

# Réduction de Modèle Stochastique pour la caractérisation robuste du comportement vibratoire des structures assemblées

M. Ghienne<sup>1</sup>, C. Blanzé<sup>1</sup>, L. Laurent<sup>1</sup>

<sup>1</sup> LMSSC, Conservatoire National des Arts et Métiers, {martin.ghienne,clau.de.blanze,luc.laurent}@lecnam.net

## Résumé —

Cette étude présente une première approche pour caractériser le comportement vibratoire des structures assemblées en contexte incertain. Cette approche permet de résoudre, à faible coût, le problème aux valeurs propres aléatoires dans le cas de vibrations linéaires. Non intrusive, elle est appliquée au cas d'une structure industrielle discrétisée par éléments finis à l'aide d'un logiciel commercial. Pour ce cas, la variabilité porte sur les paramètres matériaux des sous-structures. L'approche est ensuite étendue au cas où la variabilité des paramètres intervient localement dans les liaisons d'une structure assemblée.

**Mots clés** — Vibrations aléatoires, approche non-intrusive, système stochastique linéaires.

## 1 Introduction

Afin de dimensionner les structure assemblées en régime vibratoire de manière robuste, il est nécessaire de tenir compte, d'une part, des non-linéarités dues aux liaisons, et d'autre part, de la variabilité des paramètres influents sur le comportement des liaisons. Pour séparer les difficultés, nous allons tous d'abord concentrer nos efforts sur la modélisation de la variabilité des paramètres de liaison dans le cadre d'un modèle élastique linéaire.

Les approches probabilistes sont particulièrement adaptées à la caractérisation des vibrations de structure en présence de paramètres aléatoires. C'est donc dans ce cadre que nous présentons ce travail. Les méthodes classiques de résolution du problème vibratoire aléatoire, basées sur un échantillonnage statistique, sont très coûteuses en temps de calcul. C'est pourquoi, dans le cadre de ce travail, on propose une méthode de résolution du problème vibratoire aléatoire permettant de caractériser de façon approchée les espaces propres aléatoires d'une structure avec un faible nombre de calculs déterministes.

Pour pallier aux limites des solveurs stochastiques basés sur un échantillonnage statistique, différentes méthodes ont été développées aux cours des dernières décennies. Parmi les approches paramétriques on distingue notamment les méthodes dites de perturbation [1] et les méthodes basées sur le Chaos Polynomial [2]. Les méthodes de perturbation sont basées sur l'approximation des variables aléatoires à l'aide d'un développement en série de Taylor, autour de la valeur nominale du paramètre, tronqué généralement au premier ou second ordre [1]. Même si ces méthodes sont simples à implémenter, elles sont limitées à de faibles variations des paramètres d'entrée. La méthode spectrale des éléments finis stochastiques introduite par Ghanem et Spanos [2] est basée sur une discrétisation des variables aléatoires sur un espace fini de variables aléatoires. Une variable aléatoire est décomposée sur une base de polynômes orthogonaux multivariés dépendant de variables aléatoires de distributions connues. Cette base est appelée Chaos Polynomial. Les coefficients de cette décomposition sur le Chaos Polynomial peuvent être obtenus à l'aide d'un échantillonnage de Monte-Carlo couplé à une méthode de Galerkin [2]. Pour s'affranchir des contraintes dues à l'échantillonnage de Monte-Carlo, Ghanem et Spanos proposent une autre méthode de Galerkin permettant de se ramener à un système d'équation non-linéaires à résoudre. Bien que précises, les méthodes basées sur le Chaos Polynomial peuvent devenir très coûteuses lorsque le nombre de paramètres aléatoires augmente et que des polynômes d'ordre élevé sont requis.

Afin de caractériser les espaces propres aléatoires d'une structure avec un faible nombre de calculs déterministes, une approche non intrusive a donc été mise en place [3]. Cette approche, appelée Réduction de Modèle Stochastique (SMR), consiste à déterminer avec une précision donnée un jeu de fréquences propres aléatoires en adaptant la modélisation stochastique employée à chaque fréquence

propre aléatoire. Cette approche permet de minimiser le temps de calcul nécessaire à l'estimation d'un jeu de fréquences propres aléatoires en concentrant les ressources numériques sur certaines fréquences propres aléatoires en fonction de leur configuration.

L'objectif de ce travail est d'appliquer l'approche SMR au cas d'une structure assimilable à une structure assemblée. L'approche SMR sera brièvement rappelée avant d'être appliquée au cas d'une structure industrielle : l'Adaptateur Charge Utile (ACU) d'Ariane 5. Cet exemple permet notamment d'illustrer le caractère non-intrusif de l'approche proposée. En effet, pour traiter cet exemple, l'ensemble des grandeurs nécessaires à l'application de l'approche SMR (valeurs propres et vecteurs propres déterministes, matrices de masse et de raideur) sont obtenues à l'aide du logiciel MSC Nastran. Cependant, dans le cas de l'ACU, on considère les modules d'Young des différents matériaux constituant la structure comme étant des variables aléatoires : ces grandeurs interviennent de manière globale sur la structure. Afin d'étendre l'approche au cas des structures assemblées où la variabilité des paramètres intervient localement (au niveau des liaisons), un exemple académique sera ensuite traité : un portique dont les liaisons sont modélisées par des raideurs locales variant aléatoirement.

## 2 Approche de Réduction de Modèle Stochastique (SMR)

### 2.1 Présentation de l'approche SMR

Dans le cadre de ce travail, on s'intéresse au cas d'un système non amorti (ou proportionnellement amorti) dont certains paramètres varient aléatoirement. Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, p)$  l'espace probabiliste associé à l'expérience. On note  $L_2(\Omega)$  l'espace de Hilbert des variables aléatoires de carré intégrable et  $\|\cdot\|_{L_2(\Omega)}$  la norme associée. Le problème aux valeurs propres aléatoires s'écrit alors :

$$\mathbf{K}(\theta)\Phi_k(\theta) = \lambda_k(\theta)\mathbf{M}(\theta)\Phi_k(\theta) \quad (1)$$

où

$$\lambda_k(\theta) \in \mathbb{R}, \quad \Phi_k(\theta) \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{M}(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{K}(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \theta \in \Omega$$

$\lambda_k$  et  $\Phi_k$  étant les valeurs propres et vecteurs propres associés. On suppose que les vecteurs propres  $\Phi_k$  sont normalisés par la masse, on a donc  $\Phi_k^T \mathbf{M} \Phi_k = 1$ . Les matrices  $\mathbf{M}(\theta)$  et  $\mathbf{K}(\theta)$  représentent les matrices de masse et de rigidité du système. Elles dépendent de paramètres physiques aléatoires tels que la masse, le module d'Young ou encore la géométrie du système. Dans la suite, on note  $E[\cdot]$  l'espérance mathématique et  $\sigma[\cdot]$  l'écart-type d'une variable aléatoire.

On considère le cas d'une structure composée de  $n$  sous-structures de module d'Young  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ . On suppose dans un premier temps que les seuls paramètres incertains de la matrice de rigidité sont les modules d'Young. On peut alors écrire la matrice de rigidité comme la somme des matrices de rigidité relative à chaque sous-structure :

$$\mathbf{K}(\theta) = \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_i(\theta) = \sum_{i=1}^n \gamma_i(\theta) \mathbf{K}_i \quad (2)$$

où  $\gamma_i(\theta)$  est le paramètre aléatoire relatif au  $i$ ème module d'Young  $Y_i$ . Il est défini tel que :

$$\gamma_i(\theta) = \frac{Y_i(\theta)}{Y_{0i}} \quad \text{avec} \quad Y_{0i} = E[Y_i(\theta)] \quad (3)$$

L'approche est basée sur un constat simple : certains vecteurs propres associés à des valeurs propres aléatoires ne varient que très peu en fonction des paramètres aléatoires d'entrée. Ces vecteurs propres peuvent alors être considérés, en première approximation, comme étant déterministes. Les valeurs propres aléatoires associées à ces vecteurs propres particuliers peuvent donc être approchées avec un coût de calcul très réduit.

En considérant la matrice des vecteurs propres aléatoires comme étant égale à la matrice des vecteurs propres calculée avec les valeurs déterministes des paramètres, on a :

$$\Phi(\theta) = \Phi \quad (4)$$

En supposant les vecteurs propres normalisés par la masse, la  $k$ ième fréquence propre aléatoire du problème peut donc se mettre sous la forme :

$$\lambda_k^{SMR1}(\theta) = \omega_k^2(\theta) = \sum_{i=1}^n \gamma_i(\theta) \Phi_k^\top \mathbf{K}_i \Phi_k = \sum_{i=1}^n \lambda_{ki} \gamma_i(\theta) \quad (5)$$

où  $\lambda_{ki} = \Phi_k^\top \mathbf{K}_i \Phi_k$ .

Ce résultat correspond au premier niveau de raffinement de l'approche et est noté **SMR1**. On peut constater que les coefficients  $\lambda_{ki}$  sont déterministes et que la variabilité des valeurs propres aléatoires du système ne dépend que des paramètres aléatoires d'entrée.

Lorsque la variabilité des vecteurs propres augmente, ils ne peuvent plus être considérés comme déterministes, on propose alors d'estimer les valeurs propres aléatoires du système en considérant un développement de Taylor des vecteurs propres correspondant au premier ordre autour de la valeur moyenne des paramètres d'entrée  $Y_i(\theta) = Y_{0i}$ . Ce second niveau de raffinement de l'approche est noté **SMR2**.

La  $k$ ième valeur propre aléatoire  $\lambda_k(\gamma(\theta))$  et le  $k$ ième vecteur propre  $\Phi_k(\gamma(\theta))$  approximé par son développement de Taylor à l'ordre un en  $E[\gamma(\theta)] = \mathbf{1}$  s'écrivent alors :

$$\lambda_k^{SMR2}(\theta) = \sum_{i=1}^n \gamma_i(\theta) \Phi_k^\top(\gamma(\theta)) \mathbf{K}_i \Phi_k(\gamma(\theta)) \quad (6)$$

$$\Phi_k(\gamma(\theta)) = \Phi_k(\gamma_0) + \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial \Phi_k}{\partial \gamma_i} \right|_{\gamma_i=1} (\gamma_i(\theta) - 1) \quad (7)$$

L'étape suivante consiste à déterminer les dérivées des vecteurs propres par rapport aux paramètres. Pour cela, on propose d'utiliser la méthode algébrique de Lee [4] que l'on retrouve notamment dans le code de calcul éléments finis *Code\_Aster* d'EDF [10].

Se pose alors la question de savoir quand passer d'un niveau de raffinement à l'autre. L'idée est de proposer un critère, basé sur la proximité des valeurs propres dans le domaine fréquentiel, permettant de choisir le niveau de raffinement du calcul.

Cette notion de proximité relative des valeurs propres se retrouve aussi bien dans les méthodes de perturbation [5] que dans le calcul de sensibilité des modes propres [6] ou encore l'étude du lieu des valeurs propres [7]. Elle consiste à distinguer les valeurs propres suffisamment éloignées des autres valeurs propres et les valeurs propres relativement proches les unes des autres. Bien que ces deux cas de figure soient traités dans la littérature, la limite entre ces deux configurations n'est que rarement abordée. Du Bois et al. [8] définissent un facteur de couplage modal destiné à l'étude paramétrique du lieu des valeurs propres qui semblerait pouvoir être transposé au cas des valeurs propres aléatoires. Cependant ce critère est défini pour le cas d'un problème à un seul paramètre et nécessiterait une étude approfondie avant d'être appliqué aux cas de plusieurs variables aléatoires. Dans le cadre de l'approche SMR, un indicateur inspiré du facteur de chevauchement statistique défini par Manohar et Keane [9] a été mis en place. Cet indicateur appelé Facteur de Proximité est présenté dans la partie suivante.

## 2.2 Facteur de Proximité

Le facteur de chevauchement statistique défini par Manohar et Keane [9] est destiné aux approches de type SEA (Statistical Energy Analysis). Il est défini comme étant le rapport entre l'écart-type de la  $k$ ième valeur propre et la moyenne de l'écart de cette valeur propre à la valeur propre suivante. Afin de tenir compte d'une éventuelle différence entre les écarts-types de deux valeurs propres consécutives, le Facteur de Proximité entre deux valeurs propres aléatoires consécutives  $\lambda_i$  et  $\lambda_{i+1}$  est défini tel que :

$$PF(\lambda_i) = \frac{2(\sigma[\lambda_i] + \sigma[\lambda_{i+1}])}{E[\lambda_{i+1}] - E[\lambda_i]} \quad (8)$$

Les premiers moments statistiques de chaque valeur propre étant estimés directement à l'aide de SMR1 ou SMR2, le Facteur de Proximité est donc obtenu sans calcul supplémentaire. Il permet de caractériser la qualité de l'estimation réalisée par SMR1 ou SMR2. En effet, si PF est supérieur à une certaine limite, définie initialement à  $PF > 1$ , les valeurs propres correspondantes sont supposées proches. Les vecteurs

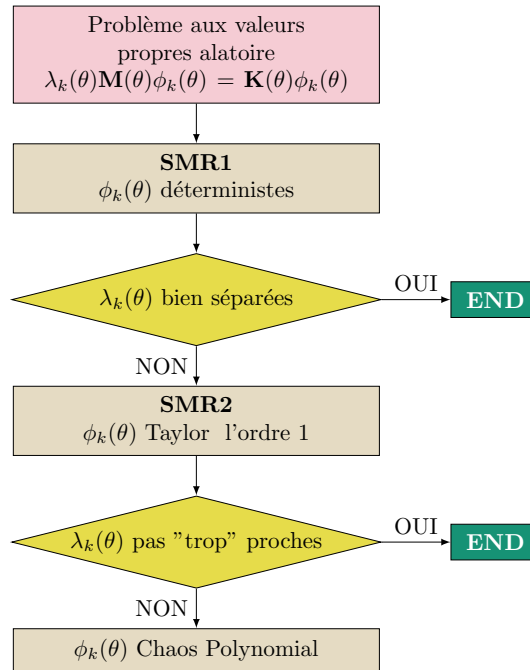


FIGURE 1 – Résolution du problème aux valeurs propres aléatoires par l’approche SMR

propres aléatoires ne peuvent alors plus être approchés par leur valeur déterministe et il est nécessaire de raffiner la méthode utilisée pour estimer les valeurs propres aléatoires correspondantes. Pour une étude approfondie de cet indicateur, on pourra se référer à [3].

L’approche SMR peut être résumée par le schéma présenté Figure 1.

### 3 Intégration et application à un cas industriel

#### 3.1 Une approche non intrusive

Un des avantages de l’approche SMR est son caractère non intrusif. En effet, en plus d’être très peu coûteuse, elle peut être mise en place à partir de n’importe quel code éléments finis du commerce. En considérant que les paramètres aléatoires interviennent uniquement dans la matrice de raideur, les données d’entrée du calcul sont : les valeurs propres et vecteurs propres du problème pris à la valeur moyenne des paramètres d’entrée, les matrices de masse et de raideur ainsi que les matrices de sensibilité de la matrice de raideur par rapport aux paramètres d’entrée. Dans le cadre de ce travail, ces grandeurs sont obtenues à l’aide du logiciel MSC Nastran. L’approche SMR a été implémentée en Python ce qui permet d’utiliser la librairie open source pyNastran développée par Steve Doyle. Cette librairie permet notamment d’écrire les fichiers d’entrée Nastran mais également de lire les fichiers de résultats et d’extraire les matrices de masse et de raideur de la structure étudiée. Les matrices de sensibilité des matrices de masse et de raideur ne sont pas disponibles en tant que sortie Nastran. La matrice de raideur dépend linéairement des paramètres aléatoires choisis. Ses matrices de sensibilité sont obtenues par différence finie d’ordre un à partir des matrices de raideur issues de Nastran prises à différentes valeurs des paramètres d’entrée. Pour la modélisation probabiliste du problème, le formalisme de la librairie OpenTURNS a été choisi.

#### 3.2 Comportement vibratoire de l’ACU

Situées sous la coiffe du lanceur, les charges utiles d’Ariane 5 sont placées l’une en dessous de l’autre, chacune étant fixée à une structure appelée Adaptateur Charge Utile (ACU) qui assure l’interface avec le lanceur. L’ACU 1666MVS a été choisi pour cette étude. Un schéma en vue de coupe de l’ACU est présenté Figure 2-a. La partie basse de l’ACU est constituée d’un cône en matériau composite et de deux anneaux en aluminium. L’un à la base du cône (interface boulonnée) et l’autre à une position

intermédiaire sur le cône (raidisseur). La partie supérieure est un cône en aluminium. Dans le cadre de cette étude, on considère que le matériau composite est de type carbone/epoxy de module d'Young isotrope homogénéisé  $\bar{Y}_{Composite}$ . Les caractéristiques matériaux sont données dans le tableau suivant :

		Aluminium	Composite
Module d'Young	Espérance	70000MPa	350000MPa
	Coeff. de variation	0.2	0.2
Coeff. de Poisson		0.3	0.29
Densité		2800kg	1590kg

TABLE 1 – Définition des caractéristiques matériaux de l'ACU

Afin de caractériser les fréquences propres aléatoires de l'ACU, on suppose que les modules d'Young des deux matériaux sont des variables aléatoires indépendantes suivant des lois Gamma. Leur espérance et coefficients de variation sont définis dans le tableau précédent.

L'ACU étant axisymétrique, toutes ses valeurs propres sont donc doubles. Bien que l'approche SMR puisse être adaptée au cas de valeurs propres multiples, dans le cadre de ce papier, on s'intéresse uniquement à des valeurs propres simples plus ou moins proches les unes des autres. Il est donc nécessaire de dissymétriser le cas d'étude de l'ACU. Pour cela, on propose de désolidariser certaines des 72 liaisons boulonnées qui lient l'ACU au reste du lanceur. Ce qui est équivalent à considérer un certain nombre de ruptures ou de défauts de serrage au niveau des vis. La configuration choisie pour l'encastrement de l'ACU est présentée Figure 2-b. Cette configuration permet d'assurer que les dix premiers modes déterministes sont des modes simples.

Le modèle éléments finis de l'ACU peut alors être implémenté à l'aide du logiciel MSC Nastran. Des éléments coques sont choisis et le modèle est limité à 20000 degrés de liberté afin d'éviter des coûts de calcul rédhibitoires. Une simulation de Monte-Carlo à 10000 tirages permet de tracer les densités de probabilité des dix premières valeurs propres de l'ACU. Ces résultats seront pris comme référence afin d'être comparés aux résultats issus de l'approche SMR. Cette simulation de Monte-Carlo a été réalisée à l'aide d'un processeur quadri-cœur Intel® Xeon® CPU E5507 - 2.27GHz et de 16Gb de mémoire vive DDR3-1066. La durée du calcul est d'environ 16h.

La Figure 3 présente les erreurs relatives sur l'estimation des premiers moments statistiques des dix premières valeurs propres de l'ACU avec SMR1 et SMR2. A titre de comparaison, les erreurs obtenues avec une méthode classique de perturbation à l'ordre deux sont également représentées. On peut remarquer que l'espérance et l'écart-type des dix premières valeurs propres de l'ACU sont estimés avec une erreur respectivement inférieure à 3.0% et 12% en utilisant le premier niveau de raffinement SMR1. Cette estimation est obtenue avec un temps de calcul inférieur à 1 min. En utilisant SMR2 ces erreurs descendent à 1.6% et 9.2% pour un temps de calcul de moins de 18 min, soit un gain de 98%. La comparaison avec la méthode de perturbation à l'ordre deux nous permet de conclure que SMR2 permet d'estimer l'espérance des valeurs propres aléatoires d'une structure avec une erreur du même ordre de grandeur que la méthode de perturbation. Cependant l'estimation de l'écart-type avec la méthode de perturbation à l'ordre deux est bien moins satisfaisante que l'estimation obtenue avec SMR2. On rappelle que le domaine de validité des méthodes classiques de perturbation est limité aux cas des faibles variabilités des paramètres d'entrée. Typiquement ces méthodes se limitent à des coefficients de variation inférieurs à 20%.

#### 4 Vers une application aux cas des structures boulonnées : Cas d'un Portique avec variables aléatoires localisées

Le cas de l'ACU traité précédemment considère les modules d'Young des différents matériaux comme étant des variables aléatoires, cependant, ces grandeurs interviennent de manière globale sur la structure. Dans le cas d'une structure assemblée, les principales sources de variabilité de la structure interviennent au niveau des liaisons. On se propose alors d'appliquer l'approche SMR au cas d'une structure plus académique

Le portique étudié est présenté Figure 4. Il est composé de trois poutres assemblées entre elles par

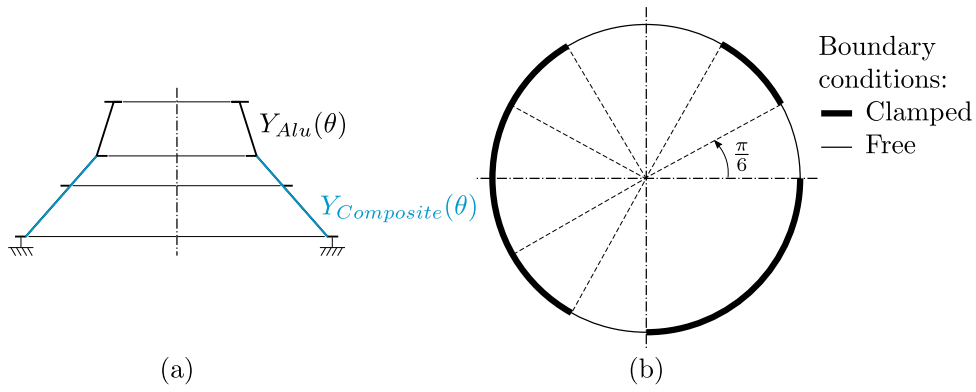


FIGURE 2 – Définition de l’ACU 1666MVS d’Ariane 5. (a) Section de l’ACU 1666MVS. (b) Définition de l’encastrement du cône inférieur.

des liaisons boulonnées situées au niveau des coins du portique. Les trois poutres ont la même géométrie : 250mm de longueur, 10mm de largeur, 1mm d’épaisseur. Leur module d’Young  $Y_0$  est supposé déterministe et leur masse volumique vaut  $\rho = 2800 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ . Le portique est discrétisé par éléments finis à l’aide de 30 éléments poutres et 3 degrés de liberté (ddl) à chaque noeuds. La base du portique est encastree et le système complet a 87 ddl.

Les liaisons boulonnées sont dans un premier temps modélisées par une raideur variable prise en compte par une modification du module d’Young des éléments correspondant aux coins du portique. Les deux paramètres aléatoires de la structure,  $Y_1(\theta)$  et  $Y_2(\theta)$ , sont modélisés par des variables aléatoires indépendantes suivant une loi Gamma. On définit leur espérance et leur coefficient de variation tels que  $E[Y_1] = E[Y_2] = 150 \text{ GPa}$  et  $\delta[Y_1] = \delta[Y_2] = \sigma[Y_i]/E[Y_i] = 0.2$ . Une simulation de Monte-Carlo à 30000 tirages nous permet de déterminer les densités de probabilité des fréquences propres aléatoires du portique et sera pris comme référence pour évaluer la qualité des estimations obtenus avec SMR.

La figure 5 présente les erreurs relatives sur l’estimation des premiers moments statistiques des dix premières valeurs propres du portique obtenus avec SMR1, SMR2 ainsi que par une méthode de perturbation à l’ordre deux (à titre de comparaison). On peut en conclure que l’approche SMR permet également d’estimer les premiers moments statistiques avec une erreur très faible dans le cas de variables aléatoires correspondant à des grandeurs locales de la structure.

## 5 Conclusion

Une approche permettant de caractériser les fréquences propres aléatoires d’une structure dont les paramètres varient aléatoirement a été brièvement présentée : l’approche SMR. Cette approche permet, à partir de n’importe quel code élément finis commercial, d’estimer un jeu de fréquences propres aléatoires de la structure avec un temps de calcul très réduit. Une application sur une structure industrielle discrétisée par éléments finis à l’aide du logiciel MSC Nastran a permis de montrer un gain en temps de calcul de 98% comparé à une simulation de Monte-Carlo classique. Pour ce premier exemple, les paramètres aléatoires du problème (modules d’Young) ont une influence globale sur la structure étudiée. Cependant, dans le cas d’une structure assemblée, les paramètres de liaison interviennent de manière locale. Un exemple académique a été traité afin de montrer que l’approche proposée peut être appliquée au cas de variables aléatoires ayant une influence locale. Cet exemple correspond à un portique constitué de trois poutres assemblées à leurs extrémités et dont les raideurs de liaison varient aléatoirement.

Le modèle de liaison utilisé pour la simulation du portique reste pauvre et ne permet pas de tenir compte de tous les phénomènes physiques pouvant apparaître au sein des liaisons réelles. On propose donc de se doter d’un modèle rhéologique permettant, avec un nombre réduit de paramètres, de mieux tenir compte du comportement réel de la liaison. Les paramètres de ce nouveau modèle de liaison peuvent alors être identifiés à partir de résultats expérimentaux. L’approche SMR pourra ensuite être appliquée au cas d’une structure assemblée en considérant les paramètres de liaisons comme des variables aléatoires.

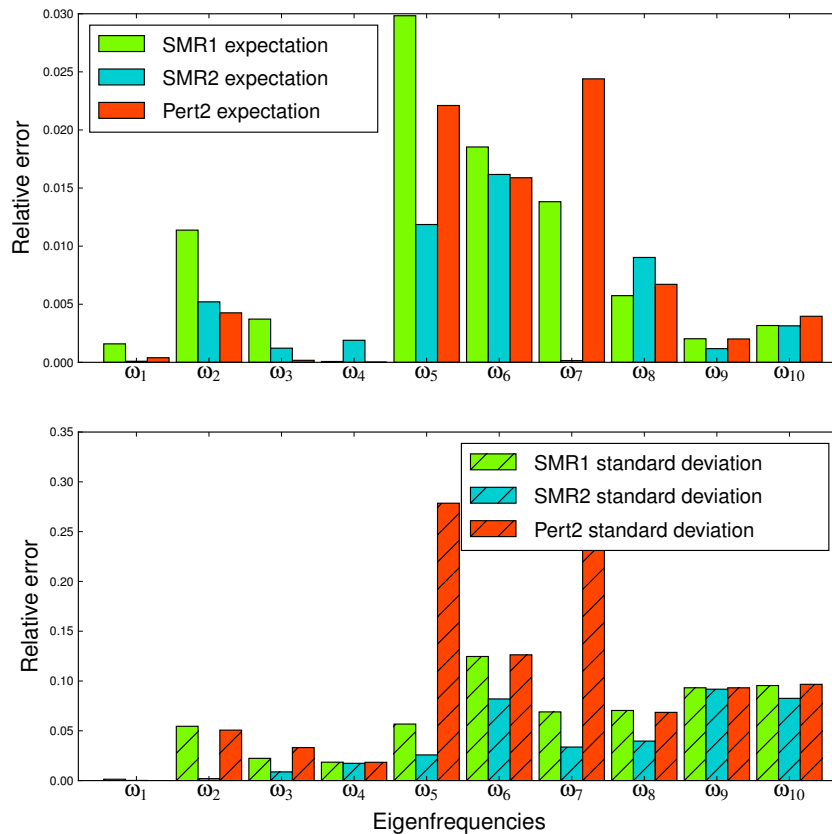


FIGURE 3 – Erreur relative sur l'estimation de l'espérance et de l'écart-type des 10 premières fréquences propres aléatoires de l'ACU - Les résultats de la simulation de Monte Carlo sont pris comme référence pour le calcul de l'erreur relative

## Références

- [1] J. D. Collins and W. T. Thomson. The eigenvalue problem for structural systems with statistical properties. AIAA Journal, 7(4) :642–648, April 1969.
- [2] Roger Ghanem and Debraj Ghosh. Efficient characterization of the random eigenvalue problem in a polynomial chaos decomposition. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 72(4) :486–504, 2007.
- [3] M. Ghienne and C. Blanzé. A simplified method for random vibration analysis of structures with random parameters, Journal of Physics : Conference Series, Volume 744, 012174, 2016.
- [4] I.-W. Lee, D.-O. Kim, and G.-H. Jung. Natural frequency and mode shape sensitivities of damped systems : Part i, distinct natural frequencies. Journal of Sound and Vibration, 223(3) :399 – 412, 1999.
- [5] S. Adhikari and M. I. Friswell. Random matrix eigenvalue problems in structural dynamics. Int. J. Numer. Meth. Engng., 69(3) :562–591, 2007.
- [6] R.M. Lin, Z. Wang, and M.K. Lim. A practical algorithm for the efficient computation of eigenvector sensitivities. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 130(3–4) :355 – 367, 1996.
- [7] E. Balmes. High modal density, curve veering, localization - a different perspective on the structural response. Journal of Sound Vibration, 161 :358–363, February 1993.
- [8] Jonathan L Du Bois, Sondipon Adhikari, and Nick AJ Lieven. On the quantification of eigenvalue curve veering : a veering index. Journal of applied mechanics, 78(4) :pp. 041007–1 – 041007–8, 2011.
- [9] C. S. Manohar and A. J. Keane. Statistics of energy flows in spring-coupled one-dimensional subsystems. Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 346(1681) :525–542, 1994.
- [10] www.code\_aster.org. Code\_Aster open source - general fea software.

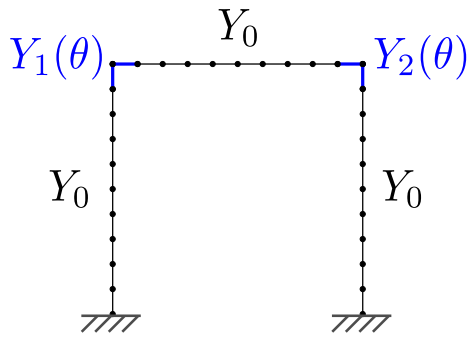


FIGURE 4 – Définition du portique avec variables aléatoires localisées

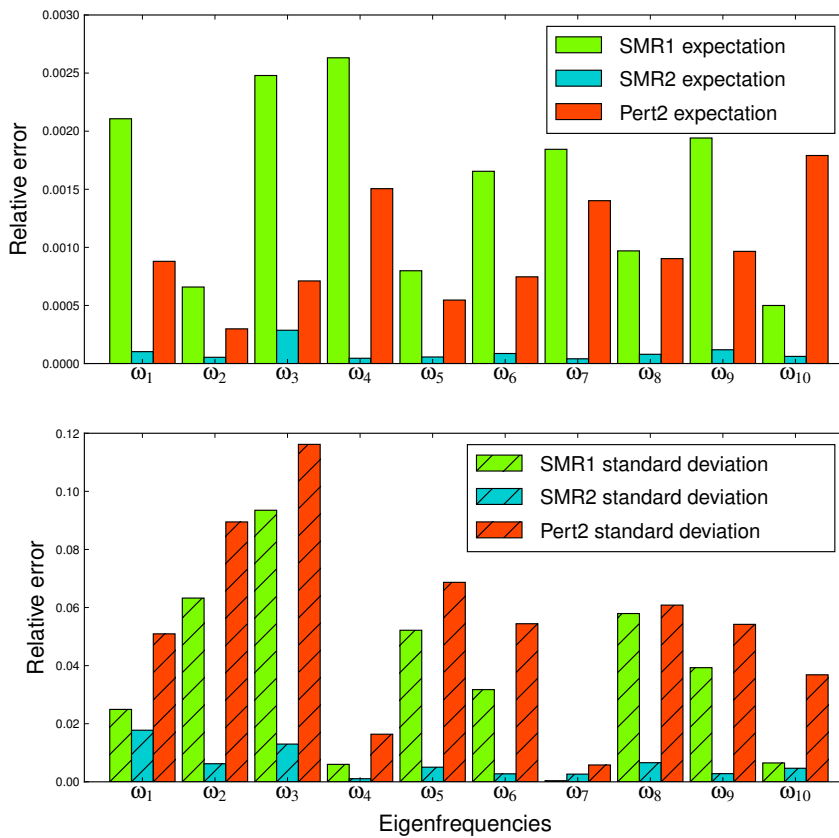


FIGURE 5 – Erreur relative sur l'estimation de l'espérance et de l'écart-type des 10 premières fréquences propres aléatoires du portique