

# Évaluation de l'incertitude associée à l'interpolation de maillage dans un calcul couplé partitionné

S. Dubreuil<sup>1</sup>, J. Mas Colomer<sup>1</sup>, M. Salaün<sup>2</sup>, N. Bartoli<sup>1</sup>, T. Lefebvre<sup>1</sup>

<sup>1</sup> ONERA - The french aerospace lab, {sylvain.dubreuil,joan.mas-colomer,nathalie.bartoli,thierry.lefebvre}@onera.fr

<sup>2</sup> ICA, ISAE-supero, michel.salaun@isae.fr

**Résumé** — Cette étude s'intéresse à la représentation et à la propagation des incertitudes d'interpolation dans un calcul couplé de type fluide-structure partitionné. Nous proposons d'utiliser l'interpolation par krigeage pour transférer les informations d'un maillage à un autre. De plus, l'incertitude associée à la prédiction par krigeage est utilisée de façon originale afin de quantifier l'aléa introduit par l'étape d'interpolation sur la réponse du calcul couplé.

**Mots clés** — krigeage, incertitude d'interpolation, interaction fluide structure, approche partitionnée

## 1 Introduction

Le comportement des systèmes complexes dépend souvent de différents phénomènes physiques (aérodynamique, mécanique des structures, propulsion etc. pour la conception avion). Afin de prédire, de la façon la plus pertinente possible, la réponse de ces systèmes, il est nécessaire de considérer les interactions entre ces phénomènes. La formulation du problème à traiter fait alors intervenir les modélisations de chacune des disciplines physiques, couplées par une ou plusieurs variables. Les méthodes numériques permettant de résoudre ce problème couplé sont généralement classées en deux familles : les approches *monolithiques* qui conduisent à la mise en oeuvre d'un solveur dédié au type d'interaction étudié et les approches *partitionnées* qui consistent à coupler des solveurs disciplinaires déjà existants.

Ce travail s'intéresse aux approches partitionnées. A titre d'exemple, on considèrera dans la suite l'interaction fluide-structure permettant de modéliser le comportement d'une aile d'avion en vol, résolu par le couplage d'un solveur de mécanique des structures (éléments finis) et d'un solveur fluide (méthode des singularités [1]). Les domaines sur lesquels sont résolus ces deux problèmes partagent une frontière commune permettant l'interaction. Dans le cas général d'une approche partitionnée, la discrétisation des domaines fluide et structure conduit à une discrétisation non conforme de la frontière commune (les nœuds de chacun des maillages ne sont pas nécessairement confondus sur cette frontière). Cette difficulté peut avoir différentes origines comme par exemple des représentations géométriques différentes entre les modèles ou des tailles de maille différentes. Afin de mettre en oeuvre le calcul couplé, il est alors nécessaire de *transférer* les informations d'un maillage à un autre. Différentes approches ont été proposées dans la littérature afin de réaliser ce transfert (voir [2]). Une approche couramment utilisée pour son efficacité et sa simplicité de mise en oeuvre consiste à interpoler les quantités d'intérêt entre les deux maillages ([2]). On désigne par  $\mathbf{u}_s \in \mathbb{R}^{n_s}$  et  $\mathbf{u}_a \in \mathbb{R}^{n_a}$  les vecteurs des réponses aux degrés de liberté (DDL) associés aux maillages structure et fluide respectivement, ainsi que  $\mathbf{f}_s \in \mathbb{R}^{n_s}$  et  $\mathbf{f}_a \in \mathbb{R}^{n_a}$  les chargements correspondants (avec  $n_s$  et  $n_a$  le nombre de DDL des maillages structure et fluide respectivement). La plupart des méthodes d'interpolation supposent une transformation linéaire entre les DDL du maillage fluide et ceux du maillage structure,

$$\mathbf{u}_a = H\mathbf{u}_s \quad (1)$$

avec  $H \in \mathbb{R}^{n_a \times n_s}$  une matrice qui dépend de la méthode d'interpolation utilisée. Le transfert des charges entre le maillage fluide et le maillage structure est assuré en imposant le respect du principe des travaux virtuels,

$$\mathbf{u}_s^t \mathbf{f}_s = \mathbf{u}_a^t \mathbf{f}_a \quad (2)$$

avec  $\mathbf{x}^t$  le transposé du vecteur  $\mathbf{x}$ . Le respect de cette condition conduit à

$$\mathbf{f}_s = H^t \mathbf{f}_a. \quad (3)$$

La principale difficulté de l'approche partitionnée par interpolation est donc le choix de la méthode d'interpolation (choix de la matrice  $H$  dans le cas linéaire). Il est intéressant de noter que le problème d'interpolation ne fait intervenir aucune hypothèse physique sur les fonctions à interpoler, mais est traité comme un problème d'apprentissage statistique (on cherche les réponses aux DDL du maillage fluide  $\mathbf{u}_a$  à partir de la connaissance des réponses aux DDL du maillage structure  $\mathbf{u}_s$ ). Il semble alors pertinent de se poser la question de l'erreur introduite dans le système lors de cette étape d'interpolation. En général, l'étude de celle-ci est faite *a posteriori*, en comparant les résultats obtenus avec des résultats de référence ou en comparant les méthodes d'interpolation entre elles.

Dans ce qui suit, nous proposons d'utiliser l'interpolation par krigeage pour le transfert des quantités d'intérêt. Cette méthode d'interpolation offre l'avantage de quantifier l'incertitude associée à une prédiction. L'idée de l'approche proposée est d'utiliser cette information afin de quantifier l'incertitude sur les résultats finaux du calcul couplé. De plus, le formalisme de la prédiction moyenne du krigeage (voir section 2.2) est très proche de celui de l'interpolation par fonction à base radiale (RBF) fréquemment utilisée dans le contexte de l'interpolation de maillage ([3], [4]), ce qui permettra d'étendre les conclusions obtenues.

## 2 Formulation du problème d'interpolation par krigeage

### 2.1 Introduction

Afin de fixer les notations, le système décrivant le problème d'interaction fluide-structure par une approche partitionnée est modélisé par le système d'équations suivant

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_s &= \mathcal{M}_s(\mathbf{f}_s) \\ \mathbf{u}_a &= I_{as}(\mathbf{u}_s) \\ \mathbf{f}_a &= \mathcal{M}_a(\mathbf{u}_a) \\ \mathbf{f}_s &= I_{sa}(\mathbf{f}_a) \end{aligned} \quad (4)$$

avec  $\mathcal{M}_s$  le solveur calculant les réponses aux nœuds du maillage structure  $\mathbf{u}_s$  en fonction des chargements appliqués  $\mathbf{f}_s$  et des conditions aux limites,  $\mathcal{M}_a$  le solveur calculant les efforts aux nœuds du maillage fluide en fonction de la forme du domaine (donc de  $\mathbf{u}_a$ ) et des conditions aux limites.  $I_{as}$  est la fonction d'interpolation permettant de calculer les réponses aux nœuds du maillage fluide connaissant les réponses aux nœuds du maillage structure et  $I_{sa}$  est la fonction d'interpolation permettant de calculer les chargements aux nœuds du maillage structure connaissant les chargements aux nœuds du maillage fluide.

#### Remarques :

- Le système Eq. (4) est non linéaire et typiquement résolu par un algorithme de type point fixe.
- L'application du principe des travaux virtuels relie les modèles d'interpolation  $I_{as}$  et  $I_{sa}$ .

### 2.2 Interpolation par krigeage universel (KU)

Le krigeage est une méthode d'interpolation développée dans le cadre de la géostatistique par [5]. L'objectif de cette partie est de présenter succinctement les principales caractéristiques de cette méthode utiles pour la suite. Pour une description plus approfondie le lecteur pourra consulter les ouvrages de référence [6] et [7].

Dans le cadre de notre étude, on cherche à interpoler une fonction  $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{x} \rightarrow u(\mathbf{x})$  connaissant la valeur de  $u$  aux nœuds du maillage structure de coordonnées  $\mathbf{x}_s$ . L'interpolation par krigeage fait l'hypothèse que la fonction inconnue  $u$  est une réalisation d'un processus gaussien  $U$ , stationnaire d'ordre 2, de moyenne  $m(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta})$  et de fonction de covariance (ou noyau)  $k(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \boldsymbol{\theta})$  avec  $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_i, i = 0, \dots, 3\}$  et  $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_i, i = 1, \dots, 3\}$  des paramètres à déterminer. Dans ce qui suit, afin d'être cohérent avec les méthodes d'interpolation par RBF ([3]), nous utilisons le krigeage universel en supposant que la moyenne

$m(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta})$  est une fonction affine des coordonnées de  $\mathbf{x}$ ,

$$m(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=0}^3 \beta_i f_i(\mathbf{x})$$

avec  $f_0(\mathbf{x}) = 1, f_1(\mathbf{x}) = x_1, f_2(\mathbf{x}) = x_2, f_3(\mathbf{x}) = x_3$  (dans la suite on note  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \{f_0(\mathbf{x}), f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), f_3(\mathbf{x})\}^t$ )

On s'intéresse maintenant à la loi du processus  $U$  conditionné sur les points du plan d'expérience (les réponses connues aux points  $\mathbf{x}_s$ ), que l'on note  $U|u(\mathbf{x}_s) = \mathbf{u}_s$ . On notera que toutes les trajectoires de ce processus interpolent le plan d'expérience. On peut montrer (voir [6] par exemple) que  $U|u(\mathbf{x}_s) = \mathbf{u}_s$  est un processus gaussien de moyenne  $m_{KU}$  et de noyau  $k_{KU}$  tels que,

$$m_{KU}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})^t \mathbf{u}_s \quad (5)$$

et

$$k_{KU}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = k(\mathbf{x}, \mathbf{x}') - \tilde{\mathbf{k}}^t(\mathbf{x}) \tilde{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x}') \quad (6)$$

où  $\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}), \tilde{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x})$  et  $\tilde{\mathbf{k}}^t(\mathbf{x})$  sont définis par le système

$$\begin{pmatrix} K & \mathbb{F} \\ \mathbb{F}^t & \mathbf{0} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}) \\ \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}}_{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{k}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{k}}(\mathbf{x})} \quad (7)$$

où  $K$  est la matrice de covariance calculée aux points du plan d'expérience  $\mathbf{x}_s, K_{i,j} = k(\mathbf{x}_{s,i}, \mathbf{x}_{s,j}, \boldsymbol{\theta})$ ,  $\mathbf{k}(\mathbf{x})$  est le vecteur donnant la covariance entre le point  $\mathbf{x}$  et les points du plan d'expérience,  $\mathbf{k}_i(\mathbf{x}) = k(\mathbf{x}_{s,i}, \mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ ,  $\mathbb{F}$  est une matrice dont la ligne  $i$  est égale à  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_{s,i})$  et  $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x})$  sont les multiplicateurs de Lagrange associés à la contrainte de non biais.

Les paramètres  $\boldsymbol{\theta}$  sont calculés par maximum de vraisemblance (l'expression de la vraisemblance étant analytique à partir des expressions (5) et (6)). Les paramètres  $\boldsymbol{\beta}$  sont calculés durant la résolution du système (7).

Les expressions (5), (6) et (7) appellent plusieurs remarques :

- La méthode du krigeage dépend essentiellement du choix du noyau de covariance  $k(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \boldsymbol{\theta})$ , les paramètres  $\boldsymbol{\theta}$  étant estimés par maximum de vraisemblance. On notera la similitude avec l'interpolation par RBF qui dépend de la fonction radiale choisie et de ses paramètres.
- On peut montrer que la moyenne de  $U|u(\mathbf{x}_s) = \mathbf{u}_s$  est le meilleur estimateur (au sens de la variance de l'erreur) non biaisé de  $u(\mathbf{x})$ .
- On notera la similitude entre l'expression (7) et celle que l'on obtient par une interpolation RBF. Ainsi, l'expression de la moyenne (5) est égale à une interpolation par RBF dans le cas où la fonction radiale choisie est une fonction de covariance (symétrique définie positive, ce qui est plus contraignant que le cadre RBF général). Toutefois, le krigeage offre la possibilité d'utiliser des fonctions de covariance orthotropes ( $\boldsymbol{\theta}$  est de dimension 3 dans le cas général) contrairement aux fonctions radiales (isotropes par définition).
- Dans la suite nous allons comparer 3 fonctions de covariance différentes,
  - exponentielle carrée :

$$k(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \boldsymbol{\theta}) = \exp\left(\sum_{i=1}^3 -\theta_i (x_i - x'_i)^2\right)$$

- exponentielle valeur absolue :

$$k(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \boldsymbol{\theta}) = \exp\left(\sum_{i=1}^3 -\theta_i |x_i - x'_i|\right)$$

- linéaire :

$$k(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^3 \max(0, 1 - \theta_i |x_i - x'_i|)$$

Le choix du noyau implique implicitement des hypothèses sur la régularité de la fonction inconnue  $u$ . L'exemple de la section 3 illustrera l'influence de ces hypothèses.

### 2.3 Prise en compte de l'incertitude d'interpolation et principe des travaux virtuels

Tout d'abord, remarquons que l'on pourrait appliquer l'interpolation par krigeage en utilisant uniquement la prédiction moyenne du modèle donnée par l'équation (5). On obtient bien alors une interpolation linéaire de la forme (1),

$$\mathbf{u}_a = H_{KU}\mathbf{u}_s$$

où  $H_{KU}$  est une matrice dont chaque ligne est un vecteur  $\lambda(\mathbf{x})$  calculé aux points du maillage fluide  $\mathbf{x}_a$  (approche proposée dans [8]). Cette approche utilisant uniquement la valeur moyenne du processus gaussien conditionné  $U|u(\mathbf{x}_s) = \mathbf{u}_s$  ne permet pas de prendre en compte l'incertitude associée à l'interpolation et n'exploite donc pas le caractère probabiliste de l'interpolation par krigeage.

Afin de prendre en compte l'incertitude d'interpolation nous proposons d'utiliser l'information disponible sur le processus gaussien conditionné  $U|u(\mathbf{x}_s) = \mathbf{u}_s$ . Pour cela on introduit l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  et on écrit le problème d'interpolation de la façon suivante,

$$U_a(\omega) = H_{KU}\mathbf{u}_s + \epsilon_a(\omega) \quad (8)$$

avec  $\omega \in \Omega$ ,  $\epsilon_a(\omega)$  un vecteur aléatoire gaussien de moyenne nulle et de matrice de covariance  $K_a$  telle que  $K_{a,i,j} = k_{KU}(\mathbf{x}_{a,i}, \mathbf{x}_{a,j})$ .  $U_a(\omega)$  désigne le vecteur aléatoire modélisant les réponses aux nœuds du maillage fluide connaissant celles du maillage structure et prenant en compte l'aléa dû à l'interpolation par krigeage. On notera que ce vecteur est de moyenne  $H_{KU}\mathbf{u}_s$  et de covariance  $K_a$ .

Dans la suite nous utiliserons l'expression (8) pour l'interpolation des réponses sur le maillage fluide. Reste à présent à donner l'expression des chargements sur le maillage structure connaissant ceux sur le maillage fluide. Pour cela, à  $\omega$  fixé, on cherche à respecter le principe des travaux virtuels, *i.e.*

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_s^t \mathbf{F}_s &= U_a(\omega)^t \mathbf{f}_a \\ \Rightarrow \mathbf{u}_s^t \mathbf{F}_s &= (H_{KU}\mathbf{u}_s + \epsilon_a(\omega))^t \mathbf{f}_a. \end{aligned}$$

Contrairement au cas de l'interpolation linéaire, cette condition ne suffit plus à déterminer entièrement le vecteur  $\mathbf{F}_s$  et de nouvelles hypothèses doivent être ajoutées. Nous proposons d'utiliser la forme

$$\mathbf{F}_s(\omega) = \mathbf{f}_s + \epsilon_s(\omega) \quad (9)$$

avec  $\epsilon_s(\omega)$  un vecteur aléatoire de moyenne nulle, de sorte que l'espérance de  $\mathbf{F}_s$  soit égale à  $\mathbf{f}_s$ .

A l'aide de cette nouvelle hypothèse le principe des travaux virtuels conduit à,

$$\mathbf{u}_s^t \mathbf{f}_s + \mathbf{u}_s^t \epsilon_s(\omega) = \mathbf{u}_s^t H_{KU}^t \mathbf{f}_a + \epsilon_a^t(\omega) \mathbf{f}_a. \quad (10)$$

Le calcul de l'espérance de l'équation (10) conduit à  $\mathbf{f}_s = H_{KU}^t \mathbf{f}_a$ , qui est égale au cas de l'interpolation déterministe.

Il reste maintenant à *distribuer* le terme  $\epsilon_a^t(\omega) \mathbf{f}_a$  sur  $\epsilon_s(\omega)$ . Pour cela on suppose que le vecteur aléatoire  $\epsilon_s(\omega)$  est parfaitement corrélé à  $\epsilon_a(\omega)$  par la relation,

$$\epsilon_s(\omega) = \alpha(\omega) H_{KU}^t \epsilon_a(\omega)$$

avec  $\alpha(\omega)$  une constante (à  $\omega$  fixé). Ainsi, le terme d'erreur  $\epsilon_a^t \mathbf{f}_a$  est *distribué* sur le vecteur  $\mathbf{F}_s$  par la même matrice d'interpolation  $H_{KU}^t$ . En utilisant cette expression dans l'Eq. (10), nous obtenons,

$$\alpha(\omega) = \frac{\epsilon_a^t(\omega) \mathbf{f}_a}{\mathbf{u}_s^t H_{KU} \epsilon_a(\omega)}.$$

Nous venons donc de définir les relations d'interpolation notées  $I_{as}$  et  $I_{sa}$  dans le système (4), en nous assurant du respect du principe des travaux virtuels pour un événement aléatoire  $\omega$  fixé. La prochaine section concerne la résolution du système (4).

## 2.4 Problème couplé aléatoire

L'introduction du vecteur aléatoire  $\epsilon_a$  dans l'interpolation des réponses aux nœuds du maillage fluide connaissant celles aux nœuds du maillage structure, conduit au système stochastique suivant,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{U}_s(\omega) &= \mathcal{M}_s(\mathbf{F}_s(\omega)) \\
 \mathbf{U}_a(\omega) &= I_{as}(\mathbf{U}_s(\omega)) \\
 \mathbf{F}_a(\omega) &= \mathcal{M}_a(\mathbf{U}_a(\omega)) \\
 \mathbf{F}_s(\omega) &= I_{sa}(\mathbf{F}_a(\omega))
 \end{aligned} \tag{11}$$

dont l'inconnue est la loi de probabilité jointe des vecteurs  $\mathbf{U}_s, \mathbf{U}_a, \mathbf{F}_a, \mathbf{F}_s$ . La résolution de ce système par chaos polynomial ([10]) est une perspective de ce travail. Les difficultés spécifiques à lever pour mettre en œuvre cette approche sur ce problème seront discutées dans la section 4.

Toutefois, afin d'illustrer l'intérêt de la prise en compte de l'aléa associé à l'interpolation de maillage, nous proposons dans un premier temps de résoudre le système (11) par la méthode de Monte Carlo. Pour cela, nous rappelons qu'une réalisation aléatoire du vecteur  $\epsilon_a(\omega)$  s'obtient par,  $\epsilon_a(\omega) = C_a \xi(\omega)$  avec  $C_a$  la matrice triangulaire inférieure de la décomposition de Cholesky de  $K_a$  et  $\xi(\omega)$  un vecteur aléatoire de dimension  $n_a$ , de composantes gaussiennes centrées réduites indépendantes. Le système (11) est ensuite résolu pour un nombre  $n_{MC}$  de réalisations aléatoires du vecteur  $\epsilon_a(\omega)$ , permettant d'obtenir  $n_{MC}$  réalisations aléatoires des vecteurs  $\mathbf{U}_s, \mathbf{U}_a, \mathbf{F}_a, \mathbf{F}_s$ . Ces réalisations sont ensuite utilisées pour calculer des estimateurs de certaines quantités statistiques (moyenne, variance, intervalle de confiance). On notera que pour chaque réalisation aléatoire, la résolution du système non linéaire implique un algorithme itératif (en pratique on utilise un algorithme de point fixe). En appelant  $n_{iter}$  le nombre moyen d'itérations nécessaires pour résoudre le système (11), le nombre d'appels aux solveurs structure et aérodynamique est approximativement de  $n_{iter} \times n_{MC}$ .

## 3 Application

### 3.1 Présentation

Afin de présenter l'intérêt de la prise en compte de l'incertitude d'interpolation dans un calcul couplé de type fluide-structure, nous proposons une illustration sur un calcul *quasi*-1D. Nous utilisons un cas test étudié par [9]. Les paramètres pour les calculs aérodynamique et structure sont donnés dans le tableau 1.

demie envergure	16 m	altitude	20 km
corde	1 m	masse volumique de l'air	0.0889 kg.m <sup>-3</sup>
axe élastique	50% de la corde	vitesse	25m.s <sup>-1</sup>
centre de gravité	50% de la corde	incidence	2°
profil	NACA0012		
rigidité flexion plan y – z	2.10 <sup>4</sup> N.m <sup>2</sup>		
rigidité flexion plan x – y	5.10 <sup>6</sup> N.m <sup>2</sup>		
rigidité torsion	1.10 <sup>4</sup> N.m <sup>2</sup>		

TABLE 1 – Données du couplage aéro-structure

Il s'agit d'étudier l'équilibre statique de cette aile en prenant en compte l'effet de la déformation élastique de la structure. Pour cela, le champ de pression sur l'aile est obtenu par un modèle linéaire de fluide potentiel résolu par la méthode des singularités [11] (méthode des panneaux). En pratique on utilise le solveur open source PANAIR ([1]) qui utilise une représentation 3D de la géométrie. La figure 1 i) présente la discrétisation par panneaux utilisée. Afin de se ramener à un problème uni-dimensionnel, la résultante des efforts et les moments sont calculés sur un modèle 1D équivalent comportant 16 nœuds équidistants situés sur l'axe élastique de l'aile. Le modèle structure est un modèle éléments finis de poutre comptant 5 éléments, dont les 6 nœuds sont représentés sur la figure 1 ii). On se place ici dans un cadre plutôt favorable puisque chaque nœud du maillage structure est confondu avec un nœud du maillage fluide. Ce choix permettra de montrer l'influence de la propagation d'incertitude dans le système

Noyau	$n_{iter}$
Exponentiel carré	1.3
Exponentiel valeur absolue	4.1
Linéaire	4.8

TABLE 2 – Nombre moyen d’itérations pour atteindre la convergence de l’algorithme de point fixe pour les 3 noyaux étudiés.

non linéaire (11) même si l’incertitude d’interpolation aux nœuds du maillage structure est nulle (voir résultats).

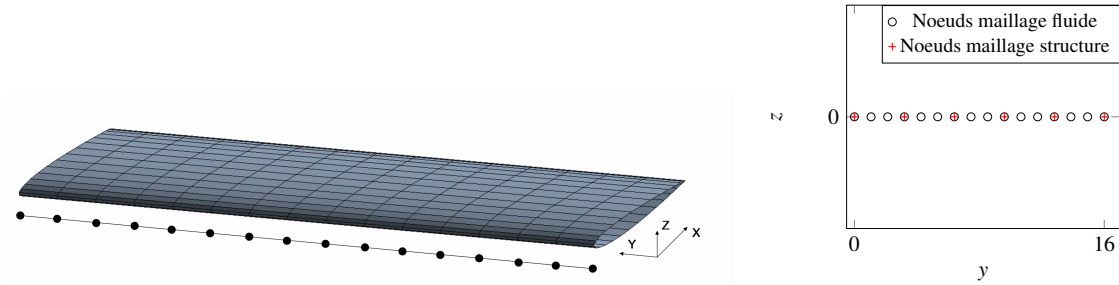


FIGURE 1 – i) Maillage 3D utilisé pour calculer le champ de pression et maillage 1D équivalent ii) Maillage fluide 1D et maillage structure 1D

Les modèles 1D fluide et structure comportent 6 DDL par nœud. Les 6 problèmes d’interpolation sont traités de façon indépendante en construisant 6 modèles de krigeage (hypothèse classiquement utilisée dans l’interpolation de maillage).

### 3.2 Résultats

Le système stochastique (11) est résolu par la méthode de Monte Carlo avec  $n_{MC} = 1000$ . Pour chaque réalisation aléatoire, on considère l’équilibre atteint lorsque la variation relative entre 2 itérations successives de l’algorithme de point fixe est inférieur à 1% (variation relative moyenne sur les composantes des vecteurs  $\mathbf{U}_s(\omega)$ ,  $\mathbf{U}_a(\omega)$ ,  $\mathbf{F}_a(\omega)$ ,  $\mathbf{F}_s(\omega)$ ). Afin d’accélérer la convergence le point de départ de l’algorithme de point fixe est fixé à la solution de la réalisation précédente. On note que le nombre moyen d’itérations de l’algorithme de point fixe est dépendant du choix du noyau (voir tableau 2).

Les figures 2-i) ii) iii) présentent respectivement les moyennes de la translation sur l’axe z (flexion), de l’angle de rotation autour de y (vrillage) et de la résultante de l’effort suivant z (portance) aux nœuds du maillage fluide, pour les 3 noyaux considérés. Sur ces estimateurs des moyennes, nous pouvons noter

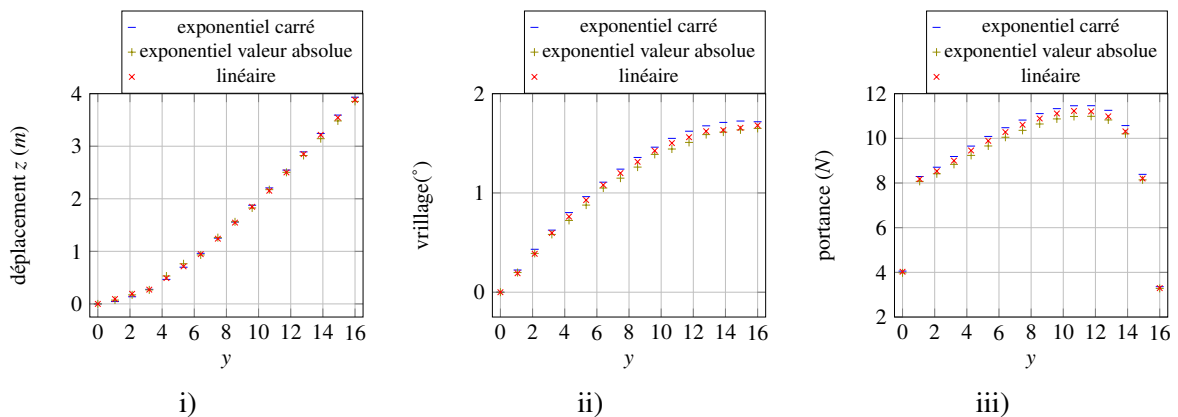


FIGURE 2 – Estimateur des moyennes par Monte Carlo i) Translation z ii) Vrillage iii) Portance

que les tendances sont les mêmes pour les 3 noyaux et qu’elles sont cohérentes avec les résultats présentés dans [9]. Toutefois, en terme de déformation, il semble que le noyau exponentiel carré soit celui qui

Réponse	exponentiel carré	exponentiel val. abs.	linéaire
Translation $z$	0.19%	3.93%	2.48%
Vrillage	0.11%	6.24%	3.57%
Portance	0.29%	5.42%	3.42%

TABLE 3 – Coefficient de variation des 3 réponses étudiées pour le nœud situé en bout d’aile.

conduit aux plus grandes déformations en moyenne, suivi par le noyau linéaire puis par le noyau exponentiel valeur absolue. Les résultats obtenus sur la portance moyenne sont la conséquence de la remarque précédente (le vrillage étant positif, plus il est élevé plus la portance sera importante, en accord avec le modèle fluide utilisé).

Ces résultats sur les valeurs moyennes sont similaires à ceux que l’on pourrait obtenir par une méthode d’interpolation classique et ne permettent pas de quantifier l’incertitude due à l’interpolation. Pour cela, nous utilisons à présent les résultats obtenus par la méthode de Monte Carlo pour calculer les quantiles à 2.5% et 97.5% afin d’obtenir un intervalle de confiance à 95% centré sur la médiane. Les figures 3 i) ii) iii) présentent ces intervalles de confiances.

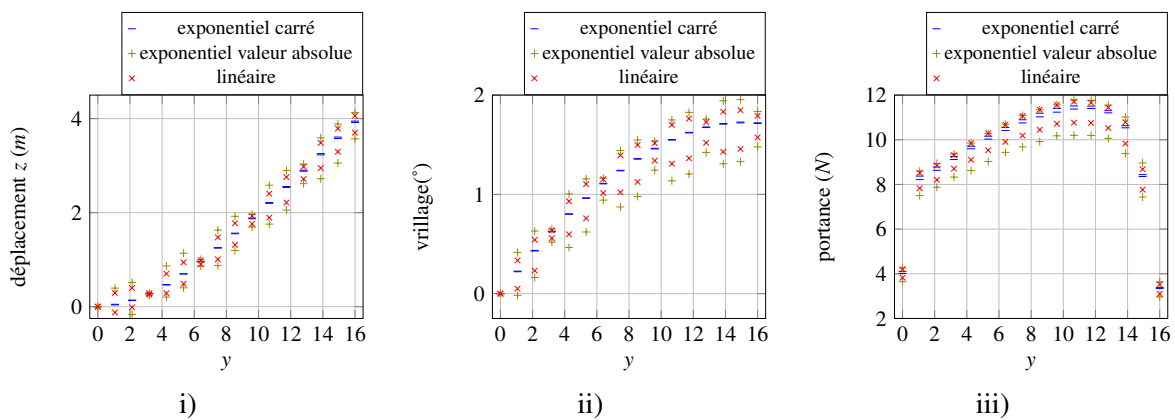


FIGURE 3 – Estimateur des intervalles de confiance à 95% par Monte Carlo i) Translation  $z$  ii) Vrillage iii) Portance

Enfin, le tableau 3 donne les coefficients de variation de la translation sur  $z$ , du vrillage et de la portance du nœud en bout d’aile.

Ces résultats permettent de faire plusieurs remarques.

- Si l’influence du noyau sur les valeurs moyennes est relativement faible, elle est nettement plus importante sur le niveau d’incertitude due à l’interpolation. En effet, les noyaux linéaire et exponentiel valeur absolue, conduisent à des intervalles de confiance beaucoup plus larges que ceux obtenus avec le noyau exponentiel carré qui sont pratiquement confondus avec les valeurs moyennes sur les figures 3-i) ii) iii). Ceci signifie que l’incertitude introduite par l’utilisation des noyaux linéaire et exponentiel valeur absolue est significativement plus importante que celle introduite par l’utilisation du noyau exponentiel carré (ceci justifie également que le nombre d’itérations moyen de l’algorithme de point fixe soit plus important avec ces noyaux, voir tableau 2)
- Afin d’expliquer la remarque précédente, nous rappelons que le choix du noyau suppose implicitement des propriétés de régularité sur la fonction à interpoler. Ainsi, l’utilisation du noyau exponentiel carré suppose que fonctions à interpoler sont indéfiniment différentiables. Sur cet exemple 1D les fonctions à interpoler étant effectivement très régulières nous obtenons une dispersion très faible des prédictions par krigeage.
- Il est également intéressant de remarquer que, même pour les nœuds du maillage fluide confondus avec un nœud du maillage structure, la dispersion n’est pas nulle. En effet, la réponse en ces points étant dépendante de celles des autres nœuds du maillage, chaque réalisation aléatoire du système (11) conduit à un état d’équilibre différent également en ces points.
- Enfin, les résultats du tableau 3 montrent que l’incertitude associée à l’interpolation peut être non négligeable. En effet, des coefficients de variation de l’ordre de 5% sont observés avec le noyau exponentiel valeur absolue, bien que le cas test étudié soit relativement simple (modèles linéaires

et 1D).

## 4 Conclusions et perspectives

Le but de cette étude était de quantifier l'incertitude introduite par interpolation dans un calcul couplé fluide-structure partitionné. Pour cela, nous avons proposé d'utiliser l'interpolation par krigeage associée à une formulation originale du problème d'interpolation. L'interpolation par krigeage étant basée sur une hypothèse de processus gaussien, il est possible de propager l'incertitude associée à l'interpolation dans le calcul couplé fluide-structure. L'application traitée a permis de mettre en évidence que le niveau d'incertitude pouvait être relativement élevé mais surtout qu'il était très dépendant du choix du noyau. Ainsi, dans un cas classique d'interpolation entre maillages, où les informations sur la régularité des fonctions à interpoler ne sont pas connues (champs de pression au niveau d'un choc), il semblerait plus prudent de considérer les noyaux conduisant à la plus grande dispersion.

D'un point de vue méthodologique, l'utilisation de la méthode de Monte Carlo pour la propagation d'incertitude n'est pas optimale. En effet, même si celle-ci est classiquement utilisée pour obtenir des résultats de référence, son coût de calcul est limitant et permet difficilement d'envisager l'application de la méthode proposée sur des solveurs fluide et structure de niveau de fidélité plus important. Pour cela, une des perspectives de ce travail est d'obtenir une représentation fonctionnelle de la réponse aléatoire par une approche de type chaos polynomial. Bien que cette approche ait été appliquée aux cas des calculs couplés ([10], [12]) la difficulté concerne ici la représentation de la source d'incertitude. Dans le cadre de processus aléatoires, l'approche classique consiste à les discrétiser, par exemple par décomposition de Karhunen Loève. Dans le problème que nous traitons, la source d'aléa est le processus gaussien conditionné  $U|u(\mathbf{x}_s) = \mathbf{u}_s$ , or, obtenir une discrétisation efficace de ce type de processus est une question ouverte.

## Références

- [1] G.R. Saaris *A5021 User's Manual-PANAIR Technology Program for Solving Problems of Potential Flow about Arbitrary Configurations*, Boeing, 1992
- [2] A. de Boer, A.H. van Zuijlen, H. Bijl. *Review of coupling methods for non matching meshes*, Computer methods in applied mechanics and engineering, Elsevier, 1515-1525, 2007
- [3] T.C.S. Rendall and C.B. Allen. *Unified fluid-structure interpolation and mesh motion using radial basis functions*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, John Wiley & Sons, 1519-1559, 2007
- [4] M. Lombardi, N. Parolini, A. Quarteroni. *Radial basis functions for inter-grid interpolation and mesh motion in FSI problems*, Computer methods in applied mechanics and engineering, Elsevier, 117-131, 2013
- [5] D.G. Krige. *A Statistical Approach to Some Mine Evaluations and Allied Problems at Witwatersrand*, Master's thesis, University of Witwatersrand, Johannesburg, South Africa, 1951
- [6] C.E. Rasmussen, C.K.I. Williams. *Gaussian Processes for Machine Learning*, MIT Press, 2006
- [7] A. Forrester, A. Sobester, A. Keane. *Engineering Design Via Surrogate Modeling : A Practical Guide*, Wiley, 2008
- [8] J. Lee, J.H. Kwon. *On the Use of Kriging in the Interpolation of Fluid-Structure Interaction Analysis*, Computational Fluid Dynamics JOURNAL, Japan Society of Computational Fluid Dynamics, 294-299, 2008
- [9] M.J. Patil, D.H. Hodges. *On the importance of aerodynamics and structural geometrical nonlinearities in aeroelastic behavior of high-aspect-ratio wings*, Journal of Fluids and Structure, Elsevier, 905-915, 2004
- [10] M. Arnst, R. Ghanem, E. Phipps, J. Red-Horse. *Dimension reduction in stochastic modeling of coupled problems*, International journal for numerical methods in engineering, Wiley, Chichester, ROYAUME-UNI, 940-968, 2012
- [11] J. Katz, A. Plotkin. *Low-Speed Aerodynamics*, Cambridge University Press, 2001
- [12] S. Dubreuil, N. Bartoli, C. Gogu, T. Lefebvre. *Propagation of Modeling uncertainty by Polynomial Chaos Expansion in Muldisciplinary Analysis*, Journal of Mechanical Design, ASME, 111411-11, 2016