

Association des méthodes MFS et PGD pour la résolution des problèmes transitoires

A. Sogah^{1,2}, K. Kpogan^{1,2}, A. Tri³, N. Mathieu^{1,2}, H. Zahrouni^{1,2}, M. Potier-Ferry^{1,2}

¹ LEM3, Université de Lorraine, {amen-amevi.sogah, kekele.kpogan, norman.mathieu, hamid.zahrouni, michel.potier-ferry}@univ-lorraine.fr

² Labex DAMAS, Université de Lorraine, France

³ Laboratoire de Mécanique/FSAC-ISEM de Casablanca, Maroc, jaliltri@yahoo.fr

Résumé — On propose dans ce travail un algorithme associant la méthode des solutions fondamentales (MFS) et la méthode de décomposition propre généralisée (PGD) pour résoudre l'équation de la chaleur en régime transitoire. La méthode PGD, moyennant une séparation de variables, permet de décomposer le problème original en un problème en temps résolu par la méthode classique de Runge-Kutta et un autre en espace approché par la méthode sans maillage MFS. Pour montrer l'efficacité de cet algorithme, deux exemples sont présentés dans ce travail et leurs résultats sont comparés aux solutions de référence.

Mots clés — Décomposition Propre Généralisée (PGD), Méthode sans maillage, Méthode des Solutions Fondamentales (MFS), Problème transitoire de la chaleur.

1 Introduction

Dans ce papier, on propose de combiner la méthode sans maillage basée sur la méthode des solutions fondamentales et la méthode de décomposition propre généralisée pour résoudre les équations aux dérivées partielles instationnaires et en particulier celles qui gouvernent le problème transitoire de la chaleur. Pour les problèmes instationnaires, la communauté des utilisateurs des solutions fondamentales dans le cadre des méthodes sans maillage suivent deux voies possibles. La première consiste à utiliser une transformée de Laplace et la seconde utilise directement des solutions fondamentales dépendantes du temps [4, 5, 6]. Dans le présent travail, on propose une troisième alternative qui consiste à coupler la méthode MFS avec la méthode PGD. Cette dernière, moyennant une séparation entre le temps et l'espace, permet de réécrire l'équation originale en deux problèmes couplés l'un en temps et l'autre en espace. La résolution se fait en premier lieu avec une approximation de l'espace par la méthode MFS sachant que la fonction en temps est supposée connue. L'équation différentielle en temps est ensuite résolue par une méthode classique de Runge-Kutta. La méthode PGD appartient aux méthodes de réduction de modèles permettant de réduire la dimensionnalité du problème physique étudié. Chinesta et al. [3] ont largement contribué au développement de cette technique dans divers domaines des sciences de l'ingénieur. Dans une récente référence, Bonithon et al. [1] ont couplé la PGD et la méthode BEM (Boundary Element Method). La différence avec la présente étude réside essentiellement dans l'utilisation de la méthode MFS et par conséquent de la forme forte des équations bien appropriée au contexte de la méthode MFS. Après une introduction, on présente la formulation du problème de la chaleur instationnaire ainsi que le principe de la méthode PGD suivi d'une courte description de la méthode MFS. Enfin, au travers d'exemples numériques, nous montrons l'efficacité de l'algorithme proposé.

2 Formulation du problème et la méthode PGD

On considère le problème transitoire de la chaleur avec les conditions aux limites et initiale suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} - k\Delta u(x,y,t) = f(x,y,t) & \text{dans } \Omega \times \tau \\ u(x,y,t_0) = g(x,y) & \text{dans } \Omega \\ u(x,y,t) = h(x,y,t) & \text{sur } \partial\Omega \times \tau \end{cases} \quad (1)$$

avec Ω un domaine dans l'espace \mathcal{R}^2 , $\partial\Omega$ sa frontière, $\tau = [t_0, t_{max}]$ l'intervalle de temps, u le champ de température, k le coefficient de conductivité thermique constant, f , g et h sont des fonctions données. Dans le cadre de la méthode PGD, la solution du problème (1) est recherchée sous la forme de la somme de couples, constitués du produit d'une fonction spatiale ϕ_i et d'une fonction temporelle T_i , c'est à dire :

$$u(x, y, t) \approx u_n = \sum_{i=1}^n \phi_i(x, y) T_i(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \phi_i(x, y) T_i(t) + \phi_n(x, y) T_n(t) \quad (2)$$

Connaissant les $(n-1)$ premiers couples, nous allons décrire l'algorithme permettant de déterminer les fonctions ϕ_n et T_n . Pour simplifier l'écriture, on réécrit $\{\phi_n, T_n\} = \{\phi, T\}$ et on introduit la fonction poids supposée égale à $u^* = \phi T^* + \phi^* T$. L'équation (1) est alors décomposée en deux équations, l'une pour chercher la fonction d'espace $\phi(x, y)$ et l'autre permet de déterminer le champ en temps $T(t)$. En effet, la stratégie pour calculer le couple $\{\phi, T\}$ se fait en deux étapes. Premièrement, on considère que T est connue et on détermine ϕ en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} -k\alpha_t \Delta \phi(x, y) + \beta_t \phi(x, y) = \langle f(x, y, t), T(t) \rangle - \sum_{i=1}^{n-1} (-k\alpha_t^i \Delta \phi_i(x, y) + \beta_t^i \phi_i(x, y)) & \text{dans } \Omega \\ \alpha_t \phi(x, y) = \langle h(x, y, t), T(t) \rangle - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_t^i \phi_i(x, y) & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3)$$

où

$$\begin{cases} \alpha_t = \langle T, T \rangle; & \alpha_t^i = \langle T_i, T \rangle \quad i = 1, \dots, n-1; \\ \beta_t = \langle \frac{dT}{dt}, T \rangle; & \beta_t^i = \langle \frac{dT_i}{dt}, T \rangle \end{cases} \quad (4)$$

On note que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente le produit scalaire. L'équation (3) est alors résolue par la méthode sans maillage MFS. Par ailleurs, d'autres techniques appropriées peuvent être utilisées. Deuxièmement, une fois que la solution ϕ est connue, nous déterminons $T(t)$ en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha_x \frac{dT(t)}{dt} - k\beta_x T(t) = \langle f(x, y, t), \phi(x, y) \rangle - \sum_{i=1}^{n-1} \left(\alpha_x^i \frac{dT_i(t)}{dt} - k\beta_x^i T_i(t) \right) \\ \alpha_x T(t_0) = \langle g(x, y), \phi(x, y) \rangle - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_x^i T_i(t_0) \end{cases} \quad (5)$$

où

$$\begin{cases} \alpha_x = \langle \phi(x, y), \phi(x, y) \rangle; & \alpha_x^i = \langle \phi_i(x, y), \phi(x, y) \rangle, \quad i = 1, \dots, n-1; \\ \beta_x = \langle \Delta \phi(x, y), \phi(x, y) \rangle; & \beta_x^i = \langle \Delta \phi_i(x, y), \phi(x, y) \rangle \end{cases} \quad (6)$$

Le système (5) est alors résolu par la méthode de Runge-Kutta.

3 La méthode MFS

Dans cette section, nous proposons de résoudre par MFS le problème (3) pris sous la forme générique suivante à chaque pas,

$$\begin{cases} \Delta \phi(x, y) + \gamma(x, y) \phi(x, y) = \mathcal{F}(x, y) & \text{dans } \Omega \\ \phi(x, y) = \mathcal{B}(x, y) & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (7)$$

Les fonctions \mathcal{F} et \mathcal{B} sont données. Le système (7) représente des EDP avec des opérateurs différentiels à coefficients variables et dont la solution fondamentale n'est pas disponible. Pour la résolution de ce système, la méthode des équations analogues (AEM) est utilisée pour le transformer en un problème de Poisson standard. Ceci consiste à maintenir le Laplacien, dont la solution fondamentale est connue, à gauche et les autres termes sont déplacés au second membre. L'équation (7) devient alors,

$$\begin{cases} \Delta\phi(x,y) = -\gamma(x,y)\phi(x,y) + \mathcal{F}(x,y) = \mathcal{H}(x,y,\phi) & \text{dans } \Omega \\ \phi(x,y) = \mathcal{B}(x,y) & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (8)$$

qui est facilement résolue par la méthode MFS si la fonction \mathcal{H} est connue. Or \mathcal{H} dépend de l'inconnue ϕ , d'où la nécessité de la méthode MFS-MPS (MPS : méthode des solutions particulières). L'idée suppose que la solution d'une EDP combine simultanément la solution particulière et la solution homogène. Ceci permet d'écrire cette solution sous la forme suivante :

$$\phi(x,y) \approx \tilde{\phi} = \sum_{i=1}^{N_d} \eta_i v(r_i) + \sum_{j=1}^{N_s} \theta_j G(\rho_j) \quad (9)$$

où N_d et N_s représentent respectivement les points d'interpolation à l'intérieur du domaine Ω et le nombre de points sur la frontière Γ . Les coefficients $\{\eta_i\}_{i=1}^{N_d}$ et $\{\theta_j\}_{j=1}^{N_s}$ sont des inconnus à déterminer. La fonction $v(r)$ représente la solution particulière de l'opérateur de Laplace défini par :

$$\Delta v(r) = \varphi(r) \quad (10)$$

où la $\varphi(r)$ est la fonction de base radiale qui permet d'approcher le second membre de la première équation (8), ainsi :

$$\mathcal{H}(x,y,\phi) = \sum_{i=1}^{N_d} \eta_i \varphi(r_i) \quad (11)$$

où $r_i = \|(x,y) - (x_i,y_i)\|$, $(x_i,y_i)_{i=1..N_d}$ sont des points de collocation dans le domaine. On note également que :

$$G(\rho_j) = -\frac{1}{2\pi} \log(\rho_j) \quad (12)$$

est la solution fondamentale du Laplacien pour le problème 2D caractérisé par,

$$\Delta G(\rho) = 0 \quad (13)$$

Les $\rho_j = \|(x,y) - (x_{s_j},y_{s_j})\|$, $(x_{s_j},y_{s_j})_{j=1..N_s}$ représentent les points sources pris sur la frontière fictive Γ contenant le domaine Ω . Au lieu de chercher la solution particulière et la solution homogène séparément, nous avons l'intention d'obtenir les coefficients $\{\eta_i\}_{i=1}^{N_d}$ et $\{\theta_j\}_{j=1}^{N_s}$ simultanément. En introduisant (9) dans (8), on a :

$$\sum_{i=1}^{N_d} \eta_i \Psi(r_i) + \sum_{j=1}^{N_s} \theta_j \Theta(\rho_j) = \mathcal{F}(x,y) \quad \text{dans } \Omega \quad (14)$$

telles que :

$$\Psi(r_i) = \Delta v(r_i) + \gamma(x,y)v(r_i) = \varphi(r_i) + \gamma(x,y)v(r_i) \quad (15)$$

et

$$\Theta(\rho_j) = \Delta G(\rho_j) + \gamma(x,y)G(\rho_j) = \gamma(x,y)G(\rho_j) \quad (16)$$

Les fonctions $\Psi(r)$ et $\Theta(\rho)$ sont connues. L'efficacité et la précision de l'interpolation dépendent du choix des fonctions de base radiale φ . En effet, les polynômes de Lagrange, les interpolants de Fourier, les fonctions radiales polynomiales, les thin plate splines (TPS) ainsi que les fonctions multi-quadratiques (MQ) peuvent être utilisés. Dans ce travail, on propose d'utiliser les fonctions de base radiales multi-quadratiques suivantes :

$$\varphi(r) = \sqrt{c^2 + r^2} \quad (17)$$

D'où

$$v(r) = \frac{1}{9}(4c^2 + r^2)\sqrt{c^2 + r^2} - \frac{c^3}{3}\log(c + \sqrt{c^2 + r^2}) \quad (18)$$

En 2D, le paramètre c est une constante choisie égale à 1.

Pour la mise en œuvre de cette technique, nous choisissons N_d points intérieurs dans le domaine Ω , N_b

points sur la frontière $\partial\Omega$ et N_s points sources sur la frontière fictive Γ . Par collocation, on obtient un système d'ordre $(N_d + N_s) \times (N_d + N_b)$ à résoudre :

$$\begin{bmatrix} \Psi(r_{ij}) & \Theta(\rho_{ij}) \\ v(r_{ij}) & G(\rho_{ij}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathcal{F} \\ \mathcal{B} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

Une fois que les coefficients $\{\eta_i\}_{i=1}^{N_d}$ et $\{\theta_j\}_{j=1}^{N_s}$ sont déterminés en résolvant le système (19), la solution approchée est obtenue à partir de (9)

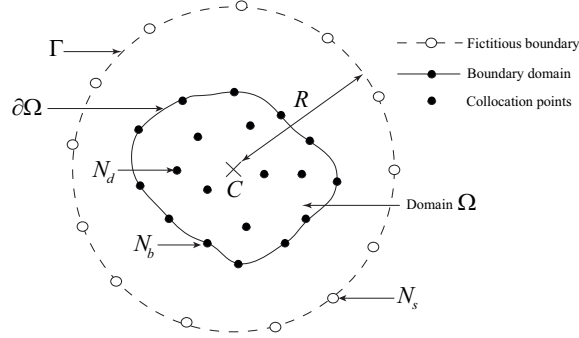


FIGURE 1 – Points de collocation, domaine Ω , bord réel $\partial\Omega$ et bord fictif Γ .

4 Exemples Numériques

Pour montrer l'efficacité de l'algorithme développé dans les sections précédentes, on résout l'équation de chaleur en régime transitoire pour différentes fonctions sources, géométries et conditions initiales et aux limites. La convergence de la méthode PGD et celle de la méthode MFS en fonction d'un certain nombre de paramètres seront présentées et en particulier, on va étudier l'influence des paramètres R , N_s et N_d . On note que n_t représente le nombre de pas de discrétisation en temps et $n_{\phi T}$ est le nombre d'enrichissement correspondant au nombre de couple $\{\phi, T\}$ nécessaire pour obtenir une bonne approximation de la solution. Pour s'assurer d'avoir une meilleure solution, on détermine les erreurs suivantes :

$$e_n = \frac{\|u_n - u_{exact}\|}{\|u_{exact}\|} \quad (20)$$

et

$$E_n = \frac{|u_n - u_{exact}|}{\|u_{exact}\|} \quad (21)$$

4.1 Exemple 1 : Fonction source constante

Dans ce test, on considère un domaine carré $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ avec des conditions initiales et aux limites homogènes. Dans ce problème la fonction source $f(x, y, t)$ est choisie égale à 1 et la solution exacte est donnée alors par :

$$u_{exact} = \int_0^{0.3} \int_0^1 \int_0^1 \tilde{G}(x, y, \bar{x}, \bar{y}, t - \bar{t}) d\bar{x} d\bar{y} d\bar{t}$$

avec $\tilde{G}(x, y, \bar{x}, \bar{y}, \xi) = 4 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sin(i\pi x) \sin(i\pi y) \sin(i\pi \bar{x}) \sin(i\pi \bar{y}) \exp(-\pi^2(i^2 + j^2)\xi)$

Pour étudier l'influence des différents paramètres de discrétisation MFS, nous avons calculé l'erreur e_n en fonction de R , N_s et N_d . Sur la figure 2, on reporte l'erreur e_n en fonction du rayon de la frontière fictive R en fixant $N_d = 45$ pour $N_s = 12$ et $N_s = 30$. On constate qu'on a une bonne approximation de la solution à partir de $R = 2$ et l'erreur se stabilise autour de 10^{-5} au-delà de $R = 5$. La figure 3 montre qu'en fixant R et N_d , l'erreur e_n diminue lorsque N_s augmente. De même, on remarque d'après la figure 4 que l'erreur e_n s'améliore en augmentant le nombre de point N_d et se stabilise autour de $N_d = 50$. A noter

que les calculs MFS sont donnés pour un nombre d'enrichissement $n_{\phi T} = 2$. Pour étudier l'influence de cet enrichissement, on a fixé les paramètres MFS et on a tracé sur la figure 5, l'erreur relative E_n pour différentes valeurs $n_{\phi T}$. On remarque pour $t = 0.015s$ que, E_n est de l'ordre de 10^{-1} pour $n_{\phi T} = 1$ et atteint $3 \cdot 10^{-3}$ pour $n_{\phi T} = 8$ pour se stabiliser autour de 10^{-3} pour $n_{\phi T} \geq 10$. L'erreur PGD diminue lorsque $n_{\phi T}$ augmente. On conclut alors que l'erreur diminue lorsque les points de collocation N_d , les points source N_s et le nombre d'enrichissement $n_{\phi T}$ augmentent avant saturation.

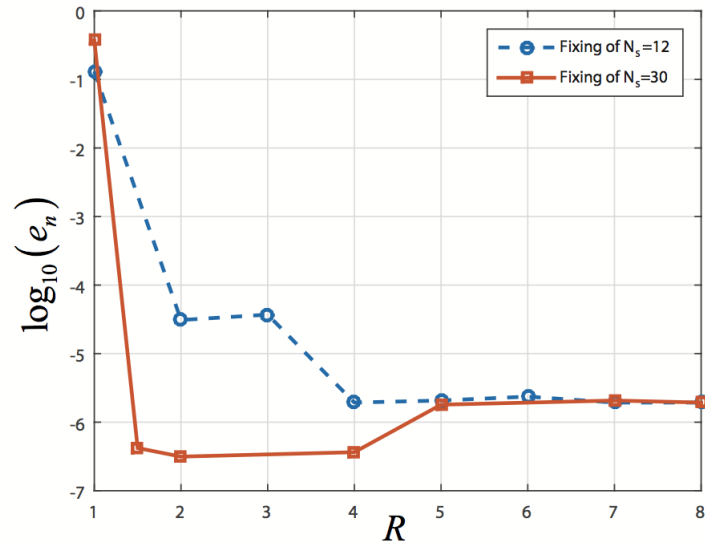


FIGURE 2 – L'erreur relative e_n en fonction du rayon R de la surface fictive ($N_d = 45$)

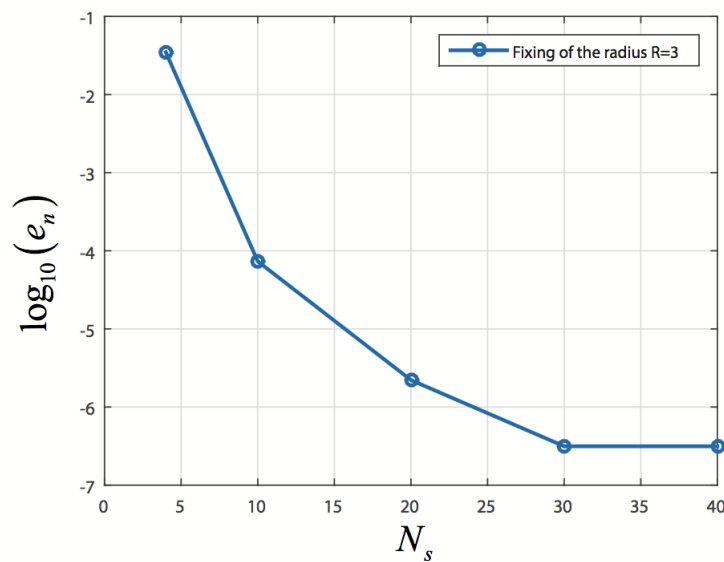


FIGURE 3 – L'erreur relative e_n en fonction du nombre de points source N_s ($N_d = 45$)

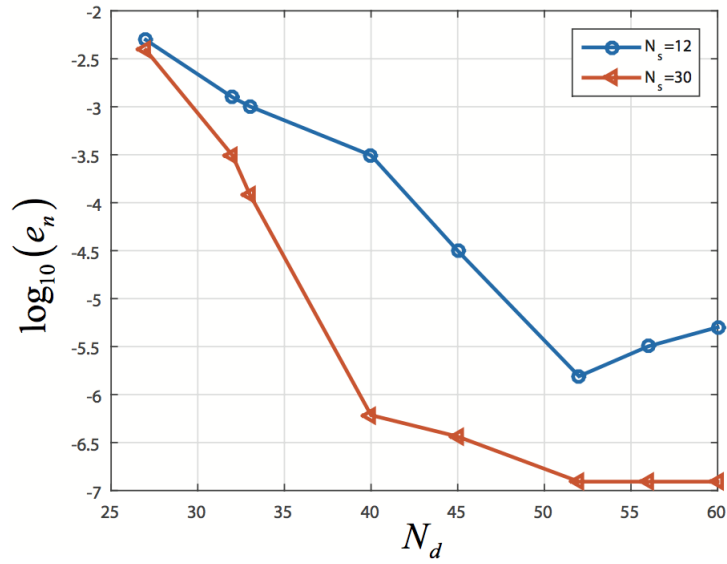


FIGURE 4 – L'erreur relative e_n en fonction du nombre de points de collocation N_d ($R = 3$)

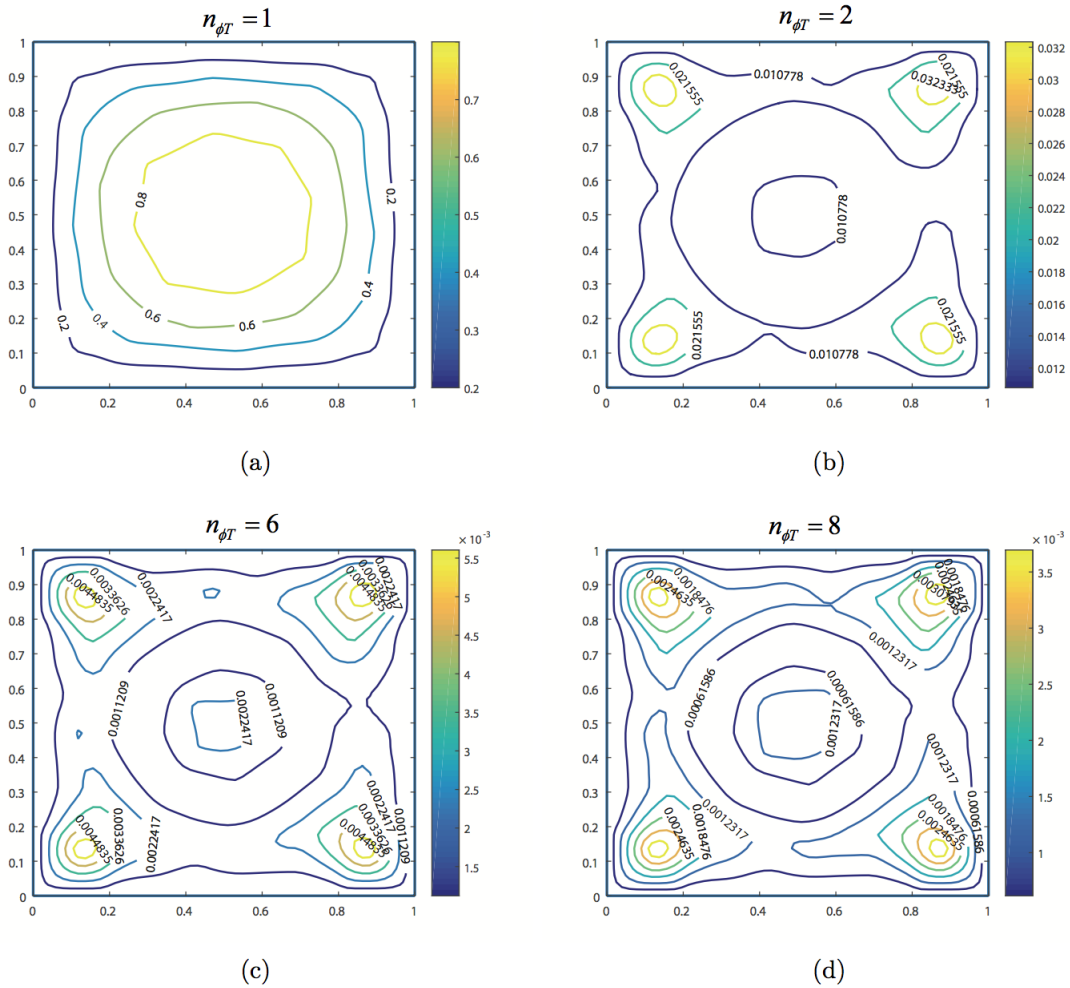


FIGURE 5 – L'erreur relative E_n pour différents couples de fonction $\{\phi_i, T_i\}$ à l'instant $t = 1.510^{-2}$, $n_t = 50$, $N_d = 30$, $N_s = 30$ et $R = 3$. (a) Un couple de fonction, (b) Deux couples de fonction, (c) Six couples de fonction, (d) Huit couples de fonction

4.2 Exemple 2 : Fonction source non séparable

On considère un domaine carré $\Omega_d = [-0.5, 0.5] \times [-0.8, 0.8]$ avec une cavité rectangulaire $\Omega_c = [-0.05, 0.05] \times [-0.4, 0.4]$ et par suite le domaine étudié est donné par $\Omega \times \tau = (\Omega_d / \Omega_c) \times [0, 0.1]$. La solution approchée est comparée à la solution exacte $u_{exact} = \log(x + y + t + 2)$ correspondant à la fonction source non séparable $f(x, y, t) = \frac{1}{t + x + y + 2} + \frac{1}{(t + x + y + 2)^2}$.

La condition initiale et aux limites correspondent à la solution exacte. Ce problème est discrétisé en 112 points de collocation, 26 points sur la frontière extérieure et 18 points sur la frontière interne. L'intervalle de temps τ est uniformément discrétisé en $n_t = 20$. Sur la Figure 6, on montre que l'erreur relative E_n diminue lorsque $n_{\phi T}$ augmente. A noter aussi que pour une fonction à variable séparée, on a besoin de moins d'enrichissement pour une meilleure approximation.

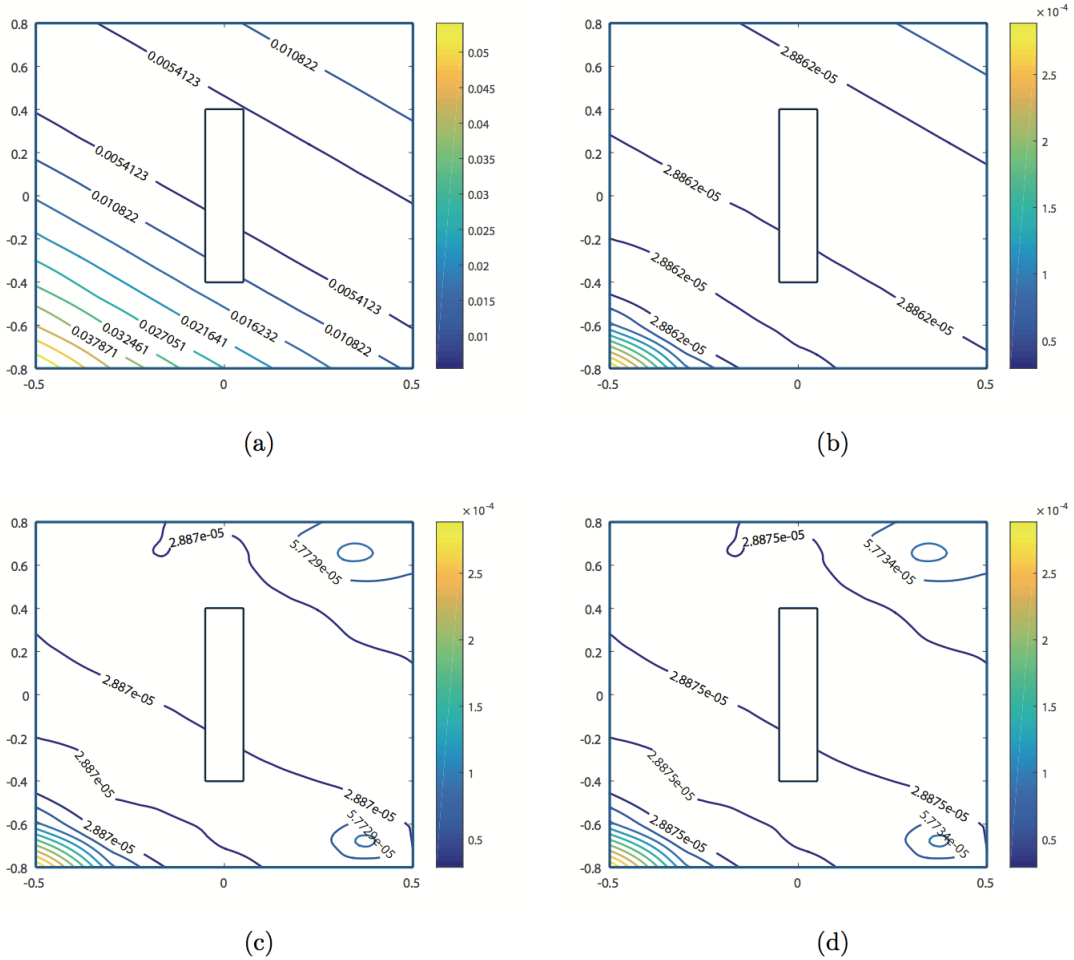


FIGURE 6 – L'erreur relative E_n pour différents couples de fonction $\{\phi_i, T_i\}$ à l'instant $t = 0.1$. (a) Un couple de fonction, (b) Deux couples de fonction, (c) Quatre couples de fonction, (d) Huit couples de fonction

5 Conclusion

Dans ce travail, nous avons proposé un algorithme combinant la méthode de solutions fondamentales et la technique de décomposition propre généralisée pour résoudre l'équation transitoire de la chaleur. A l'aide de la PGD, nous avons transformé le problème initial en deux problèmes, l'un en temps que nous avons résolu par la méthode de Runge Kutta et l'autre en espace résolu par MFS. Nous avons testé l'efficacité de l'algorithme proposé et nous avons analysé l'influence des différents paramètres de discrétisation de la MFS pour différents domaines et différentes conditions aux limites et initiales. Nous avons montré que seuls quelques termes d'enrichissement par la méthode PGD sont nécessaires pour

obtenir une meilleure convergence de la solution. Les résultats obtenus sont en bon accord avec ceux de la référence. Des travaux sont en cours pour étendre cette technique aux problèmes non linéaires 2D et 3D en associant cette procédure avec la méthode asymptotique numérique.

Références

- [1] G. Bonithon, P. Joyot, F. Chinesta, P. Villon, *Non-incremental boundary element discretization of parabolic models based on the use of the proper generalized decompositions*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 2–17, (2011) .
- [2] G. Burgess, E. Mahajerin, *Transient heat flow analysis using the fundamental collocation method*, Applied Thermal Engineering, 893–904, (2003) .
- [3] F. Chinesta, A. Ammar, E. Cueto, *Proper generalized decomposition of multi- scale models*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1114–1132, (2010).
- [4] M. A. Golberg, C. Chen, A. Muleshkov, *The method of fundamental solutions for time-dependant problems*, Boundary Element Technology XIII, 377–386, (1999) .
- [5] J. A. Kołodziej, M. Mierzwiczak, *Transient heat conduction by different versions of the Method of Fundamental Solutions – a comparison study*, Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, 75–88 (2010).
- [6] Mahajerin, G. Burgess, *A Laplace transform-based fundamental collocation method for twodimensional transient heat flow*, Applied Thermal Engineering, 101–111 ,(2003) .
- [7] A. Tri, H. Zahrouni, M. Potier-Ferry, *High order continuation algorithm and meshless procedures to solve nonlinear poisson problems*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 1705–1714,(2012).
- [8] D. L. Young, C. C. Tsai, K. Murugesan, C. M. Fan, C. W. Chen, *Time-dependent fundamental solutions for homogeneous diffusion problems*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 1463–1473, (2004) .