

Nouvelles méthodes d'intégration pour traiter la plasticité en X-FEM.

A. Martin¹, M. Berkane¹, P. Massin¹, N. Valoroso²

¹ IMSIA - UMR EDF/CNRS/CEA/ENSTA 9219, Université Paris-Saclay,
alexandre.martin@cns.fr; malik.berkane@edf.fr; patrick.massin@ensta-paristech.fr

² Dipartimento di Ingegneria, Università di Napoli Parthenope, nunzianta.valoroso@uniparthenope.it

Résumé — La méthode d'intégration utilisée classiquement en X-FEM fait dépendre la position des points d'intégration de la position de la fissure, ce qui convient difficilement à l'étude de la propagation d'une fissure dans un milieu plastifié. En effet, des étapes de projection de champs sont alors nécessaires. Afin de s'en affranchir, cette contribution propose deux approches alternatives. La première s'appuie sur les schémas d'intégration standards tandis que la seconde propose de différencier les points d'intégration des points où le comportement est évalué. Les méthodes proposées se limitent aux cas des interfaces.

Mots clés — Interfaces, Méthode des éléments finis étendue, Schémas d'intégration.

1 Motivation et objectifs

La méthode X-FEM [5] fournit un cadre souple pour mener des analyses en présence de fissures ou d'interfaces. La description de la fissure par des fonctions de niveau, ou *level sets* permet de représenter la fissure indépendamment du maillage et d'étudier sa propagation, sans nécessairement recourir à des opérations de remaillage. Le schéma d'intégration numérique utilisé tient compte de la discontinuité éventuelle des champs au sein des éléments traversés par la fissure et la position des points d'intégration dépend de la position de cette discontinuité (*cf.* FIGURE 1a). Elle évolue donc naturellement au cours de la propagation de la fissure et des opérations de projection de champs et de rééquilibrage sont nécessaires *a priori* dans le cas d'un matériau élasto-plastique.

Afin de s'affranchir des étapes de projection, Elguedj *et al.* [3] ont proposé d'utiliser un sous-découpage des éléments, indépendant de la position de la fissure, pour définir une grille régulière de points d'intégration où l'écoulement plastique est évalué. La FIGURE 1b illustre la position des points d'intégration dans le cas du quadrangle.

L'inconvénient de cette méthode est son coût élevé en temps de calcul du fait du nombre élevé de points d'intégration (64 dans le cas bidimensionnel et 512 dans le cas tridimensionnel, *cf.* [7]). Dans cette contribution, deux approches alternatives sont proposées. La première repose sur la méthode proposée

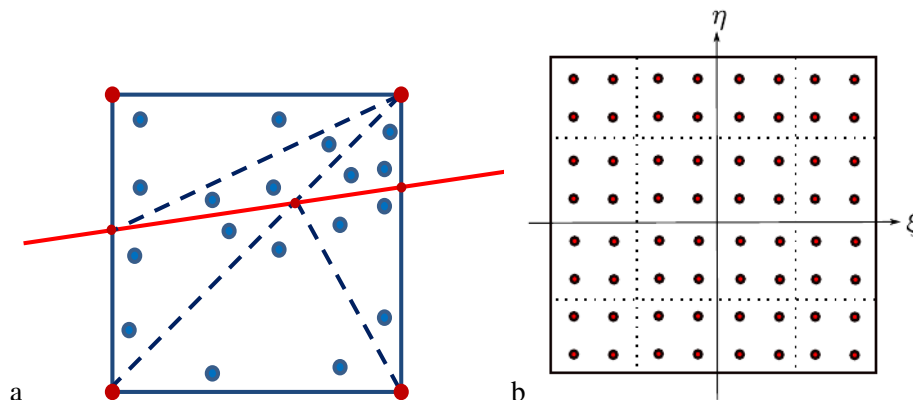


FIGURE 1 – Position des points d'intégration utilisés dans le cas de l'intégration X-FEM classique (a) et de la méthode proposée par Elguedj *et al.* (b), d'après [7]. Les sous-cellules sont représentées en pointillés.

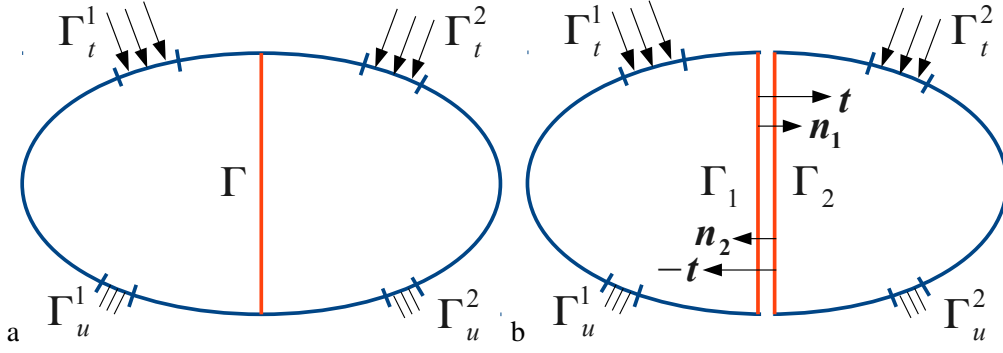


FIGURE 2 – Notations du problème (a) configuration initiale et (b) configuration déformée.

par Ventura [8] pour éliminer le découpage en sous-cellules d'intégration utilisé classiquement en X-FEM et la deuxième est une méthode originale basée sur une différenciation entre les points d'intégration et les points de calcul de l'écoulement plastique. La méthode de Ventura étant restreinte aux problèmes d'interface, seul ce type de problème est investigué.

2 Position du problème

Soit un corps Ω de frontière $\partial\Omega$. La frontière $\partial\Omega$ est composée des ensembles $\Gamma_u = \Gamma_u^1 \cup \Gamma_u^2$, $\Gamma_t = \Gamma_t^1 \cup \Gamma_t^2$ et Γ tels que $\partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_t \cup \Gamma$. Une force volumique \underline{f} est appliquée sur Ω . Une traction \underline{T} est appliquée sur Γ_t et une traction \underline{t} est appliquée sur les lèvres Γ_1 et Γ_2 de l'interface Γ . Le déplacement \underline{w} est imposé sur Γ_u . Les notations précédentes sont illustrées FIGURE 2. Les équations d'équilibre et les conditions aux limites sont :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\underline{\sigma}) + \underline{f} &= \underline{0}, \text{ dans } \Omega, \\ \underline{\sigma} \cdot \underline{n} &= \underline{T}, \text{ sur } \Gamma_t, \\ \underline{\sigma} \cdot \underline{n}_1 &= \underline{t}, \text{ sur } \Gamma_1, \\ \underline{\sigma} \cdot \underline{n}_2 &= -\underline{t}, \text{ sur } \Gamma_2, \\ \underline{u} &= \underline{w}, \text{ sur } \Gamma_u, \end{aligned}$$

où \underline{n} , \underline{n}_1 est \underline{n}_2 sont les normales sortantes de Γ_t , Γ_1 et Γ_2 respectivement, $\underline{\sigma}$ est le tenseur des contraintes de Cauchy et \underline{u} est le vecteur des déplacements.

2.1 Formulation variationnelle

L'ensemble des champs de déplacement cinématiquement admissibles est défini par :

$$\mathcal{U} = \{ \underline{v} \in H^1(\Omega \setminus \Gamma) : \underline{v} \text{ peut être discontinu sur } \Gamma, \underline{v} = \underline{w} \text{ sur } \Gamma_u \}.$$

L'ensemble des champs de déplacement virtuels est défini par :

$$\mathcal{U}_0 = \{ \underline{v} \in H^1(\Omega \setminus \Gamma) : \underline{v} \text{ peut être discontinu sur } \Gamma, \underline{v} = \underline{0} \text{ sur } \Gamma_u \}.$$

La formulation variationnelle du problème est : trouver $\underline{u} \in \mathcal{U}$ tel que

$$\forall \underline{v} \in \mathcal{U}_0, \int_{\Omega} \underline{\sigma}(\underline{u}) : \underline{\varepsilon}(\underline{v}) d\Omega - \int_{\Omega} \underline{f} \cdot \underline{v} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \underline{T} \cdot \underline{v} d\Gamma - \int_{\Gamma} \underline{t} \cdot \llbracket \underline{v} \rrbracket d\Gamma = 0, \quad (1)$$

où $\underline{\varepsilon}$ est le tenseur des déformations linéarisé, $\llbracket \underline{v} \rrbracket = \underline{v}_1 - \underline{v}_2$ est le saut de déplacement et \underline{v}_1 et \underline{v}_2 sont les déplacements virtuels sur Γ_1 and Γ_2 respectivement.

2.2 Problème discret

Le vecteur des déplacements nodaux \underline{u}_h est composé d'une partie continue \underline{u}_r et d'une partie discontinue \underline{u}_d de sorte que la partition de l'approximation locale du champ de déplacement est :

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} \underline{N} & \underline{HN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{u}_r \\ \underline{u}_d \end{Bmatrix},$$

où N sont les fonctions de forme éléments finis et H est la valeur de la fonction d'Heaviside définie par :

$$H(\underline{x}) = \begin{cases} +1 & \text{si } lsn(\underline{x}) \geq 0 \\ -1 & \text{si } lsn(\underline{x}) < 0 \end{cases}.$$

où $lsn(\underline{x})$ est la valeur de la *level set* normale au point $M(\underline{x})$, la *level set* normale représentant la distance signée du point $M(\underline{x})$ à l'interface Γ , avec une orientation arbitraire si l'équation de la *level set* normale n'est pas donnée explicitement. Soient :

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{\underline{x} \in \Omega \setminus \Gamma : lsn(\underline{x}) > 0\}, \\ \Omega_2 &= \{\underline{x} \in \Omega \setminus \Gamma : lsn(\underline{x}) < 0\}, \end{aligned}$$

de sorte que $\Gamma_1 \subset \partial\Omega_1$ et $\Gamma_2 \subset \partial\Omega_2$. Dans l'ensemble de cette étude seules les fonctions de forme polynomiales associées aux éléments finis linéaires sont considérées. La déformation est approximée par

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}) = [\mathbf{B} \quad H\mathbf{B}] \begin{Bmatrix} u_r \\ u_d \end{Bmatrix},$$

où $\mathbf{B} = \nabla_s N$ et ∇_s l'opérateur gradient symétrique.

Muni de ces notations, la discrétisation de la formulation variationnelle (1) s'écrit :

$$\underline{\underline{f}}^{int}(\underline{u}_h) - \underline{\underline{f}}^{ext} = 0.$$

où $\underline{\underline{f}}^{int}$ est le vecteur des forces internes :

$$\underline{\underline{f}}^{int}(\underline{u}_h) = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \\ H\mathbf{B}^T \end{bmatrix} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_h)) d\Omega,$$

et $\underline{\underline{f}}^{ext}$ est le vecteur des forces externes :

$$\underline{\underline{f}}^{ext} = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \mathbf{N}^T \\ H\mathbf{N}^T \end{bmatrix} \underline{\underline{f}} d\Omega + \int_{\Gamma_i} \begin{bmatrix} \mathbf{N}^T \\ H\mathbf{N}^T \end{bmatrix} \underline{\underline{t}} d\Gamma + \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 2\mathbf{N}^T \end{bmatrix} \underline{\underline{t}} d\Gamma.$$

La non-linéarité du problème discret est traitée classiquement par la méthode de Newton-Raphson. Soit un pas de chargement i et une itération n , l'incrément de déplacement $\underline{\underline{\delta u}}_{h_i}^n$ est solution du système linéaire :

$$\mathbf{K}_T(\underline{u}_{h_i}^{n-1}) \underline{\underline{\delta u}}_{h_i}^n = \underline{\underline{f}}_i^{ext} - \underline{\underline{f}}^{int}(\underline{u}_{h_i}^{n-1}),$$

où \mathbf{K}_T est la matrice de rigidité tangente :

$$\mathbf{K}_T(\underline{u}_h) = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \\ H\mathbf{B}^T \end{bmatrix} \mathbf{E}_T(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_h)) [\mathbf{B} \quad H\mathbf{B}] d\Omega,$$

avec \mathbf{E}_T la matrice de comportement tangent :

$$\mathbf{E}_T(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}).$$

3 Intégration numérique

Soit un élément X-FEM occupant le volume Ω_e : cet élément est coupé par l'interface Γ qui le divise en deux sous-éléments occupant les volumes $\Omega_e^1 \in \Omega_1$ et $\Omega_e^2 \in \Omega_2$. En remarquant que $H^2 = 1$ la matrice de rigidité tangente élémentaire \mathbf{K}_e s'écrit :

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \mathbf{E}_T \mathbf{B} & H\mathbf{B}^T \mathbf{E}_T \mathbf{B} \\ H\mathbf{B}^T \mathbf{E}_T \mathbf{B} & \mathbf{B}^T \mathbf{E}_T \mathbf{B} \end{bmatrix} d\Omega.$$

L'intégrande de cette intégrale est discontinue pour deux raisons. Premièrement, la fonction d'Heaviside est discontinue au travers de l'interface Γ . Deuxièmement, l'écoulement plastique peut évoluer différemment de part et d'autre de l'interface et ainsi générer une discontinuité des contraintes qui s'étend à \mathbf{E}_T . Dans la méthodologie X-FEM classique le calcul de cette intégrale s'appuie sur un traitement différencié des deux côtés de l'interface, *i.e.*

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e^1} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \mathbf{E}_T \mathbf{B} & (+1) \mathbf{B}^T \mathbf{E}_T \mathbf{B} \\ (+1) \mathbf{B}^T \mathbf{E}_T \mathbf{B} & \mathbf{B}^T \mathbf{E}_T \mathbf{B} \end{bmatrix} d\Omega + \int_{\Omega_e^2} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \mathbf{E}_T \mathbf{B} & (-1) \mathbf{B}^T \mathbf{E}_T \mathbf{B} \\ (-1) \mathbf{B}^T \mathbf{E}_T \mathbf{B} & \mathbf{B}^T \mathbf{E}_T \mathbf{B} \end{bmatrix} d\Omega.$$

Dans la pratique l'élément est subdivisé en sous-cellules d'intégration conformes à l'interface Γ .

3.1 Méthode de Ventura

Afin de s'affranchir des sous-cellules d'intégration, Ventura a introduit dans [8] une fonction \tilde{H} , continue sur Ω_e , qui possède la propriété suivante :

$$\int_{\Omega_e} \tilde{H} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} d\Omega = \int_{\Omega_e^1} (+1) \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} d\Omega + \int_{\Omega_e^2} (-1) \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} d\Omega,$$

où \mathbf{E} est le tenseur de Hooke. Son approche est limitée initialement au cas de l'élasticité linéaire. Muni de la fonction \tilde{H} , la matrice de rigidité élastique peut être réécrite :

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} & \tilde{H} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} \\ \tilde{H} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} & \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} \end{bmatrix} d\Omega.$$

Dans cette dernière expression, l'intégrande est continue sur l'élément et un schéma d'intégration classique peut-être utilisé.

Cette méthode a été étendue à la plasticité dans [4]. L'idée est d'utiliser une approche de type nœuds fantômes [6] pour l'intégration. Soient $\underline{\underline{\varepsilon}}|_{H=+1}$ la déformation obtenue en posant $H = +1$ dans l'élément et $\underline{\underline{\varepsilon}}|_{H=-1}$ la déformation obtenue en supposant $H = -1$ dans l'élément. Par construction, ces deux champs de déformation sont continus dans l'élément. L'intégration de la loi de comportement en considérant la déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}|_{H=+1}$ fournit donc une contrainte $\underline{\underline{\sigma}}^+ = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\varepsilon}}|_{H=+1})$ et une matrice de comportement tangent $\mathbf{E}_T^+ = \mathbf{E}_T(\underline{\underline{\varepsilon}}|_{H=+1})$ continues. De même, l'intégration de la loi de comportement en considérant la déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}|_{H=-1}$ fournit une contrainte $\underline{\underline{\sigma}}^- = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\varepsilon}}|_{H=-1})$ et une matrice de comportement tangent $\mathbf{E}_T^- = \mathbf{E}_T(\underline{\underline{\varepsilon}}|_{H=-1})$ continues. La contrainte peut alors être réécrite sous la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{1+H}{2} \underline{\underline{\sigma}}^+ + \frac{1-H}{2} \underline{\underline{\sigma}}^-, \quad (2)$$

et la matrice de comportement tangent sous la forme :

$$\mathbf{E}_T = \frac{1+H}{2} \mathbf{E}_T^+ + \frac{1-H}{2} \mathbf{E}_T^-. \quad (3)$$

En effet, les expressions précédentes redonnent $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\varepsilon}}|_{H=+1})$ et $\mathbf{E}_T = \mathbf{E}_T(\underline{\underline{\varepsilon}}|_{H=+1})$, pour un point tel que $H = +1$ ainsi que $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\varepsilon}}|_{H=-1})$ et $\mathbf{E}_T = \mathbf{E}_T(\underline{\underline{\varepsilon}}|_{H=-1})$, pour un point tel que $H = -1$. L'expression de l'équation (3) permet de réécrire la matrice de rigidité tangente élémentaire sous la forme :

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{E}} \mathbf{B} + \mathbf{H} \mathbf{B}^T \Delta \mathbf{E} \mathbf{B} & \mathbf{H} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{E}} \mathbf{B} + \mathbf{B}^T \Delta \mathbf{E} \mathbf{B} \\ \mathbf{H} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{E}} \mathbf{B} + \mathbf{B}^T \Delta \mathbf{E} \mathbf{B} & \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{E}} \mathbf{B} + \mathbf{H} \mathbf{B}^T \Delta \mathbf{E} \mathbf{B} \end{bmatrix} d\Omega,$$

où on a posé :

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}_T^+ + \mathbf{E}_T^-), \\ \Delta \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}_T^+ - \mathbf{E}_T^-). \end{cases}$$

Finalement, en remplaçant H par \tilde{H} dans la dernière expression on obtient :

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{E}}\mathbf{B} + \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{B}^T \Delta \mathbf{E}\mathbf{B} & \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{B}^T \bar{\mathbf{E}}\mathbf{B} + \mathbf{B}^T \Delta \mathbf{E}\mathbf{B} \\ \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{B}^T \bar{\mathbf{E}}\mathbf{B} + \mathbf{B}^T \Delta \mathbf{E}\mathbf{B} & \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{E}}\mathbf{B} + \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{B}^T \Delta \mathbf{E}\mathbf{B} \end{bmatrix} d\Omega,$$

Par construction les champs $\bar{\mathbf{E}}$ et $\Delta \mathbf{E}$ sont continus. L'intégrande est donc continue sur l'élément et un schéma d'intégration classique peut-être utilisé.

De même, l'expression de l'équation (2) permet d'obtenir l'expression suivante pour le vecteur des forces internes élémentaires :

$$\underline{f}_e^{int} = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \underline{\underline{\sigma}} + \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{B}^T \underline{\underline{\Delta\sigma}} \\ \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{B}^T \underline{\underline{\sigma}} + \mathbf{B}^T \underline{\underline{\Delta\sigma}} \end{bmatrix} d\Omega.$$

où on a posé :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\sigma}}^+ + \underline{\underline{\sigma}}^-), \\ \underline{\underline{\Delta\sigma}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\sigma}}^+ - \underline{\underline{\sigma}}^-). \end{cases}$$

L'intégrande est encore une fois continue et un schéma d'intégration classique peut-être utilisé.

Il reste à discuter la méthode de construction de la fonction \tilde{H} . Dans le cas de l'élasticité linéaire les composantes de $\mathbf{B}^T \mathbf{E}\mathbf{B}$ appartiennent à l'espace \mathcal{P} des fonctions polynomiales de degré inférieur à d , où d dépend du type d'élément fini. Ventura a choisi de chercher $\tilde{H} \in \mathcal{P}$ tel que :

$$\forall f \in \mathcal{P}, \int_{\Omega_e} \tilde{H} f d\Omega = \int_{\Omega_e^+} (+1) f d\Omega + \int_{\Omega_e^-} (-1) f d\Omega. \quad (4)$$

Soit \mathbf{P} une base de l'espace \mathcal{P} , \tilde{H} s'écrit sous la forme :

$$\tilde{H} = \mathbf{P}\underline{h}.$$

Le vecteur \underline{h} des coefficients de la décomposition sur la base \mathbf{P} de \tilde{H} satisfaisant (4) est alors solution du système linéaire suivant :

$$\left(\int_{\Omega_e} \mathbf{P}^T \mathbf{P} d\Omega \right) \underline{h} = \int_{\Omega_e^+} (+1) \mathbf{P}^T d\Omega + \int_{\Omega_e^-} (-1) \mathbf{P}^T d\Omega. \quad (5)$$

Dans [8], Ventura a calculé la base \mathbf{P} pour des éléments triangulaires, quadrangulaires et tétraédriques et résolu le système linéaire (5) analytiquement pour une position de l'interface donnée. Dans [4] le système linéaire (5) est résolu numériquement. La matrice du système est calculée en utilisant un schéma d'intégration classique sur l'élément tandis que le calcul du second membre de (5) s'appuie sur les sous-cellules d'intégration.

Pour les triangles et les tétraèdres, les fonctions de formes sont linéaires et la base \mathbf{P} choisie est :

$$\mathbf{P} = [1].$$

Pour les quadrangles les fonctions de forme sont bi-linéaires et la base \mathbf{P} choisie est :

$$\mathbf{P} = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta \quad \xi^2 \quad \eta^2].$$

Pour les hexaèdres les fonctions de forme sont tri-linéaires et la base \mathbf{P} choisie est :

$$\mathbf{P} = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \zeta \quad \xi\eta \quad \eta\zeta \quad \xi\zeta \quad \xi^2 \quad \eta^2 \quad \zeta^2 \quad \eta^2\xi \quad \eta^2\zeta \quad \xi^2\zeta \quad \xi^2\eta \quad \eta\xi^2 \quad \xi\zeta^2 \quad \xi^2\eta^2 \quad \xi^2\zeta^2 \quad \eta^2\zeta^2 \quad \xi\eta\zeta].$$

Le schéma d'intégration utilisé pour calculer la matrice du système linéaire (5) sert également à calculer la matrice de rigidité tangente élémentaire, le vecteur des forces internes élémentaires ainsi que les états de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}^+$ et $\underline{\underline{\sigma}}^-$ et les variables internes associées.

Le Tableau 1 fournit, pour chaque type d'élément linéaire, le degré maximal des polynômes à intégrer pour calculer la matrice et le second membre du système linéaire (5), ainsi que le nombre de points d'intégration nécessaires en utilisant une formule de quadrature de Gauss (cf. [2]). Dans [9] Ventura propose de nouvelles expressions analytiques de \tilde{H} qui couvrent l'ensemble des éléments considérés dans cette contribution et qui peuvent donc être utilisées avec les schémas classiques des éléments FEM. Dans l'optique de la simulation de la propagation d'une fissure, cette approche permettrait de s'affranchir d'une étape de basculement du schéma classique d'un élément FEM vers un schéma adapté au futur élément X-FEM, dans la zone en amont de la fissure.

Type d'élément linéaire	Degré des polynômes à intégrer pour évaluer le second membre	Degré des polynômes à intégrer pour évaluer la matrice	Nombre de points de Gauss utilisés
Triangulaire	0	0	1
Quadrangulaire	2	4	9
Tetraédrique	0	0	1
Hexaédrique	4	8	27

TABLE 1 – Degré des polynômes à intégrer et nombre de points de Gauss utilisés pour évaluer (5).

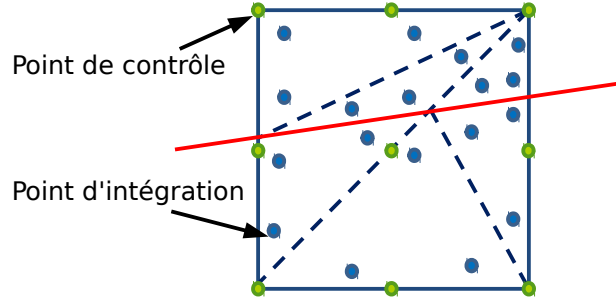


FIGURE 3 – Position des points de contrôles où le comportement est évalué (en vert) et des points d'intégration (en bleu) dans le cas d'un quadrangle traversé par une interface (en rouge). Les sous-cellules d'intégration sont représentées en pointillés.

3.2 Méthode des points de contrôle

La méthode de Ventura présentée dans la sous-section précédente est adhérente à l'enrichissement considéré. Dans [9] Ventura présente les polynômes équivalents à utiliser à la place de la fonction \tilde{H} dans le cas d'une approche nœuds fantômes, où les fonctions d'enrichissement sont les fonctions caractéristiques des domaines Ω_1 et Ω_2 . De même, l'extension de la méthode aux éléments quadratiques demanderait d'exhiber les bases de fonctions polynomiales *ad hoc* et l'extension de la méthode à l'enrichissement en fond de fissure nécessiterait une modification profonde du calcul de la matrice de rigidité.

Afin de s'affranchir de ces limitations, une méthode alternative est proposée dans cette contribution et appelée méthode des points de contrôle. L'idée de base de cette méthode est simple : décorer le schéma d'intégration numérique de la grille de points d'évaluation de l'écoulement plastique (cf. FIGURE 3). Pour réaliser l'intégration numérique, la valeur de la contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ et de la matrice de comportement tangent \mathbf{E}_T en un point d'intégration donné sont obtenues par interpolation des valeurs évaluées aux points de contrôle. Le but est de pouvoir utiliser indifféremment le schéma d'intégration d'un élément FEM classique ou le schéma d'intégration basé sur les sous-cellules d'intégration d'un élément X-FEM. Dans la pratique des fonctions d'interpolation quadratiques ont été utilisées, soit un élément de Lagrange à 9 nœuds pour le quadrangle linéaire et un élément de Lagrange à 27 nœuds pour l'hexaèdre linéaire.

Il est rappelé à ce stade que les champs considérés sont discontinus au travers de l'interface Γ . Pour surmonter cette difficulté l'approche nœuds fantôme introduite dans l'extension de la méthode de Ventura à la plasticité est à nouveau utilisée. Selon le domaine auquel appartient le point d'intégration, les champs $\underline{\underline{\sigma}}^+$ et \mathbf{E}_T^+ ou $\underline{\underline{\sigma}}^-$ et \mathbf{E}_T^- sont interpolés. On a pour l'évaluation de la matrice de comportement tangent au point \underline{x} :

$$\mathbf{E}_T(\underline{x}) = \begin{cases} \sum_k \mathbf{E}_T^+(x_k) \phi_k(\underline{x}) & \text{si } H(\underline{x}) = +1 \\ \sum_k \mathbf{E}_T^-(x_k) \phi_k(\underline{x}) & \text{si } H(\underline{x}) = -1 \end{cases},$$

où la somme est prise sur les points de contrôles, x_k et ϕ_k étant respectivement la position et la fonction d'interpolation associés au point de contrôle k . De même, on a pour la contrainte :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \begin{cases} \sum_k \underline{\underline{\sigma}}^+(x_k) \phi_k(\underline{x}) & \text{si } H(\underline{x}) = +1 \\ \sum_k \underline{\underline{\sigma}}^-(x_k) \phi_k(\underline{x}) & \text{si } H(\underline{x}) = -1 \end{cases}.$$

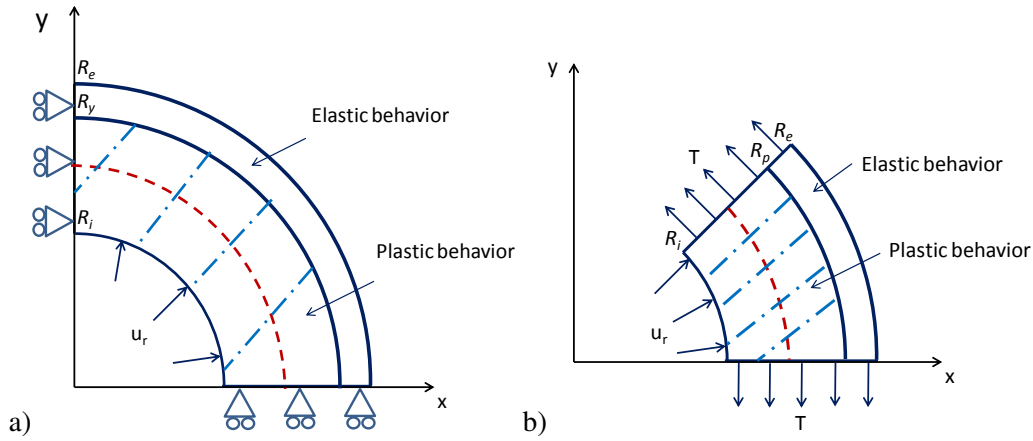


FIGURE 4 – Géométrie et conditions aux limites pour les modèles utilisés pour la boule creuse en plasticité parfaite pour valider la méthode de Ventura (a) et la méthode des points de contrôle (b).

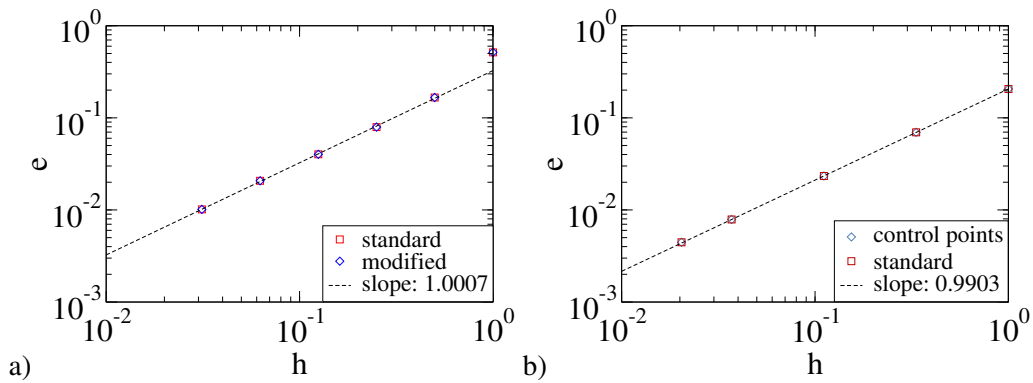


FIGURE 5 – Taux de convergence en fonction du raffinement de maillage obtenus pour la boule creuse en plasticité parfaite : en termes de la semi-norme H^1 pour valider la méthode de Ventura (a) et en termes de la norme en énergie pour valider la méthode des points de contrôle (b).

4 Analyse de convergence

Cette section présente les résultats des analyses de convergence effectuées pour valider les méthodes présentées. Le problème considéré est celui de la boule creuse soumise à une pression interne avec un comportement élastique parfaitement plastique. Une plastification progressive apparaît dans une couche de rayon R_y qui augmente avec la pression appliquée. La solution analytique en termes de déplacement et de contraintes de ce problème, ainsi que la relation entre R_y et la pression appliquée sont disponibles par exemple dans [1]. Le module d'Young est $E = 10^5$ MPa, le coefficient de Poisson est $\nu = 0,3$ et la limite d'élasticité est $\sigma_y = 350$ MPa. La modélisation est axisymétrique. Une interface X-FEM circulaire non conforme avec le maillage est placée dans la zone plastifiée et la pression analytique est appliquée sur cette interface. La solution attendue est donc celle du problème continu. Les maillages utilisés sont réglés et les éléments utilisés sont des quadrangles.

4.1 Méthode de Ventura

Le rayon interne de la boule est $R_i = 1$ mm et le rayon externe $R_e = 10$ mm. La boule est soumise à une pression interne de 1000 MPa. Le rayon de la zone plastifiée est $R_y = 3,02$ mm. L'interface X-FEM est un cercle de rayon $R_f = 1,9$ mm. Seul un quart de la structure est maillé et l'imposition de conditions de symétrie permet de retrouver le problème de la boule complète (cf. FIGURE 4a). La solution analytique en déplacement est imposée sur la paroi interne de la boule.

La FIGURE 5a compare les ordres de convergence en termes de la semi-norme H^1 obtenus avec la méthode d'intégration classique et avec la méthode de Ventura. Le maillage le plus grossier comporte neuf éléments dans la direction radiale et quinze dans la direction orthoradiale. Les ordres de convergence

obtenus avec les deux méthodes sont proches et en accord avec la valeur théorique de 1.

4.2 Méthode des points de contrôle

Le rayon interne de la boule est $R_i = 1$ mm et le rayon externe $R_e = 2$ mm. Le rayon de la zone plastifiée est $R_y = 1,75$ mm, ce qui correspond à une pression interne d'environ 470 MPa. L'interface X-FEM est un cercle de rayon $R_f = 1,5$ mm. Seul un huitième de la structure est maillé et l'imposition de conditions de Neumann permet de retrouver le problème de la boule complète (cf. FIGURE 4b). Utiliser le maillage d'un quart de la structure avec une modélisation axisymétrique demande un développement informatique supplémentaire, non réalisé pour le moment, pour assurer qu'aucun point de contrôle ne se positionne exactement sur l'axe d'axisymétrie où la déformation n'est pas définie.

La FIGURE 5b compare les ordres de convergence en termes de la norme en énergie obtenus avec la méthode d'intégration classique et avec la méthode des points de contrôle. Le maillage le plus grossier comporte neuf éléments dans la direction radiale et neuf dans la direction orthoradiale. Les ordres de convergence obtenus avec les deux méthodes sont proches et en accord avec la valeur théorique de 1.

5 Conclusion et perspectives

Deux méthodes d'intégration numérique ont été proposées dans le but d'éliminer les étapes de projection de champs dans le cadre de la propagation d'une fissure X-FEM dans un milieu plastifié. La première est l'extension à la plasticité de la méthode de Ventura, qui s'appuie sur l'évaluation de polynômes équivalents à la fonction d'Heaviside. La deuxième, la méthode des points de contrôle, est une méthode originale qui se base sur l'idée d'évaluer la loi de comportement en des points qui ne sont pas les points d'intégration.

Les deux méthodes ont été illustrées sur un problème d'interface. Les analyses de convergence ont montré que les deux méthodes permettent de retrouver les ordres de convergence optimaux sur le problème de la boule creuse soumise à une pression interne.

Afin de pouvoir être appliquées à la propagation de fissures X-FEM dans un milieu plastifié, les deux méthodes vont devoir démontrer qu'elles peuvent être étendues aux éléments quadratiques et à l'enrichissement par des fonctions singulières utilisées classiquement en fond de fissure. Dans le cas de la méthode de Ventura, cela signifie notamment d'exhiber les bases de fonctions polynomiales à utiliser avec les éléments quadratiques et d'adapter l'écriture de la matrice de rigidité obtenue en prenant en compte les fonctions d'enrichissement singulières. La méthode des points de contrôle n'est adhérente ni au degré des éléments ni au choix des fonctions d'enrichissement et ne nécessite donc pas de développements supplémentaires *a priori*.

Références

- [1] A. F. Bower, *Applied Mechanics of Solids*, Taylor and Francis, 2010.
- [2] G. Dhatt, G. Thouzot *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Presses Université Laval, 1981.
- [3] T. Elguedj, A. Gravouil, A. Combescure. *Appropriate extended functions for X-FEM simulation of plastic fracture mechanics*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 195(7–8) :501–515, 2006.
- [4] A. Martin, J.-B. Esnault, P. Massin. *About the use of standard integration schemes for X-FEM in solid mechanics plasticity*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 283 :551–572, 2015.
- [5] N. Moës, J. Dolbow, T. Belytschko. *A finite element method for crack growth without remeshing*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 46(1) :131–150, 1999
- [6] I. Nistor, M. L. E. Guiton, P. Massin, N. Moës, S. Géniaut. *An X-FEM approach for large sliding contact along discontinuities*, International Journal for Numerical Methods in Engineering 78(12) :1407–1435, 2009.
- [7] R. Pelée, V. Faucher, T. Elguedj, A. Combescure, B. Prabel. *Propagation de fissures 3 dimensions et en dynamique rapide*, 11ème Colloque National en Calcul des Structure, Giens, 2013.
- [8] G. Ventura. *On the elimination of quadrature subcells for discontinuous functions in the eXtended Finite-Element Method*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 66(5) :761–795, 2006.
- [9] G. Ventura, E. Benvenuti. *Equivalent polynomials for quadrature in Heaviside function enriched elements*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 102(3-4) :688–710, 2015.