

# Evaluation de la fiabilité en Mécanique de la Rupture assistée par un classificateur de machine à vecteurs de support probabiliste

R. Chocat<sup>1,2,3</sup>, P. Beaucaire<sup>2</sup>, L. Debeugny<sup>1</sup>, J.P. Lefebvre<sup>2</sup>, C. Sainvitu<sup>1</sup>,  
E. Wyart<sup>2</sup>, P. Breilkopf<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Airbus Safran Launchers, loic.debeugny@airbusafran-launchers.com

<sup>2</sup> Cenaero, {rudy.chocat, paul.beaucaire, jean-pierre.lefebvre}@cenaero.fr; {caroline.sainvitu, eric.wyart}@cenaero.be

<sup>3</sup> Roberval, Université de Technologie de Compiègne, piotr.breilkopf@utc.fr

---

## Résumé —

En Mécanique de la Rupture, l'évaluation de la fiabilité permet de traiter les incertitudes relatives aux paramètres d'entrée du modèle numérique. Les méthodes pour déterminer la probabilité de défaillance nécessitent un nombre conséquent d'appels au modèle numérique pour obtenir un niveau de précision compatibles avec des contraintes industrielles. Pour pallier ces difficultés, il est proposé de substituer cet appel au modèle par une approche à base de métamodèles de classification de type machine à vecteurs de support en utilisant un plan d'expériences adaptatif reposant sur la probabilité de mauvaise classification.

**Mots clés** — fiabilité, probabilité de défaillance, machine à vecteurs de support probabiliste, diagramme d'évaluation de défaillance, plan d'expériences adaptatif.

---

## 1 Introduction

En Mécanique de la Rupture (MR), le modèle numérique est soumis à de nombreuses incertitudes relatives à la géométrie, aux propriétés matériaux, aux chargements et à l'anomalie considérée. Une approche commune pour traiter les incertitudes est de réaliser une étude déterministe dans les conditions les plus défavorables [1]. Cependant, bien que cela assure la tenue mécanique du composant de façon conservative, le cumul nécessaire d'hypothèses conduit à surdimensionner. Pour éviter cela, les incertitudes peuvent être prises en compte par l'intermédiaire des approches probabilistes [2]. Ces approches assignent des modèles stochastiques aux variables du modèle et permettent notamment de quantifier la fiabilité du composant.

La fiabilité en MR est généralement évaluée selon un critère de défaillance basé sur le Facteur d'Intensité de Contrainte [3] (FIC) ou selon la combinaison de celui-ci avec un second critère basé sur la rotule plastique [4]. Les méthodes pour évaluer la probabilité de défaillance se distinguent entre les méthodes d'approximation telles que la méthode *FORM* et celles de simulation telles que la méthode de *Monte-Carlo*. Les secondes sont privilégiées, car la précision est contrôlable et dépend du nombre d'évaluations du modèle. La principale limitation de cette approche est le temps de restitution du résultat qui est conditionné par le coût en temps de calcul nécessaire pour évaluer le modèle. Pour pallier ces difficultés, la solution envisagée consiste alors à substituer l'appel au modèle dans les méthodes de simulation par un métamodèle "instantanément" évaluable.

Cette contribution propose une méthodologie qui permet d'effectuer le calcul de la probabilité de défaillance avec la précision souhaitée en combinant les critères en MR, tout en limitant le nombre d'appels au modèle numérique.

## 2 Evaluation de la fiabilité en Mécanique de la Rupture

### 2.1 Probabilité de défaillance en combinant les critères de défaillance en fissuration

En considérant un vecteur  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$  de  $d$  variables aléatoires  $X_i$  définies respectivement par les densités de probabilité  $f_{X_i}(X_i)$ , et  $G(\mathbf{X})$  la fonction de performance qui traduit le mode de défaillance du système, l'espace  $\mathbb{X}^d$  se sépare en :

- un domaine sûr où  $G(\mathbf{X}) > 0$ ,
- un domaine défaillant où  $G(\mathbf{X}) \leq 0$ .

La frontière entre ces deux espaces  $G(\mathbf{X}) = 0$  est communément appelée l'état limite. La probabilité de défaillance  $p_f$  est définie de la façon suivante :

$$p_f = \text{Prob}(G(\mathbf{X}) \leq 0) \quad (1)$$

qui s'exprime sous la forme d'une intégrale :

$$p_f = \int_{G(\mathbf{X}) \leq 0} f_{\mathbf{X}} d\mathbf{X}. \quad (2)$$

La fonction de performance permet de coupler deux critères de défaillance :

- l'un basé sur le Facteur d'Intensité de Contrainte (FIC)  $K_{\text{eq}}$  défini pour chaque point du front de fissure :

$$K_r = \frac{K_{\text{eq}}}{K_{IC}} < 1 \quad \text{avec : } K_{\text{eq}} = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2 + \frac{K_{III}^2}{1-\nu}} \quad (3)$$

où  $\nu$  est le coefficient de Poisson et  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$  sont respectivement les FIC selon les principaux modes de fissuration : ouverture, cisaillement et déchirement et  $K_{IC}$  est la ténacité du matériau .

- l'autre basé sur la capacité du ligament restant à supporter la charge mécanique :

$$L_r = \frac{\bar{\sigma}_{\text{nom}}}{\bar{\sigma}_{p0.2}} \leq \frac{\bar{\sigma}_{p0.2} + \bar{\sigma}_m}{2\bar{\sigma}_{p0.2}}, \quad (4)$$

où  $\bar{\sigma}_{p0.2}$  et  $\bar{\sigma}_m$  sont respectivement la contrainte à 0.2% de plasticité et la contrainte de rupture.  $\bar{\sigma}_{\text{nom}}$  est la contrainte nominale calculée dans le ligament restant.

Les critères sont combinés en les reportant dans le diagramme de défaillance FAD (Failure Assessment Diagram) et en calculant la marge  $M_{\text{FAD}}$  par rapport à la limite de défaillance FAL (Failure Assessment Limit) définie par la règle R6 [5] :

$$\text{FAL}(K_r, L_r) = K_r - \begin{cases} \frac{0.3 + 0.7 \exp(-\mu L_r^6)}{\sqrt{1 + 0.5 L_r^2}} & \text{pour } L_r \leq 1, \\ \frac{0.3 + 0.7 \exp(-\mu)}{\sqrt{1.5}} L_r^{\frac{n_r-1}{2n_r}} & \text{pour } 1 < L_r < L_r^{\text{max}}, \\ 0 & \text{pour } L_r \geq L_r^{\text{max}}, \end{cases} \quad (5)$$

avec :

$$\mu = \min\left\{10^{-3} \frac{E}{\bar{\sigma}_{p0.2}}, 0.6\right\}, \quad n_r = 0.3 \left(1 - \frac{\bar{\sigma}_{p0.2}}{\bar{\sigma}_m}\right), \quad L_r^{\text{max}} = \frac{\bar{\sigma}_{p0.2} + \bar{\sigma}_m}{2\bar{\sigma}_{p0.2}}, \quad (6)$$

où  $E$  est le module de Young. La FAL repose donc principalement sur les propriétés matériau du composant. Elle est représentée en trait continu rouge sur la Figure 1. La marge FAD est déterminée en introduisant le point B qui est le point d'intersection entre la limite FAL et la droite (OA). Une fois les différents points définis, la marge FAD est calculée de la façon suivante :

$$M_{\text{FAD}} = \left( \frac{|\text{OB}|}{|\text{OA}|} - 1 \right) = G(\mathbf{X}). \quad (7)$$

La probabilité de défaillance devient :

$$P_f = P(G(\mathbf{X}) \leq 0) = P(M_{\text{FAD}}(L_r, K_r) \leq 0). \quad (8)$$

## 2.2 Modèle

La probabilité de défaillance est calculée sur un cas d'application représentatif de la réalité via l'outil numérique ESACRACK [6]. Le modèle est celui d'un barreau en traction de type TC11 dans la nomenclature NASGRO [7] comme illustré à la Figure 2. Deux paramètres sont considérés comme aléatoires afin de faciliter la visualisation :

- la taille de fissure  $c$  définie selon la loi uniforme  $c \sim U[0 \text{ mm}, 1 \text{ mm}]$ ,
- le chargement  $S_0$  défini selon la loi normale  $S_0 \sim \mathcal{N}(35 \text{ MPa}, 10\%)$ .

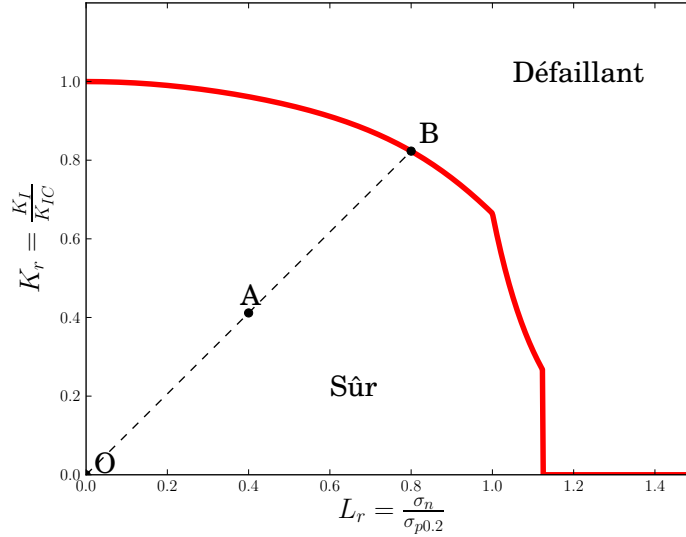


FIGURE 1 – Diagramme d’évaluation de la défaillance FAD. La ligne continue rouge représente la limite de défaillance définie par la règle R6 qui sépare la zone défaillante de la zone sûre. Le point A est le point de coordonnées  $(L_r, K_r)$ , le point O est l’origine et le point B est le point de la Failure Assessment Limit (FAL) pour calculer la marge FAD Eq.(5).

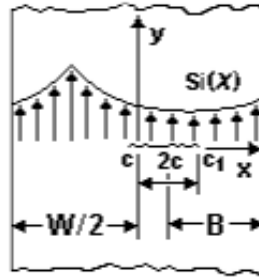


FIGURE 2 – Modèle de fissure TC11 dans la nomenclature NASGRO.  $W$  est la largeur,  $B$  est l’offset de la fissure ajusté ici à  $W/2$  et  $S_i(X)$  est la fonction de chargement définie comme constante telle que  $S_i(X) = S_0$ .

### 2.3 Méthode d’évaluation de la probabilité de défaillance

La probabilité de défaillance est généralement déterminée par la méthode de *Monte-Carlo* qui consiste à évaluer le modèle  $N_{MC}$  fois à partir d’un échantillon aléatoire. L’estimateur  $\hat{p}_f$  non biaisé de  $p_f$  s’exprime tel que :

$$\hat{p}_f = \frac{1}{N_{MC}} \sum_{k=1}^{N_{MC}} \mathbb{I}_{G(\mathbf{x}_k) \leq 0}, \quad c_{vpf} = \sqrt{\frac{1 - \hat{p}_f}{N_{MC} \hat{p}_f}} \quad (9)$$

où  $\mathbb{I}_{G(\mathbf{x}_k)}$  est la fonction indicatrice et  $c_{vpf}$  est le coefficient de variation de  $p_f$ . La précision est alors dépendante du nombre d’appels au modèle  $N_{MC}$ . Dans le cas d’application, la probabilité visée est de l’ordre de  $2 \times 10^{-3}$ , pour obtenir un indice de covariance de  $\hat{p}_f$  de 10%, environ 50000 évaluations du modèle sont nécessaires. Le temps total pour calculer cette probabilité sur une machine équipée d’un processeur *Intel Core i3 2.40GHz* avec 8.00 Go de RAM est de  $50000 \times 1.84$  sec, ce qui avoisine 24 h. Dans le cas de modèle plus coûteux à évaluer (de type élément finis), le temps de restitution de  $\hat{p}_f$  peut devenir incompatible avec des contraintes industrielles.

Pour pallier cette difficulté, l’appel au modèle est substitué par un métamodèle “instantanément” évaluable. Dans le contexte fiabiliste, il doit permettre de décrire au mieux l’état limite là où la probabilité est la plus importante (la zone la plus proche de l’origine dans l’espace standard). Le classificateur à base

de *machine à vecteurs de support* (SVM, Support Vector Machine) est considéré. En se basant sur un plan d'expériences  $P_{\text{exp}} = [\mathbf{X}_{\text{exp}}, Y_{\text{exp}}]$  où le modèle est évalué et en considérant deux classes :

- les individus défaillants où  $G(X) \leq 0$ ,
- les individus sûrs où  $G(X) > 0$ ,

les SVM permettent de construire un séparateur optimal  $\mathcal{W}(\mathbf{x})$  :

$$\mathcal{W}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_{\text{entr}}} \alpha_i y_i \mathcal{K}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) + S, \quad (10)$$

où  $\alpha_i$  sont les multiplicateurs de Lagrange,  $S$  est le seuil et  $\mathcal{K}(\cdot, \cdot)$  est la fonction noyau qui est généralement choisie comme gaussienne.

Le séparateur est construit sur un plan d'expériences qui permet de capter les caractéristiques globales du modèle. Cependant, il peut manquer de précision dans la zone d'intérêt autour de l'état limite. Ainsi, l'approche à base de raffinement adaptatif du plan d'expériences permet d'améliorer itérativement le classificateur [8]. Dans le contexte fiabiliste, plusieurs stratégies ont été développées pour les SVM. La méthode *SVM adaptive* [9] et la méthode  $^2\text{SMART}$  [10] se basent sur la notion de marge SVM (zone où l'incertitude sur le classificateur est la plus grande) et de *clustering* pour affiner le plan d'expériences. Les approches basées sur *Simulation des chaînes de Markov adaptatives* [11, 12, 13, 14] échantillonnent de façon aléatoire seulement dans la zone d'intérêt. Les méthodes *Max-Min* [15, 16] se basent principalement sur la notion de distance pour améliorer la qualité du séparateur tandis que la méthode *Generalized Max-Min* [17] inclut en plus la notion de distribution des variables d'entrée.

## 2.4 Stratégie adaptative à base de PSVM

Platt [18] et Vapnik [19] introduisent la notion de probabilité de classification au travers des SVM probabilistes notée PSVM. En se basant sur un plan d'expériences où les individus sûrs  $G(\mathbf{X}) > 0$  et défaillants  $G(\mathbf{X}) \leq 0$  appartiennent respectivement aux classes  $+1$  et  $-1$ , les PSVM, en plus de construire le séparateur, fournissent une information sur la probabilité qu'un individu appartienne à une classe. Platt [18] propose le modèle sigmoïde pour construire les PSVM en se basant seulement sur le séparateur SVM. La distribution des points d'entraînement n'est pas prise en compte. Ainsi, Bashudar [20] propose d'introduire la notion de distance aux points d'entraînements. La probabilité  $P(+1|\mathbf{x})$  est définie par la fonction suivante :

$$P(+1|\mathbf{x}) = 1 - P(-1|\mathbf{x}) = \frac{1}{1 + \exp(A\mathcal{W}(\mathbf{x}) + B(\frac{d_-}{d_+ + \tau} - \frac{d_+}{d_- + \tau}))} \quad (11)$$

où  $d_-$  et  $d_+$  sont respectivement les distances aux points du plan d'expériences négatifs et positifs les plus proches de  $\mathbf{x}$ ,  $\tau$  est une faible quantité (de l'ordre de  $10^{-10}$ ) et  $A$  et  $B$  sont les paramètres du modèle sigmoïde déterminés par maximum de vraisemblance. L'objectif de cette modélisation consiste à obtenir une incertitude plus importante là où l'information est la moins connue, loin des points d'entraînement. La probabilité de mauvaise classification  $P_{\text{mc}}$  s'exprime de la façon suivante :

$$P_{\text{mc}} = \begin{cases} 1 - P(+1|\mathbf{x}) & \text{si : } \mathcal{W}(\mathbf{X}) \leq S \\ P(+1|\mathbf{x}) & \text{si : } \mathcal{W}(\mathbf{X}) > S \end{cases} \quad (12)$$

La Figure 3 représente la probabilité de mauvaise classification sur le cas d'application décrit à la Section 2.2.

L'objectif du raffinement adaptatif est alors de minimiser la probabilité de mauvaise classification là où cela présente un intérêt pour l'évaluation de la probabilité de défaillance. C'est dans les zones où l'état limite a la plus grande chance d'être vu. La stratégie adaptative est la suivante :

1. un séparateur SVM est construit sur la base du plan d'expériences.
2. un échantillon d'individus candidats est généré. selon la distribution  $\mathbf{f}_{\mathbf{x}}$ .
3. pour chaque individu, la probabilité de mauvaise classification est évaluée à l'aide des PSVM.
4. sur l'échantillon d'individus candidats, le point retenu est obtenu en résolvant :

$$\max_{\mathbf{x}} P_{\text{mc}}, \quad (13)$$

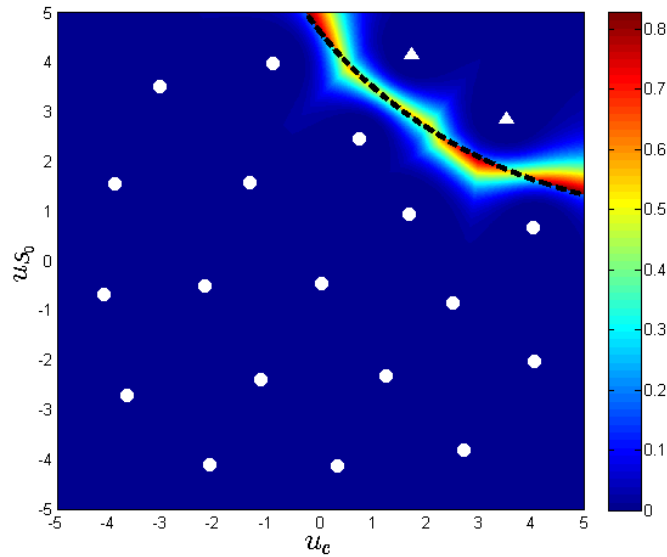


FIGURE 3 – Représentation de la probabilité de mauvaise classification dans l’espace standard sur le cas test de la Section 2.2. Le trait discontinu noir représente le séparateur SVM. Les points blancs représentent les individus du plan d’expériences dont la marge est positive et les triangles blancs représentent les individus négatifs.

5. ce point est évalué par l’intermédiaire du modèle et ajouté au plan d’expériences.
6. retour à l’étape 1.

## 2.5 Résultats

TABLE 1 – Tableau répertoriant les résultats de l’évaluation de la probabilité de défaillance en utilisant des approches à base de métamodèles et de plan d’expériences adaptatifs

| Méthode                       | MCS                   | AK+MCS                | GMM+MCS               | PSVM+MCS              |
|-------------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| Nombre d’évaluations ESACRACK | 50000                 | 30                    | 30                    | 30                    |
| Probabilité de défaillance    | $2,09 \times 10^{-3}$ | $6,00 \times 10^{-4}$ | $2,29 \times 10^{-3}$ | $2,22 \times 10^{-3}$ |

La probabilité de défaillance déterminée par une approche de type *Monte-Carlo* (MCS) sert de référence. Les méthodes *Adaptive Kriging* (AK) [21] pour le krigeage et *Generalized Max-Min* (GMM) [17] pour les SVM sont appliquées sur ce cas test (voir Figure 4) pour comparer avec la méthode adaptative à base de PSVM. Le temps de restitution des résultats est de l’ordre de la minute. Le Tableau 1 répertorie les probabilités de défaillance obtenues via les différents méthodes et il en ressort que les approches à base de SVM fournissent des résultats proches de ceux obtenus par MCS contrairement à la méthode AK à base de krigeage. Comme illustré à la Figure 4, les approches à base de SVM sont plus adaptées que la méthode à base de krigeage pour l’allure graphique de l’état limite. Cela vient du fait que la propagation s’arrête dès que la marge devient négative. La marge des individus défaillants est proche de zéro comme le montre la Figure 5. La fonction de performance semble être caractérisée par un "plat" dans le domaine de défaillance. Le krigeage se basant sur la régression par interpolation, les phénomènes mis en jeu ne sont pas appréhendés de façon correcte. Les SVM reposant sur la notion de classification, seul le signe de la fonction de performance importe pour construire l’état limite. Cette approche nous semble donc la plus adaptée pour réduire le nombre d’appels au modèle initial dans ce cadre d’utilisation.

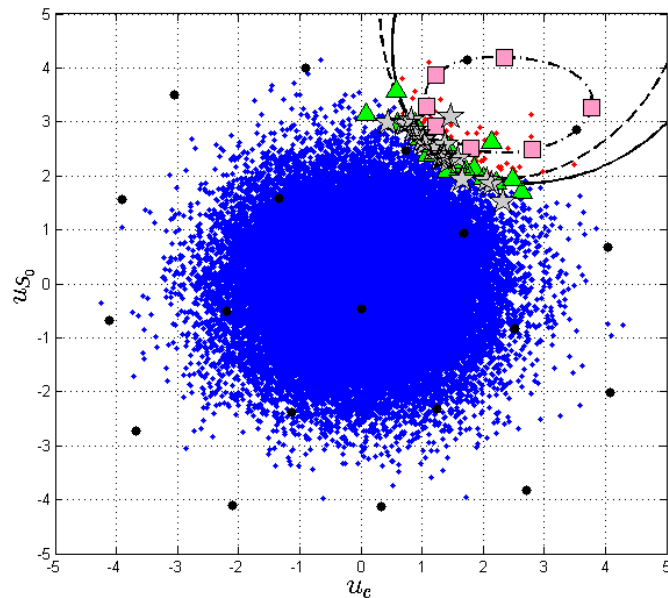


FIGURE 4 – Comparaison de la détermination de l'état limite par les méthodes AK (tiret-point noir), GMM (tiret noir) et PSVM (trait noir). Le plan d'expériences initial est représenté par les point noirs. Les individus obtenus par la méthode AK sont les carrés roses, ceux par la méthode GMM sont les triangles verts et ceux par PSVM sont les étoiles grisées. Les individus de l'analyse par *Monte-Carlo* sont aussi tracés pour visualiser la qualité du séparateur. Les individus sûrs et défaillants sont respectivement représentés par des points bleus et rouges.

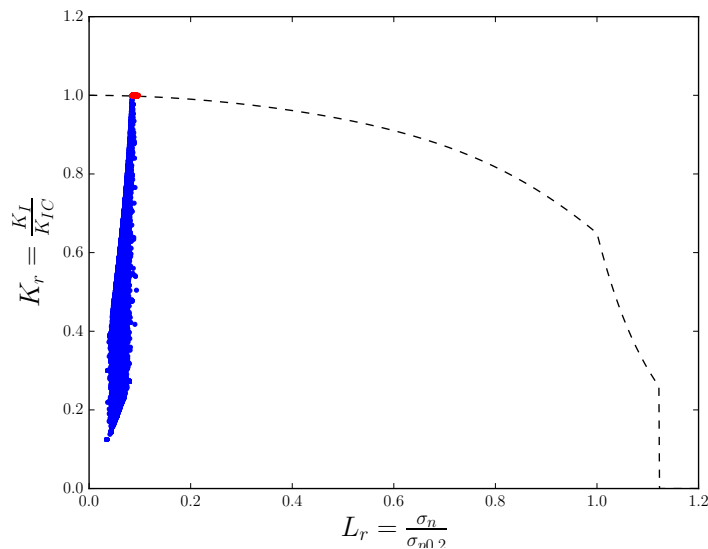


FIGURE 5 – Répartition des individus de l'analyse par *Monte-Carlo* dans le diagramme d'évaluation de la défaillance FAD. Les individus sûrs et défaillants sont respectivement représentés par des points bleus et rouges.

### 3 Conclusion

Cette contribution présente l'analyse de fiabilité par combinaison de modes de défaillance en Mécanique de la Rupture. Elle met en évidence la nécessité d'utiliser les approches par métamodèle de classification pour réduire les temps de calcul dépendants du nombre d'appels au modèle de fissuration.

Afin d'améliorer la qualité du séparateur à prédire les zones d'intérêt, une stratégie de raffinement du plan d'expériences est proposée en introduisant un critère reposant sur la notion de machine à vecteurs de support probabilistes PSVM. Cette stratégie est comparée sur un cas d'application type barreau en traction via l'outil ESACRACK avec les méthodes adaptatives *Adaptive Kriging* (AK) [21] pour le krigeage et *Generalized Max-Min* (GMM) [17] pour les SVM. Il ressort de la comparaison que les approches par SVM (GMM et PSVM) ont des résultats très similaires et que la fonction de performance ne se prête pas à l'utilisation de la régression par krigeage. Le critère PSVM doit alors être développé et validé sur des cas de complexité croissante.

## Remerciement

Les travaux présentés dans cette contribution sont financièrement supportés par le Centre National d'Etudes Spatiales et l'Association Nationale de la Recherche et de la Technologie (convention CIFRE n° 2015/0209).

## Références

- [1] W.H. Greenwood and K.W. Chase. A new tolerance analysis method for designers and manufacturers. *Journal of Engineering for Industry*, 109(2) :112–116, 1987.
- [2] S. Sankararaman, Y. Ling, and S. Mahadevan. Uncertainty quantification and model validation of fatigue crack growth prediction. *Engineering Fracture Mechanics*, 78(7) :1487–1504, 2011.
- [3] W.K. Liu, Y. Chen, T. Belytschko, and Y.J. Lua. Three reliability methods for fatigue crack growth. *Engineering fracture mechanics*, 53(5) :733–752, 1996.
- [4] G. Walz and H. Riesch-Oppermann. Probabilistic fracture mechanics assessment of flaws in turbine disks including quality assurance procedures. *Structural Safety*, 28(3) :273–288, 2006.
- [5] I. Milne, R.A. Ainsworth, A.R. Dowling, and A.T. Stewart. Assessment of the integrity of structures containing defects. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 32(1) :3–104, 1988.
- [6] Esacrack 7.1 manual. Technical report.
- [7] R.G. Forman, V. Shivakumar, S.R. Mettu, and J.C. Newman. Fatigue crack growth computer program nasgro version 3.0. *Reference Manual, NASA JSC-22267B*, 2000.
- [8] J.E. Hurtado. *Structural reliability : statistical learning perspectives*, volume 17. Springer Science & Business Media, 2013.
- [9] J.E. Hurtado and D.A. Alvarez. Classification approach for reliability analysis with stochastic finite-element modeling. *Journal of Structural Engineering*, 129(8) :1141–1149, 2003.
- [10] F. Deheeger. *Couplage mécano-fiabiliste : 2 SMART-méthodologie d'apprentissage stochastique en fiabilité*. PhD thesis, Université Blaise Pascal-Clermont-Ferrand II, 2008.
- [11] Y. Xiukai, L. Zhenzhou, and L. Yuanbo. Support vector machine response surface method based on fast markov chain simulation. In *Intelligent Computing and Intelligent Systems, 2009. ICIS 2009. IEEE International Conference on*, volume 4, pages 279–282. IEEE, 2009.
- [12] H. Dai, H. Zhang, W. Wang, and G. Xue. Structural reliability assessment by local approximation of limit state functions using adaptive markov chain simulation and support vector regression. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 27(9) :676–686, 2012.
- [13] J.M. Bourinet. Reliability assessment with sensitivity-based adaptive svm surrogates. In CRC Press, editor, *Safety, Reliability, Risk and Life-Cycle Performance of Structures and Infrastructures*, volume 3297-3304, 2014.
- [14] J.M. Bourinet. Rare-event probability estimation with adaptive support vector regression surrogates. *Reliability Engineering & System Safety*, 150 :210–221, 2016.
- [15] A. Basudhar and S. Missoum. An improved adaptive sampling scheme for the construction of explicit boundaries. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 42(4) :517–529, 2010.
- [16] H. Song, K.K. Choi, I. Lee, L. Zhao, and D. Lamb. Adaptive virtual support vector machine for reliability analysis of high-dimensional problems. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 47(4) :479–491, 2013.
- [17] S. Lacaze and S. Missoum. A generalized “max-min” sample for surrogate update. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 49(4) :683–687, 2014.

- [18] J. Platt. Probabilistic outputs for support vector machines and comparisons to regularized likelihood methods. *Advances in large margin classifiers*, 10(3) :61–74, 1999.
- [19] V.N. Vapnik and V. Vapnik. *Statistical learning theory*, volume 1. Wiley New York, 1998.
- [20] A. Basudhar and S. Missoum. Reliability assessment using probabilistic support vector machines. volume 7, pages 156–173. Inderscience Publishers Ltd, 2013.
- [21] B. Echard. *Evaluation par krigage de la fiabilité des structures sollicitées en fatigue*. PhD thesis, Université Blaise Pascal-Clermont-Ferrand II, 2012.