zones de contact. Si les conditions de contact sont atteintes en un nœud, une force de contact est calculée puis projetée sur la base modale. En première approximation, la loi d'effort choisie pour un contact à l'abscisse L est une loi linéaire du type :

$$F = K_c \Delta u(L) + \xi_c \Delta \dot{u}(L) \quad \text{si } \Delta u(L) < 0 \quad ; \quad F = 0 \quad \text{sinon} \quad (4)$$

La méthode numérique appliquée au problème du faisceau 2D présenté Figure 2 est actuellement fonctionnelle et donne des résultats dans un délai raisonnable (quelques minutes). Néanmoins, il sera nécessaire d'étudier la sensibilité du système aux variations de certains paramètres, notamment la répartition du jeu dans le faisceau d'aiguille. Ces études nécessitent de lancer un nombre important de calcul dans différentes configurations.

Afin de trouver le meilleur compromis entre vitesse et précision des calculs, nous allons chercher à choisir aux mieux les paramètres liés au calcul numérique – par exemple le choix du pas de temps, de la troncature modale ou de la discrétisation spatiale – vis-à-vis d'une résolution analytique. Cette recherche d'efficacité justifie la création d'un modèle de référence présenté au §2 et d'une étude paramétrique au §3.

## 2. Construction de la solution de référence

### 2.1 Description du problème

Une des difficultés des calculs numériques de choc est l'absence de références analytiques. Les méthodes sont souvent comparées à des expériences dont les résultats sont difficilement généralisables. Pour pallier à ce manque, nous nous sommes intéressés au problème simple d'une poutre encastrée impactant sur un ressort que nous avons résolu de façon semi-analytique.

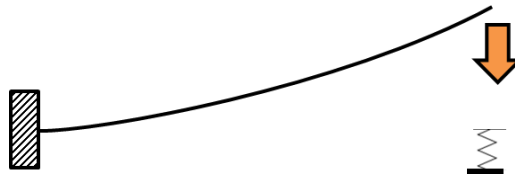


Figure 3 - Poutre encastrée impactant sur un ressort

Cette configuration est similaire au problème industriel présenté au §1.1 : le choc d'un assemblage contre son voisin ou le choc d'une aiguille contre sa voisine correspondent à un lâcher de l'aiguille avec une prédéformation contre un appui rigide. Des essais de lâcher de ce type ont été réalisés par le passé au CEA de Cadarache sur des assemblages combustibles en air ou contenant de l'eau.

## 2.2 Résolution des phases libres et en contact

Nous séparons le problème en deux phases, les instants où la tête de la poutre est en vol (poutre encastrée-libre), et les instants où le contact est activé (poutre encastré-ressort). Dans chacun des cas, nous résolvons le problème linéaire associé sur base modale. Le déplacement de la poutre est décomposé suivant les modes.

On résout l'équation de la dynamique sur chaque mode :

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{q}_i + \omega_i^2q_i = 0 \quad (5)$$

$$q_i(t) = e^{-\xi_i\omega_i t} (A_i \cos(\omega_d t) + B_i \sin(\omega_d t)) \quad (6)$$

$$A_i = \frac{\int u_0 \cdot \Phi_i}{\int \Phi_i \cdot \Phi_i}; B_i = \frac{\int v_0 \cdot \Phi_i}{\omega \int (\Phi_i \cdot \Phi_i)} + \frac{\xi_i}{\omega \sqrt{1-\xi_i^2}} A_i; \omega_d = \omega_i \sqrt{1-\xi_i^2} \quad (7)$$

Les pulsations  $\omega_i$  sont relatives aux deux configurations, encastré-libre ( $\omega_{li}$ ) et encastré-ressort ( $\omega_{ri}$ ). L'équation (6) donne une expression explicite du déplacement dans les deux configurations. Il reste à déterminer l'instant auquel on passe d'une phase à l'autre.

## 2.3 Algorithme de détermination des instants d'activation ou de perte de contact.

Le calcul se déroule de la façon suivante : on donne les conditions initiales  $u_0$  et  $v_0$ . Une formulation théorique du déplacement est posée en fonction des équations (5) et (6). Un algorithme de recherche des racines est ensuite utilisé pour trouver rapidement et précisément le premier instant où le déplacement s'annule. La méthode de la sécante est la plus adaptée au problème, compte tenu du bruit important sur la vitesse lors du choc [15]. L'instant obtenu correspond à un changement de phase, et nous donne des nouvelles conditions initiales pour calculer le mouvement pendant la phase suivante. On réitère la procédure jusqu'à atteindre un nombre de contacts ou un temps final prédéfini. Finalement, le déplacement et la vitesse des points de la poutre peuvent être tracés entre les instants de contacts déterminés précédemment avec un choix de discrétisation quelconque, qui n'influera pas sur le résultat.

## 2.4 Adaptation de l'amortissement

Pour un problème mécanique, l'amortissement d'une structure ne dépend pas de ses conditions aux limites. Or dans cette approche analytique nous résolvons les équations suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{Phase libre} & \text{Phase en contact} \\ \ddot{q}_i + 2\xi_i\omega_{li}\dot{q}_i + \omega_{li}^2q_i = 0 & \ddot{q}_i + 2\xi_i\omega_{ri}\dot{q}_i + \omega_{ri}^2q_i = 0 \end{array} \quad (8)$$

Attribuer le même coefficient modal  $\xi_i$  pour les deux phases conduit à deux modèles d'amortissement structuraux différents (puisque  $2\xi_i\omega_{li} \neq 2\xi_i\omega_{ri}$ ). On définit donc le coefficient d'amortissement pour chaque mode sur l'une des deux bases (encastré libre ou encastré-ressort) puis on effectue des projections de façon à calculer les paramètres modaux associés à l'autre configuration :

$$\bar{C}_l = \begin{bmatrix} 2\xi_1\omega_{l1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 2\xi_N\omega_{lN} \end{bmatrix} - \text{Matrice des termes d'amortissement de la base encastré-libre} \quad (9)$$

$C = \Phi_l \bar{C}_l \Phi_l^t$  – Matrice d'amortissement sur base physique

$\bar{C}_r = \Phi_r^t C \Phi_r$  – Matrice des termes d'amortissement de la base encastré-ressort

En pratique, on se donne  $\xi_{li}$ , on calcule  $C$  puis  $\bar{C}_r$  et on ne conserve que les termes diagonaux de la matrice  $\bar{C}_r$ . Les participations modales pour la base encastré ressort sont obtenus par la formule suivante :

$$\xi_{ri} = \frac{\bar{C}_{rii}}{2\omega_{ri}} \quad (10)$$

## 2.5 Conclusion sur le calcul de référence

Cette méthode permet de simuler analytiquement la chute d'une poutre contre un ressort. Elle est originale du fait qu'il s'agit d'une résolution formelle d'un problème de contact qui ne repose sur aucune hypothèse autre que celles de la théorie des poutres. Elle sera une référence pour vérifier la viabilité de nos résultats numériques. Cependant, elle est difficilement applicable à des configurations plus complexes (contacts multiples, poutres non droites), puisque dans ces cas-là, la résolution analytique du problème devient irréalisable. Typiquement, la résolution du système faisceau complet (**Figure 1**) ne peut pas être faite avec cette méthode.

## 3. Calibration des paramètres de la méthode numérique

### 3.1 Equivalence entre les approches numérique et analytique

Soit le problème présenté en **Figure 3** de lâcher d'une poutre en flexion contre un appui de rigidité  $K$ . Le problème a été résolu avec l'approche numérique du §1.3 et avec notre méthode de référence. On observe les résultats en fonction du paramètre adimensionnel  $R_k = \frac{K_c L^3}{3EI}$ , rapport de la raideur du ressort avec la raideur en flexion de la poutre. La **Figure 4** nous montre qu'avec des choix de paramètres numériques adéquats, les deux approches sont équivalentes. Le déplacement en tête de poutre lors du contact est directement proportionnel aux efforts de contact que l'on souhaite mesurer pour l'application industrielle.

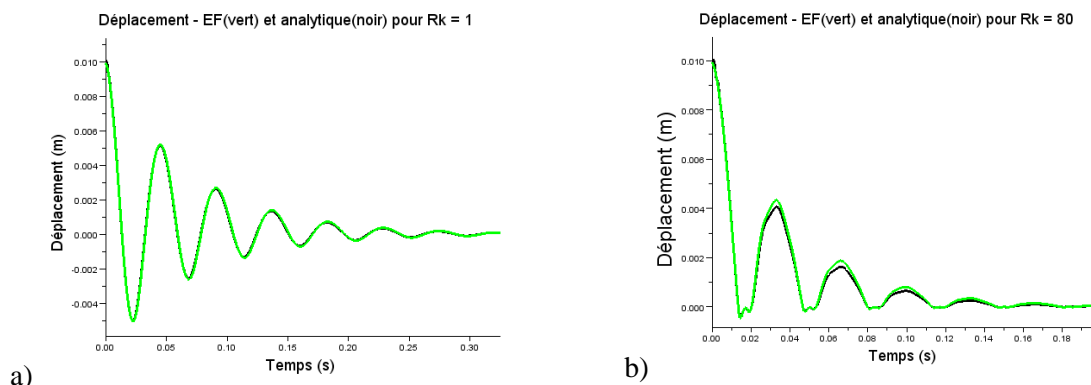


Figure 4 - Déplacement de la tête de la poutre pour  $R_k = 1$  (a) et  $R_k = 80$  (b)

### 3.2 Approximation de l'approche numérique

L'approche numérique fait intervenir certaines approximations qui n'apparaissent pas dans notre modèle de référence. Le calcul numérique est réalisé de manière discrète, en temps et en espace tandis que le calcul analytique est résolu de manière formelle. Les paramètres de la discrétisation vont jouer sur la précision et la stabilité du schéma d'intégration. De plus, nous n'utilisons en numérique uniquement les modes de la base encastré-libre, il est donc nécessaire que la troncature modale de la base utilisée soit suffisamment haute pour reproduire les modes lors du contact.

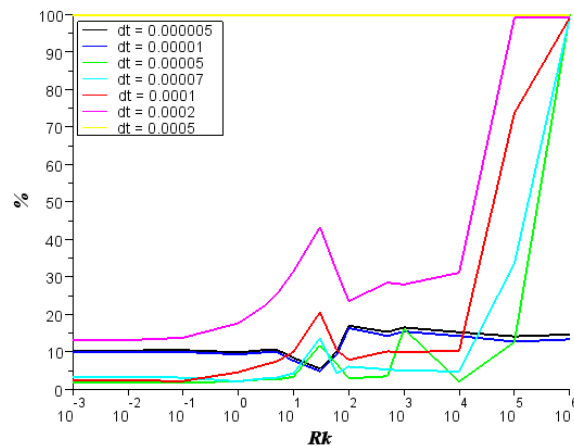
### 3.3 Estimation des paramètres numériques idéaux

Les paramètres numériques choisies (discrétisation, troncature modale) vont générer éventuellement des erreurs où une instabilité des résultats. Une étude paramétrique va nous permettre de choisir des valeurs satisfaisantes du point de vue de la stabilité et de la précision de la méthode tout en cherchant à minimiser la puissance de calcul nécessaire à la résolution du problème.

Un exemple est donné **Figure 5** pour le choix du pas de temps. Pour pouvoir comparer la réponse numérique avec la référence, nous utiliserons une fonction d'erreur qui compare les densités spectrales de puissances ( $\Gamma$ ) de deux signaux résultants :

$$f_{err} = \max(|\Gamma_{num} - \Gamma_{ref}|) / \max(|\Gamma_{num}|, |\Gamma_{ref}|) \quad (11)$$

On réalise un nouveau calcul pour un nombre important de valeurs de  $R_k$  et on reporte sur la **Figure 5** l'erreur associée calculée avec la formule (8). La fonction d'erreur étant très sévère, on peut considérer que les deux signaux sont identiques si la valeur de la fonction est inférieure à 20%.



**Figure 5 - Fonction d'erreur pour différents pas de temps suivant le rapport  $R_k$**

La stabilité du système est dépendante du choix de  $dt$  et du paramètre  $R_k$ . En effet, plus la raideur du contact est élevée, plus les fréquences sollicitées lors du choc seront grandes, et donc le schéma sera plus facilement instable. On remarque que l'on augmente légèrement le domaine de validité de la méthode (**Figure 5**) en diminuant le pas de temps de calcul avec cependant une légère perte de précision pour les valeurs faibles de  $R_k$ . A noter que ces calculs permettent de retrouver la valeur du pas de temps critique de K.J. Bath [5] pour un schéma d'intégration du type différences finies,  $\Delta t_c = \frac{1}{4f_{maxi}} = 1,25 \cdot 10^{-4}$  à partir duquel le calcul devient totalement instable pour tout  $R_k$ .

## 4. Conclusion et perspectives

Il existe de nombreuses manières de traiter un problème de contact en dynamique. Nous avons choisi une méthodologie de résolution rapide d'un problème multi-contact faisant intervenir un grand nombre de sous-système semblables. En conséquence, afin de choisir les paramètres numériques les mieux adaptés pour limiter le temps de calcul et garantir la précision du résultat, un modèle de référence est nécessaire. La comparaison entre les résultats numériques et ce calcul de référence permet de vérifier la correspondance entre les deux approches. De plus, grâce à cet outil analytique, il est possible de définir le domaine de validité de la méthode numérique en fonction des paramètres numériques de discrétisation et de troncature modale, même si le problème résolu est non-linéaire.

Une fois que le domaine de validité de la méthode numérique employé sera bien défini, nous pourrons effectuer une analyse de sensibilité aux paramètres caractéristiques de l'assemblage, tels que la raideur des contacts ou la valeur des jeux et leur répartition à l'intérieur du faisceau. Ces études vont aussi permettre de savoir si une modélisation homogénéisée du faisceau est possible. Un banc d'essai est en cours de fabrication au CEA (livraison prévue juin 2017) ; il permettra de valider le modèle.

## Références

- [1] H. Hertz, D. E. Jones, and G. A. Schott, *Miscellaneous papers*. London: Macmillan, New York, Macmillan and co., 1896.
- [2] K. L. Johnson, *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, 1985.
- [3] W. J. Stronge, *Impact Mechanics*, New Ed. Cambridge England; New York: Cambridge University Press, 2004.
- [4] G. Gilardi and I. Sharf, "Literature survey of contact dynamics modelling," *Mech. Mach. Theory*, vol. 37, no. 10, pp. 1213–1239, 2002.
- [5] K.-J. Bathe, *Finite Element Procedures*. Klaus-Jurgen Bathe, 2006.
- [6] K.-J. Bathe, "Conserving energy and momentum in nonlinear dynamics: A simple implicit time integration scheme," *Comput. Struct.*, vol. 85, no. 7–8, pp. 437–445, Apr. 2007.
- [7] V. Chawla and T. A. Laursen, "Energy consistent algorithms for frictional contact problems," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 42, no. 5, pp. 799–827, Jul. 1998.
- [8] B. Tchamwa, "Contribution à l'étude des méthodes d'intégration directe explicites en dynamique non linéaire des structures," Thèse, Nantes, 1997.
- [9] M. Jean, "The non-smooth contact dynamics method," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 177, no. 3, pp. 235–257, Jul. 1999.
- [10] T. Schindler and V. Acary, "Timestepping schemes for nonsmooth dynamics based on discontinuous Galerkin methods: Definition and outlook," *Math. Comput. Simul.*, vol. 95, pp. 180–199, Jan. 2014.
- [11] C. Thornton, "Coefficient of Restitution for Collinear Collisions of Elastic-Perfectly Plastic Spheres," *J. Appl. Mech.*, vol. 64, no. 2, pp. 383–386, Jun. 1997.
- [12] C. M. Donahue, C. M. Hrenya, A. P. Zelinskaya, and K. J. Nakagawa, "Newton's cradle undone: Experiments and collision models for the normal collision of three solid spheres," *Phys. Fluids 1994-Present*, vol. 20, no. 11, p. 113301, Nov. 2008.
- [13] J. Antunes, "Methods for the Dynamical Analysis of Nonlinear Structures", IPSI, Paris, France, 1991.
- [14] N. F. Rieger, "The relationship between finite element analysis and modal analysis.," *Sound Vib.* 20, p. 16, 1986.
- [15] B. Nath Datta, "Numerical methods for the root finding problem." Northern Illinois University, 2013.