

Méthode de contrôle pour le calcul de la solution périodique en espace-temps d'un problème d'évolution

P. Le Tallec¹, U. Khristenko^{1,2,3}

¹ LMS, École Polytechnique, CNRS, Université Paris-Saclay, patrick.letallec@polytechnique.edu, khristen@lms.polytechnique.fr

² MFP Michelin, khristen@lms.polytechnique.fr

³ Inria, Université Paris-Saclay, khristen@lms.polytechnique.fr

Résumé — Ce travail présente une méthode de contrôle pour calculer la solution périodique établie d'un problème d'évolution linéaire avec des conditions de périodicité dans l'espace-temps. L'idée consiste à modifier le problème à valeur initiale en introduisant un terme de «feedback control», basé sur l'erreur de périodicité et accélérant la convergence de la solution vers sa limite asymptotique. Pour justifier les résultats théoriques, la méthode est appliquée à un problème modèle 3D de roulage stationnaire d'un pneu viscoélastique avec sculpture périodique.

Mots clés — contrôle optimal, solution périodique.

1 Motivation

On s'intéresse à la solution périodique établie d'un problème d'évolution. Les méthodes basées sur le calcul direct requièrent l'inversion de matrices ayant pour dimension le nombre de degrés de liberté multiplié par le nombre de pas de temps d'une période. Dans les applications industrielles, afin d'éviter l'inversion de matrices si larges, l'état dynamique périodique est d'habitude calculé comme une limite asymptotique de la solution du problème à valeur initiale avec des données initiales arbitraires. Dans ce cas, on ne s'intéresse pas vraiment à l'histoire d'évolution, mais seulement au temps de convergence. Le calcul peut prendre beaucoup de temps pour des problèmes "visqueux", i.e. quand l'effet de mémoire est fort.

Bien que la limite asymptotique soit périodique, la solution du problème à valeur initiale ne l'est pas. Alors la périodicité de la solution souhaitée peut être considérée comme une information supplémentaire (observation), ce qui permet d'appliquer des techniques du contrôle. Pour cela, on modifie la loi d'évolution originale en ajoutant un terme de contrôle, basé sur l'erreur de périodicité. Ce terme est censé faire tendre la solution du problème vers sa limite périodique.

Dans ce cadre, le présent travail est dédié au développement de méthodes d'accélération pour les solutions de problèmes périodiques. Ce type de problèmes se rencontre, par exemple, dans la modélisation des contractions cardiaques [2]. Un autre exemple est un roulage stationnaire d'un pneu viscoélastique [1] avec sculpture périodique. Dans ce cas, l'état établi satisfait à la condition de périodicité "roulant", qui inclut les décalages à la fois dans le temps et l'espace. C'est-à-dire que l'état \underline{u} en tout point \underline{x} est le même que celui au point correspondant de la sculpture suivante dans le passé :

$$\underline{u}(t, \underline{x}) = R_{\omega T}^{-1} \underline{u}(t - T, R_{\omega T} \underline{x})$$

où R_θ désigne une rotation à l'angle θ , et ω est une vitesse angulaire constante du roulage. Pour ces problèmes, on considère la condition de périodicité en espace-temps comme une observation et on l'utilise pour développer une méthode d'accélération. L'idée principale consiste à modifier le problème original en introduisant un terme de "feedback control" [2, 3, 4] basé sur l'erreur de périodicité, qui accélère la convergence vers la solution périodique établie.

2 Analyse analytique

2.1 Problème abstrait

Considérons un problème d'évolution linéaire abstrait dans un cadre fonctionnel général avec condition de périodicité en espace-temps :

$$\partial_t u + Au = f \quad (1)$$

$$u(t) = Su(t - T) \quad (2)$$

défini dans l'espace de Hilbert H muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On fait les hypothèses fondamentales suivant qui sont d'habitude satisfaites dans le cadre des problèmes d'évolution périodiques :

- l'opérateur A est H -elliptique, i.e. il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall u \in H \langle Au, u \rangle \geq C\|u\|^2$;
- l'opérateur S est unitaire et représente le décalage dans l'espace;
- les opérateurs A et S commutent.

En pratique, la solution de ce problème périodique est le plus souvent calculée comme une limite asymptotique de la solution du problème à valeur initiale (1) avec des données initiales arbitraires. Grâce à l'ellipticité, cette limite existe. Dans le cadre de ce travail, on va proposer une méthode de contrôle optimal qui accélère la convergence de la solution du problème à valeur initiale vers la solution périodique souhaitée de (1)-(2).

2.2 Problème contrôlé

Notre méthode de contrôle consiste à construire un correcteur à la base d'une observation. On modifie donc le problème original en introduisant un terme de contrôle [3, 4] basé sur l'erreur d'observation :

$$\partial_t u + Au + \overbrace{G \left(u(t) - Su(t - T) \right)}^{\text{terme de contrôle}} = f, \quad (3)$$

$$u(t) = u_0(t), \quad t \in [-T, 0]. \quad (4)$$

où $u_0(t)$ représente les données initiales, et $u(t) - Su(t - T)$ est l'erreur d'observation. L'opérateur de gain G qui agit sur cette erreur, est à déterminer. C'est clair que la solution $u(t, x)$ du problème modifié (3)-(4) converge vers la solution du problème périodique (1)-(2). La question est de construire un opérateur de gain G qui fournit la convergence la plus rapide. On suppose que $G = G(A, H)$ est une fonction analytique de A et S , et donc commute avec eux.

2.3 Résultat principal : contrôle optimal

Le résultat principal de ce travail comprend le contrôle optimal pour le problème décrit, et se formule par le théorème suivant.

Theorem 1. *Pour le problème contrôlé (3)-(4), l'opérateur de gain G optimal, qui fournit la convergence la plus rapide de la solution vers la solution périodique souhaitée du problème original (1)-(2), s'écrit sous forme*

$$G = -\frac{1}{T} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot (e^{-TA} S^{-1})^n \quad \text{avec } c_n = \frac{n^{n-1}}{n! e^n}. \quad (5)$$

Vu que le terme général de cette série disparaît rapidement, on peut se limiter en pratique aux premiers termes.

Notons que e^{-tA} est la solution fondamentale du problème non-contrôlé, i.e. $u(t, x) = e^{-tA} u(0, x)$ quand $G \equiv 0$. C'est-à-dire que e^{-TA} joue le rôle du décalage dans le temps pour la solution non-contrôlée. Ainsi, le terme de contrôle proposé peut être interprété comme une correction de la solution courante par annulation de toutes les futures erreurs de périodicité décalées dans le temps :

$$G \Delta u(t) \simeq -\frac{1}{T} \sum_{n=1}^{\infty} c_n S^{-n} \Delta u(t + nT), \quad (6)$$

où l'erreur de périodicité est

$$\Delta u(t) = u(t) - Su(t - T). \quad (7)$$

L'accélération fournie par le contrôle optimal croît avec le temps de relaxation du problème original. Ainsi, l'efficacité de la méthode est négligeable pour les problèmes rapidement convergents (le cas qui n'est pas vraiment d'actualité), et devient le plus en plus efficace pour les problèmes "visqueux" quand l'effet de mémoire augmente.

2.4 Approximation par la valeur propre minimale

L'application du contrôle proposé requiert le calcul d'exponentielle de la matrice de rigidité (associée à A) ou la connaissance de la matrice de monodromie (associée à e^{-TA}). Par contre, le calcul d'exponentielle d'une matrice est assez cher numériquement. Alors si on veut utiliser en pratique la technique proposée, il faut développer une approche appropriée (moins cher et plus simple) qui permettrait d'éviter le calcul d'exponentielle des matrices.

L'idée consiste à approximer l'opérateur A par sa valeur propre minimale (en valeur absolue) dans la construction du contrôle. C'est-à-dire, dans la formule du contrôle optimal (5), on remplace A par $\alpha_0 Id$, où Id désigne l'identité et $\alpha_0 = \min\{\alpha \mid \exists v \in H : Av = \alpha v\}$. On obtient donc un opérateur de gain modifié :

$$\tilde{G} = -\frac{1}{T} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot (e^{-T\alpha_0} S^{-1})^n \quad \text{avec } c_n = \frac{n^{n-1}}{n! e^n}, \quad (8)$$

où l'exponentielle $e^{-T\alpha_0}$ est désormais un scalaire.

Il apparaît que sous une hypothèse raisonnable sur S , le contrôle modifiée propose une accélération très proche (et même asymptotiquement équivalente) de l'accélération optimale.

3 Application

Afin de justifier les résultats théoriques, la méthode élaborée a été appliquée sur un problème modèle 3D. On considère un roulage stationnaire d'un pneu viscoélastique [1] avec sculpture périodique, en présence de contact avec le sol. Dans notre approche, la périodicité de la sculpture n'est pas présentée par modification de la géométrie, mais par modification du matériau. Ainsi, notre modèle est un simple anneau viscoélastique, où les paramètres du matériau (module de Young et coefficient de viscosité) sont périodiques en fonction de l'angle et disparaissent dans les zones vides (Figure 1). La viscoélasticité implique qu'on a un problème d'évolution en termes des déformations. On cherche l'état établi périodique dans l'espace-temps, ce qui est la limite asymptotique du problème à valeur initiale, où les données initiales peuvent être arbitraires.

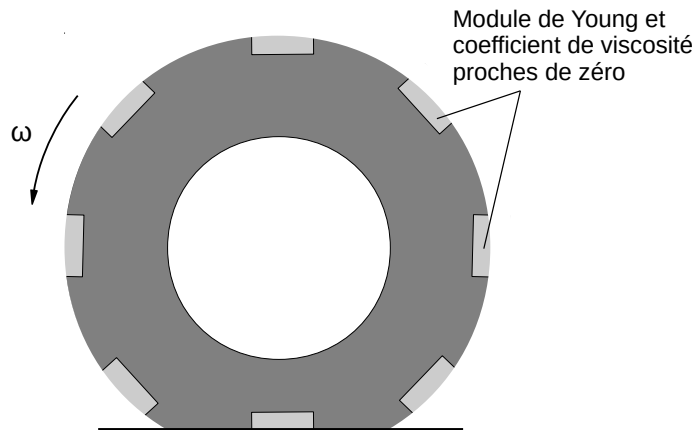


FIGURE 1 – Profil du modèle schématique

Le contact est supposé être un glissement idéal, i.e. sans frottement, et il n'y a donc qu'une contribution normale à la surface de contact. Pour rester dans le cadre linéaire, la force de contact est présentée simplement par un terme libre prédéfini et la zone de contact est fixe. Par ailleurs, pour faire une première tentative d'utilisation de la méthode pour calculer un problème non-linéaire, on a également considéré le cas du vrai contact avec une surface plane, où la force et la zone de contact dépendent des déplacements de manière non-linéaire [5].

La simulation numérique, implémentée par méthode d'éléments finis, a démontré que la solution contrôlée converge effectivement plus vite que celle non contrôlée. En outre, le contrôle modifié (approximation à valeur propre minimale) fournit une accélération très proche d'optimum. Enfin, on a vérifié que l'efficacité de la méthode croît avec le temps de relaxation du problème, i.e. quand l'effet de mémoire est fort.

Les résultats similaires sont obtenus dans le cas non-linéaire (Figure 2). Les graphiques sur la Figure 2 présentent l'évolution en temps de la norme l_2 de la solution (déplacements) à gauche et de l'erreur de périodicité à droite. Le cas non contrôlé est marqué en noir, le contrôle optimal – en rouge, et le contrôle modifié – en bleu. Les lignes verticales indiquent l'instant de convergence.

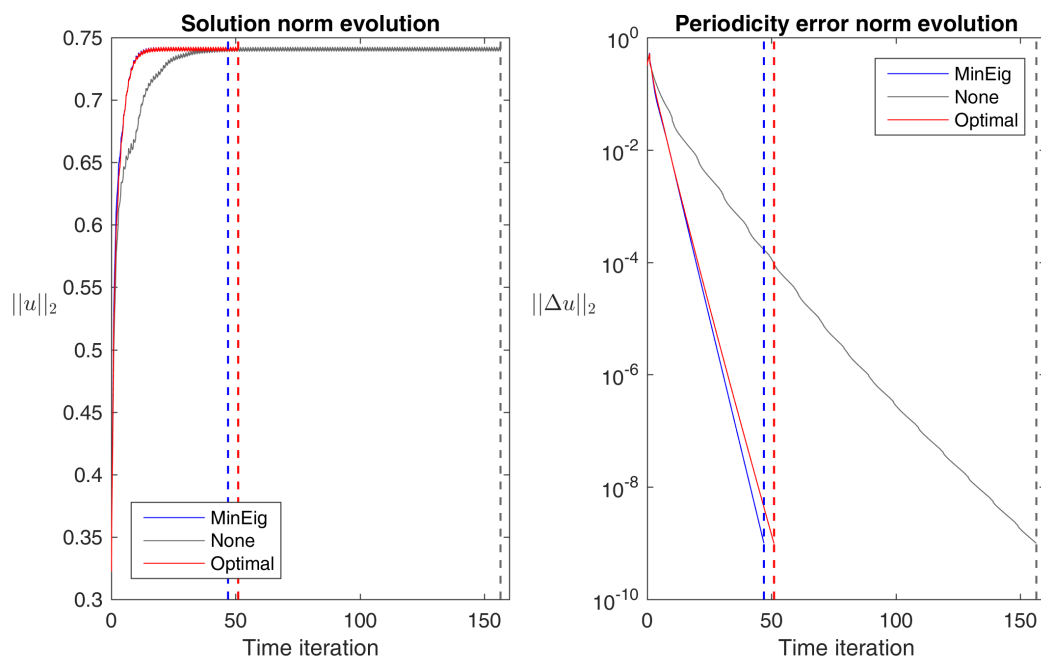


FIGURE 2 – Résultats numériques

4 Conclusion

Pour résumer, dans ce travail on a présenté une nouvelle méthode de contrôle pour calculer la solution périodique établie d'un problème d'évolution avec des conditions de périodicité dans l'espace-temps. Le procédé consiste à accélérer la convergence de la solution du problème à valeur initiale (avec des données initiales arbitraires) vers sa limite asymptotique, qui est la solution périodique souhaitée. Le terme de contrôle optimal proposé intervient comme une correction de la solution courante par les erreurs de périodicité futures.

L'efficacité de la méthode croît avec le temps de relaxation du problème. Ainsi, la méthode n'étant pas très utile pour les problèmes qui convergent rapidement, devient de plus en plus efficace quand l'effet de mémoire croît (cas d'intérêt).

Pour justifier les résultats théoriques, la méthode élaborée a été appliquée sur un problème modèle 3D de roulage stationnaire d'un pneu viscoélastique avec sculpture périodique. La simulation numérique a démontré qu'effectivement la solution contrôlée converge plus vite que celle non contrôlée, ainsi que l'efficacité de la méthode croît avec l'effet de mémoire.

Références

- [1] P. Le Tallec, C. Rahier. *Numerical models of steady rolling for non-linear viscoelastic structures in finite deformations*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 37(7) :1159-1186, 1994.
- [2] P. Moireau. *Assimilation de données par filtrage pour les systèmes hyperboliques du second ordre. Applications à la mécanique cardiaque*, PhD thesis, Citeseer, 2009.
- [3] P. Hövel, E. Schöll. *Control of unstable steady states by time-delayed feedback methods*, Physical Review E, 72(4) :046203, 2005.
- [4] K. Pyragas. *Analytical properties and optimization of time-delayed feedback control*, Physical Review E, 66(2) :026207, 2002.
- [5] P. Wriggers. *Computational contact mechanics*, Springer Science & Business Media, 2006.