

# Prédiction de la localisation des déformations en utilisant un modèle d'endommagement à base micromécanique : effets des paramètres d'écroutissage et d'endommagement sur la formabilité

H. Chalal<sup>1</sup>, F. Abed-Meraim<sup>1</sup>

<sup>1</sup> LEM3, UMR CNRS 7239, Arts et Métiers ParisTech, {hocine.chalal, farid.abed-meraim}@ensam.eu

**Résumé** — Dans ce travail, les limites de ductilité associées à l'apparition d'une localisation des déformations sont prédites en utilisant le modèle d'endommagement de Gurson couplé à la théorie de bifurcation. Une étude paramétrique est effectuée, par rapport aux paramètres d'endommagement et d'écroutissage, afin d'identifier les paramètres matériaux les plus influents. L'analyse montre que les paramètres d'endommagement ont un impact significatif sur les limites de ductilité prédites, tandis que les effets d'écroutissage dépendent fortement du choix du mécanisme de germination des microcavités.

**Mots clés** — Endommagement ductile, bifurcation, limites de formabilité, effets d'écroutissage.

## 1. Introduction

Au cours des opérations de mise en forme des tôles métalliques, différents types de défauts peuvent apparaître, qui sont généralement associés aux conditions opératoires et/ou aux caractéristiques matériaux. Les instabilités plastiques correspondant à l'apparition de zones de déformations plastiques fortement localisées sont des exemples de ces phénomènes indésirables. Pour caractériser la formabilité des tôles métalliques minces, le concept de courbe limite de formage (CLF) a été introduit [6]. L'un des phénomènes les plus influents sur les limites de formabilité des tôles minces correspond au développement de l'endommagement dans le matériau. Dans ce contexte, différentes variantes du modèle de Gurson ont été formulées, parmi lesquelles le modèle GTN [10] qui sera adopté ici pour décrire l'initiation de l'endommagement ductile et son évolution au cours du chargement. Ce modèle sera couplé à l'analyse de bifurcation [8, 9] afin de prédire la localisation de la déformation dans les tôles métalliques. L'objectif de ce travail est d'étudier les effets respectifs des paramètres d'endommagement et d'écroutissage sur la prédiction des limites de ductilité en utilisant différents modèles de germination de microcavités. De même, une approche alternative est explorée pour l'analyse des effets d'écroutissage sur la localisation des déformations, qui consiste à adopter une calibration à base micromécanique des paramètres  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  du modèle GTN.

## 2. Modèle d'endommagement de type GTN

Le modèle d'endommagement ductile adopté dans ce travail est basé sur l'approche GTN, qui est une modification du modèle initial de Gurson conduisant au potentiel d'écoulement suivant (voir [10]) :

$$\Phi = \left( \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_Y} \right)^2 + 2q_1 f^* \cosh \left( \frac{3}{2} q_2 \frac{\sigma_m}{\sigma_Y} \right) - (1 + q_3 f^{*2}) \leq 0 \quad (1)$$

où  $q_1$ ,  $q_2$  et  $q_3$  sont des paramètres matériau;  $\sigma_m$  est la contrainte hydrostatique définie par  $\sigma_m = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{1} / 3$ , avec  $\boldsymbol{\sigma}$  le tenseur des contraintes de Cauchy et  $\mathbf{1}$  le tenseur identité d'ordre deux;  $\sigma_{eq}$  est la contrainte équivalente au sens de von Mises définie par  $\sigma_{eq} = \sqrt{3\mathbf{S} : \mathbf{S} / 2}$ , avec  $\mathbf{S}$  la partie

déviatorique du tenseur des contraintes de Cauchy;  $\sigma_Y$  est la contrainte d'écoulement, fonction de la déformation plastique équivalente  $\bar{\varepsilon}_m^{\text{pl}}$  associée à la matrice dense;  $f^*(f)$  est la fraction volumique modifiée de cavités, fonction de la fraction volumique réelle de cavités  $f$ , qui est définie par :

$$f^*(f) = \begin{cases} f & \text{pour } f \leq f_{cr}, \\ f_{cr} + \delta_{GTN}(f - f_{cr}) & \text{pour } f_{cr} < f \leq f_R, \end{cases} \quad \text{avec } \delta_{GTN} = \frac{f_u^* - f_{cr}}{f_R - f_{cr}} \quad (2)$$

où les paramètres d'endommagement  $f_{cr}$  et  $f_R$  représentent la porosité critique, qui correspond au déclenchement du stade de coalescence, et la porosité à rupture, respectivement. D'après l'équation (2),  $f^*(f)$  atteint sa valeur ultime  $f_u^*$  lorsque  $f = f_R$ .

La contrainte d'écoulement  $\sigma_Y$ , qui est associée au matériau complètement dense de la matrice, est supposée être gouvernée par une loi d'écrouissage isotrope, comme indiqué par l'expression suivante:

$$\dot{\sigma}_Y = h \dot{\bar{\varepsilon}}_m^{\text{pl}} \quad (3)$$

où  $h$  est le module d'écrouissage plastique du matériau complètement dense de la matrice. La règle d'écoulement plastique fournit l'expression du taux de déformation plastique  $\mathbf{D}^p$  sous la forme :

$$\mathbf{D}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (4)$$

où  $\dot{\lambda}$  est le multiplicateur plastique et  $\partial \Phi / \partial \boldsymbol{\sigma}$  indique la direction de l'écoulement plastique. L'évolution de la fraction volumique de vide dépend à la fois de la croissance de cavités préexistantes mais aussi de la germination de nouvelles cavités. Pour la germination de nouvelles cavités, le modèle proposé par Chu et Needleman [3] est adopté ici. Ce modèle fait intervenir le taux de contrainte d'écoulement de la matrice ainsi que le taux de contrainte hydrostatique. L'expression finale de la loi d'évolution de la fraction volumique de vide est donnée par :

$$\dot{f} = \underbrace{(1-f)\mathbf{D}^p : \mathbf{1}}_{\text{croissance}} + \underbrace{\left[ (A_N/h) + B_N \right] \dot{\sigma}_Y + B_N \dot{\sigma}_m}_{\text{germination}} \quad (5)$$

Dans l'équation (5), les paramètres  $A_N$  et  $B_N$  permettent de sélectionner le modèle de germination de cavités, qui est contrôlée par la déformation pour  $A_N > 0$  et  $B_N = 0$ , ou contrôlée par la contrainte pour  $A_N = 0$  et  $B_N > 0$ . Leurs expressions suivent des lois de distribution normales (voir [3]) :

$$A_N = \frac{f_N}{s_N \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\bar{\varepsilon}_m^{\text{pl}} - \varepsilon_N}{s_N} \right)^2 \right], \quad B_N = \frac{f_N}{s_N \sigma_0 \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_Y + \sigma_m - \sigma_N}{s_N \sigma_0} \right)^2 \right] \quad (6)$$

où  $\varepsilon_N$  et  $\sigma_N$  représentent la déformation et contrainte moyenne de germination, respectivement;  $s_N$  est l'écart type sur  $\varepsilon_N$ ;  $f_N$  est la fraction volumique de particules pouvant donner lieu à germination et  $\sigma_0$  est la contrainte d'écoulement initiale de la matrice entourant les cavités. Dans le repère corotationnel, qui correspond à l'adoption d'une dérivée objective de type Jaumann, le taux de contrainte de Cauchy s'exprime par la relation hypo élastique suivante:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^e : \left( \mathbf{D} - \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) = \mathbf{C}^{ep} : \mathbf{D} \quad (7)$$

où  $\mathbf{D}$  est le tenseur taux de déformation,  $\mathbf{C}^e$  est le tenseur d'élasticité d'ordre quatre et  $\mathbf{C}^{ep}$  est le module tangent élasto-plastique. En combinant la condition de cohérence  $\dot{\Phi} = 0$  avec les équations ci-dessus, l'expression du multiplicateur plastique  $\dot{\lambda}$  est déduite sous la forme :

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{H_\lambda} \mathbf{E} : \mathbf{C}^e : \mathbf{D} \quad (8)$$

avec

$$\mathbf{E} = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{B_N}{3} \frac{\partial \Phi}{\partial f^*} \frac{\partial f^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{1} \quad (9)$$

$$H_\lambda = \mathbf{E} : \mathbf{C}^e : \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \frac{h}{(1-f)} \frac{\boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}{\sigma_Y} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_Y} + \left( \frac{A_N}{h} + B_N \right) \frac{\partial \Phi}{\partial f^*} \frac{\partial f^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right] - (1-f) \frac{\partial f^*}{\partial f} \frac{\partial \Phi}{\partial f^*} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{1} \quad (10)$$

En remplaçant le multiplicateur plastique  $\dot{\lambda}$  donné par l'équation (8) dans la loi hypo élastique (7), le module tangent élasto-plastique du modèle GTN s'obtient par la relation :

$$\mathbf{C}^{ep} = \mathbf{C}^e - \left( \mathbf{C}^e : \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \otimes \left( \mathbf{E} : \mathbf{C}^e \right) / H_\lambda \quad (11)$$

On peut remarquer que, dans le cas d'une germination contrôlée par la déformation (i.e.,  $A_N > 0$  et  $B_N = 0$ ), le module tangent élasto-plastique ci-dessus est symétrique. Cependant, dans le cas d'une germination contrôlée par la contrainte (i.e.,  $A_N = 0$  et  $B_N > 0$ ), le module tangent élasto-plastique est non-symétrique, comme c'est le cas d'une règle d'écoulement plastique non-normale ou d'un modèle de plasticité non-associée.

### 3. Critère de bifurcation

Dans cette section, les équations de comportement décrites précédemment sont couplées à un critère d'instabilité plastique, comme proposé par Rice [8] et Rudnicki et Rice [9], afin de prédire l'apparition d'une localisation de déformation. Ce critère est basé sur la théorie de bifurcation, où l'initiation d'une localisation de déformation plastique sous la forme d'une bande infinie est interprétée comme une perte d'unicité de la solution des équations d'équilibre en vitesses. Selon ce critère, la condition critique, qui correspond aussi à la perte d'ellipticité des équations gouvernant le problème aux limites associé, est liée à la singularité du tenseur acoustique  $\mathbf{A}$ , défini par  $\mathbf{A} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}$ , où  $\mathbf{n}$  est la normale à la bande de localisation et où le module tangent  $\mathbf{L}$  s'écrit :

$$\mathbf{L} = \mathbf{C}^{ep} + \mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_2 - \mathbf{Z}_3 \quad (12)$$

où  $\mathbf{Z}_1$ ,  $\mathbf{Z}_2$  et  $\mathbf{Z}_3$  sont des tenseurs d'ordre quatre qui sont formés de composantes du tenseur de contrainte de Cauchy. Ces tenseurs résultent du formalisme des grandes déformations et leurs expressions explicites peuvent être trouvées dans [1, 7]. La condition critique s'écrit alors :

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{n} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}) = 0 \quad (13)$$

## 4. Prédiction des limites de ductilité

Dans cette partie, le modèle GTN est couplé à l'analyse de bifurcation pour prédire la localisation des déformations dans des tôles métalliques soumises à des conditions de chargement biaxial. Cette approche est implantée dans le code de calcul par éléments finis ABAQUS/Standard dans le cadre des grandes déformations. Les effets sur les prédictions des limites de ductilité des paramètres d'endommagement et d'érouissage, ainsi que du choix du modèle de germination, seront analysés.

### 4.1 Modèle de germination contrôlée par la déformation

Dans cette section, la germination de nouvelles microcavités est supposée être contrôlée par la déformation, en prenant  $A_N > 0$  et  $B_N = 0$  dans le modèle GTN (voir équation (5)). Il est important de noter que dans ce cas, la normalité de l'écoulement plastique est satisfaite et le module tangent élasto-plastique  $\mathbf{C}^{ep}$  est symétrique, tandis que le tenseur acoustique  $\mathbf{A}$  est non-symétrique dû aux termes convectifs de contrainte (voir équation (12)).

Le matériau considéré ici est un alliage d'aluminium Al5754, avec un module de Young de 70000 MPa et un coefficient de Poisson de 0.33. Les paramètres d'érouissage associés (loi d'érouissage isotrope de Swift) et ceux d'endommagement sont donnés dans le Tableau 1 (voir [2]).

Tableau 1 – Paramètres d'érouissage et d'endommagement pour l'aluminium Al5754

$\varepsilon_0$	$k$ [MPa]	$n$	$f_0$	$s_N$	$\varepsilon_N$	$f_N$	$f_{cr}$	$\delta_{GTN}$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
0,00173	309,1	0,177	0,001	0,1	0,32	0,034	0,00284	7	1,5	1,0	2,15

#### 4.1.1 Effet des paramètres d'endommagement

Les effets des paramètres d'endommagement sur les prédictions des limites de ductilité pour l'alliage d'aluminium Al5754 sont analysés ici. Le nombre de paramètres d'endommagement dans le modèle GTN étant relativement important, on montrera les résultats de l'analyse pour deux paramètres particuliers que sont la fraction volumique initiale de cavités  $f_0$  et le paramètre de germination  $f_N$ .

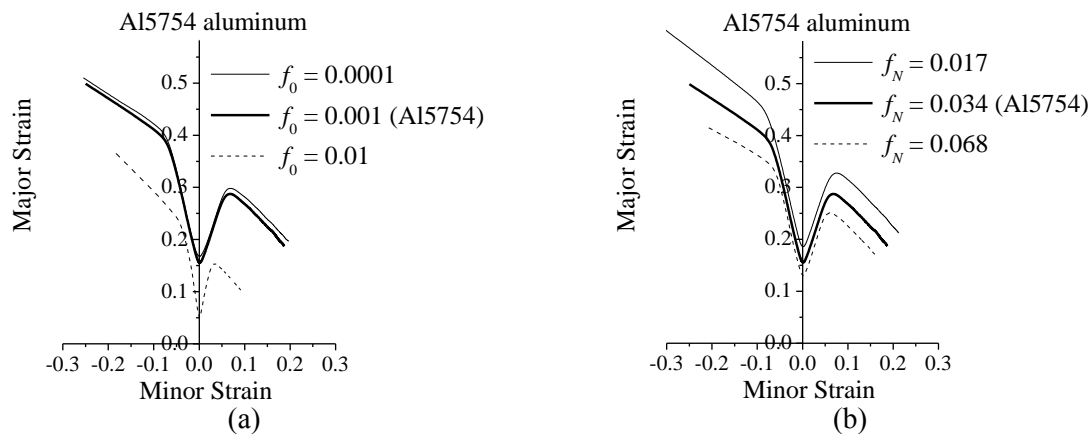


Figure 1 – Effets sur les prédictions des limites de ductilité pour l'aluminium Al5754 de : (a) la fraction volumique initiale de cavités  $f_0$ , et (b) du paramètre de germination  $f_N$

La Figure 1 montre l'impact des paramètres d'endommagement sur les prédictions des limites de ductilité pour l'aluminium Al5754. Concernant l'effet de la fraction volumique initiale de cavités  $f_0$  (Figure 1(a)), de grandes valeurs pour ce paramètre (ex.,  $f_0 = 0,01$ ) impliquent que le matériau est déjà entré en stade de coalescence, ce qui réduit significativement les limites de ductilité prédites. Cependant, pour des petites valeurs de ce paramètre  $f_0$ , les prédictions de limites de ductilité ne sont que légèrement affectées, ce qui suggère que pour de tels niveaux faibles de porosité, la croissance de cavités n'est pas le mécanisme prédominant dans l'évolution de l'endommagement. Pour le paramètre de germination  $f_N$ , les limites de ductilité prédites diminuent avec l'augmentation de ce paramètre. Cette tendance est cohérente avec la signification physique de ce paramètre (fraction volumique de particules pouvant donner lieu à une germination de microcavités), puisque de grandes valeurs de ce paramètre tendent à accélérer l'endommagement, conduisant ainsi à une localisation plus précoce de l'écoulement plastique (voir équation (6)).

#### 4.1.2 Effet de l'exposant d'écrouissage $n$

L'impact de l'exposant d'écrouissage  $n$ , associé à la loi de Swift, sur les prédictions des limites de ductilité est analysé ici pour l'aluminium Al5754. La Figure 2 montre les déformations limites prédites qui sont obtenues pour différents exposants d'écrouissage  $n$  relatifs au matériau de la matrice dense. Ces résultats révèlent que l'effet de l'exposant d'écrouissage  $n$  sur les prédictions de limites de ductilité est beaucoup plus faible que celui observé pour les paramètres d'endommagement (voir section précédente). Des résultats similaires (non montrés ici par souci de concision) sont observés pour des variations des paramètres  $k$  et  $\varepsilon_0$  de la loi d'écrouissage de Swift. Néanmoins, un effet plus perceptible est observé proche du trajet de déformation de traction plane (TP) (voir Figure 2).

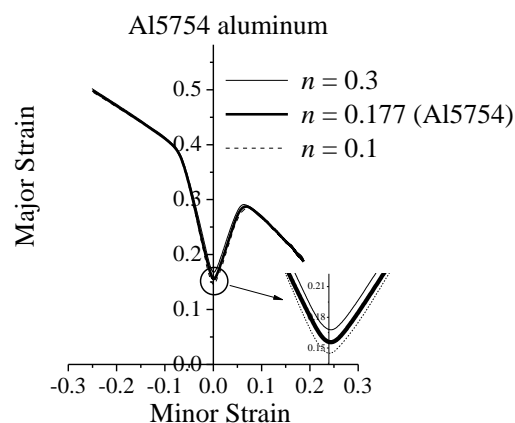


Figure 2 – Effet de l'exposant d'écrouissage  $n$  (associé à la loi de Swift) sur les prédictions des limites de ductilité pour l'aluminium Al5754 (cas de germination contrôlée par la déformation)

Des tendances similaires avaient été observées dans [7], où le modèle GTN avait été utilisé avec une germination contrôlée par la déformation et couplé à la théorie de bifurcation. En effet, dans une telle approche, la localisation de la déformation est principalement contrôlée par l'adoucissement induit par endommagement, comme indiqué dans la Figure 3(a) pour le trajet de déformation de traction uniaxiale (TU), où l'on peut voir que la localisation apparaît pour des modules d'écrouissage fortement négatifs. De plus, l'évolution de porosité basée sur une germination contrôlée par déformation d'avère être insensible à l'écrouissage du matériau de la matrice dense (voir Fig. 3(b)).

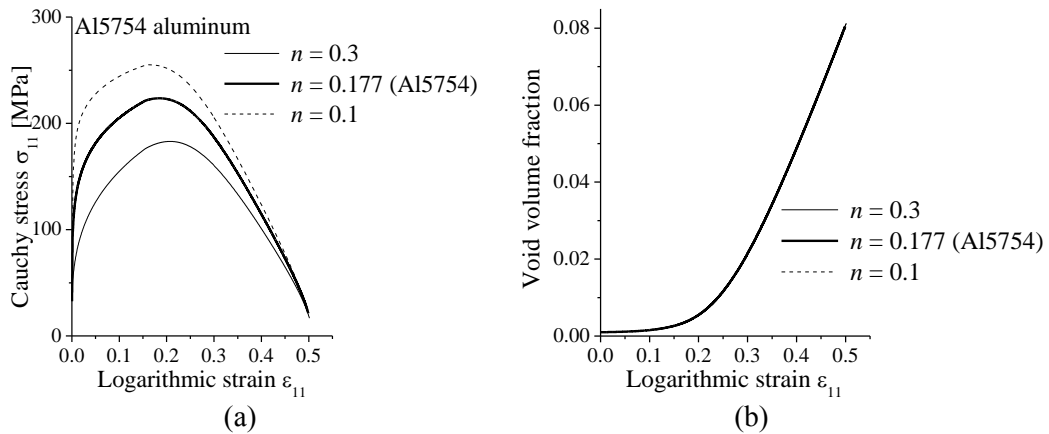


Figure 3 – Effet de l'exposant d'écrouissage  $n$  sur : (a) la réponse contrainte–déformation, (b) la fraction volumique de cavités jusqu'à localisation le long du trajet de traction uniaxiale (TU)

## 4.2 Calibration des paramètres $q_i$ du modèle GTN

Les résultats précédents ont montré les limitations du modèle GTN, avec germination contrôlée par déformation, à rendre compte de l'effet de l'écrouissage sur l'évolution de porosité. Pour remédier à ces limitations, Faleskog *et al.* [5] ont proposé de calibrer les paramètres  $q_i$  du modèle GTN afin de rendre compte de l'effet d'écrouissage sur la croissance de cavités. Les Tableaux 2 and 3 résument les paramètres  $q_i$  calibrés ainsi que les paramètres d'endommagement pour un acier ayant un rapport  $\sigma_0/E = 0,004$  (voir [5]). Le modèle d'écrouissage isotrope utilisé est basé sur une loi puissance [5].

Tableau 2 – Paramètres  $q_i$  calibrés

Paramètres $q_i$	$n = 0,025$	$n = 0,05$	$n = 0,10$
$q_1$	1,74	1,48	1,29
$q_2$	1,013	1,013	0,982

Tableau 3 – Paramètres d'endommagement associés au modèle GTN

Matériau	$f_0$	$s_N$	$\epsilon_N$	$f_N$	$f_{cr}$	$\delta_{GTN}$
Acier	0,001	0,1	0,3	0,05	0,04	5

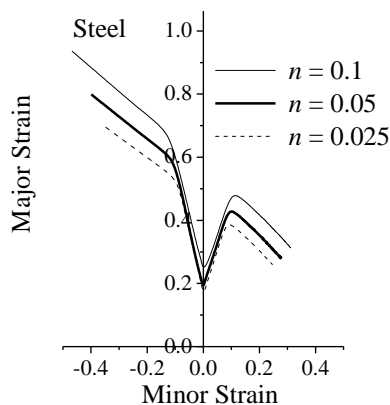


Figure 4 – Effet de l'exposant d'écrouissage  $n$  sur les prédictions des limites de ductilité en utilisant les paramètres  $q_i$  calibrés

La Figure 4 montre l'effet de l'exposant  $n$  d'érouissage (de type loi puissance) sur les prédictions des limites de ductilité de l'acier étudié, sur la base d'une calibration des paramètres  $q_i$  avec une germination contrôlée par déformation. Les limites de ductilité prédites montrent clairement une sensibilité aux caractéristiques d'érouissage du matériau, et ce pour tous les trajets de déformation, grâce à l'utilisation d'une calibration à base micromécanique des paramètres  $q_i$ .

### 4.3 Modèle de germination contrôlée par la contrainte

L'effet de l'érouissage sur les limites de ductilité est étudié ici en utilisant un modèle GTN avec germination contrôlée par la contrainte. Les paramètres matériau associés sont résumés dans le Tableau 4 pour un matériau correspondant à un acier. La loi puissance de Ludwig est utilisée dans les simulations pour modéliser l'érouissage isotrope du matériau de la matrice dense.

Tableau 4 – Paramètres d'érouissage et d'endommagement pour l'acier étudié

$\sigma_0$ [MPa]	$k$ [MPa]	$f_0$	$s_N$	$\sigma_N$ [MPa]	$f_N$	$f_{cr}$	$\delta_{GTN}$	$q_1$	$q_2$	$q_3$
150	800	0,001	0,1	1000	0,05	0,04	10	1,5	1,0	2,15

La Figure 5 illustre l'effet de l'exposant d'érouissage  $n$  sur les prédictions des déformations limites pour l'acier étudié. On y voit clairement que l'introduction d'une non-symétrie dans le module tangent élasto-plastique (ou d'une sorte de non-normalité dans le modèle GTN), induite par une germination contrôlée par la contrainte, permet de rendre compte des effets d'érouissage sur les prédictions de localisation. En effet, les déformations limites prédites augmentent avec l'exposant d'érouissage  $n$ , ce qui est conforme aux résultats de la littérature (voir, ex., [4]). La Figure 6 montre l'effet de l'exposant d'érouissage  $n$  sur les évolutions de la contrainte de Cauchy et de la porosité, jusqu'à localisation pour un trajet de traction uniaxiale (TU). On peut remarquer que, à la différence du cas d'une germination contrôlée par déformation (voir Figure 3(b)), l'évolution de porosité est ici significativement affectée par l'exposant d'érouissage  $n$ , ce qui permet de rendre compte des effets d'érouissage sur la localisation. De plus, l'évolution de la contrainte de Cauchy montre bien que le module d'érouissage à localisation n'est pas fortement négatif, à la différence de ce qui est requis lorsque la germination est modélisée comme étant contrôlée par la déformation. Ceci s'explique par l'introduction d'une non-symétrie dans le module tangent élasto-plastique, ce qui induit une sorte de non-normalité qui joue un rôle fortement déstabilisant dans l'analyse de bifurcation.

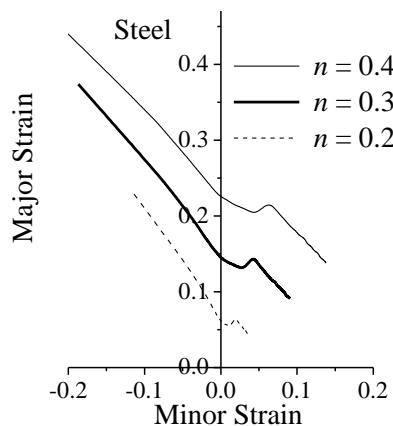


Figure 5 – Effet de l'exposant d'érouissage  $n$  sur les prédictions des limites de ductilité de l'acier étudié (cas de germination contrôlée par la contrainte)

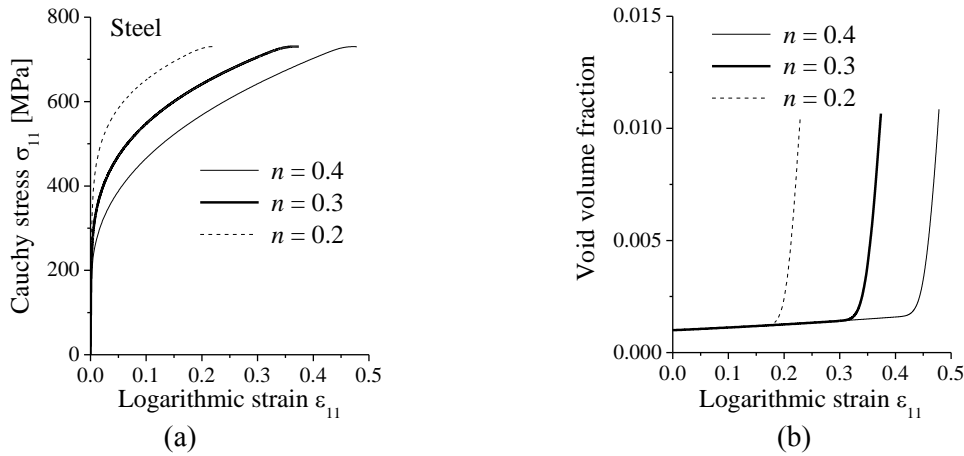


Figure 6 – Effet de l'exposant d'écrouissage  $n$  sur : (a) la réponse contrainte-déformation, (b) la fraction volumique de cavités jusqu'à localisation le long du trajet de TU (cas de germination contrôlée par la contrainte)

## 5. Conclusions

Dans ce travail, le modèle d'endommagement ductile de Gurson–Tvergaard–Needleman (GTN) a été couplé à la théorie de bifurcation pour prédire l'apparition de la localisation des déformations dans les tôles métalliques. Cette approche a été implantée dans le code ABAQUS dans le cadre des grandes déformations élasto-plastiques. Les limites de ductilité pour des tôles métalliques soumises à des chargements biaxiaux sont alors prédites. Une étude paramétrique a été conduite, par rapport aux paramètres d'endommagement et d'écrouissage, afin d'identifier les paramètres les plus influents sur la localisation. L'analyse a montré que les paramètres d'endommagement ont un impact significatif sur les limites de ductilité prédites. Pour ce qui est de l'écrouissage, il est montré que le choix du mécanisme de germination de microcavités a une influence majeure sur la sensibilité des prédictions par rapport à l'écrouissage. En effet, dans le cas d'une germination contrôlée par déformation, les déformations limites prédites se révèlent être presque insensibles à l'écrouissage pour la plupart des trajets de chargement, alors qu'une influence significative est observée dans le cas d'une germination contrôlée par la contrainte. Dans ce dernier cas, le module tangent élasto-plastique devient non-symétrique, ce qui induit une sorte de non-normalité qui joue un rôle déstabilisant dans l'analyse de bifurcation. Ce travail discute aussi de l'utilisation d'une calibration à base micromécanique pour les paramètres  $q_i$  du modèle GTN, dans le cas d'une germination contrôlée par déformation, ce qui se révèle être un autre moyen de rendre compte des effets d'écrouissage sur les prédictions de localisation.

## Références

- [1] F. Abed-Meraim, T. Balan, G. Altmeyer. *Int. J. Adv. Manu. Tech.*, 71 (5-8), 1247-1262, 2014.
- [2] M. Brunet, S. Mguil, F. Morestin. *J. Mater. Process. Tech.*, 80-81, 40-46, 1998.
- [3] C. Chu, A. Needleman. *J. Eng. Mater. Tech.*, 102, 249-256, 1980.
- [4] I. Doghri, R. Billardon. *Mech. Mater.*, 19, 129-149, 1995.
- [5] J. Faleskog, X. Gao, C.F. Shih. *Int. J. Fracture*, 89, 355-373, 1998.
- [6] S. Keeler, W.A. Backofen. *ASM Trans. Q.*, 56, 25-48, 1963.
- [7] L.Z. Mansouri, H. Chalal, F. Abed-Meraim. *Mech. Mater.*, 76, 64-92, 2014.
- [8] J.R. Rice. *Theoretical and Applied Mechanics*. Koiter ed., 207-227, 1976.
- [9] J.W. Rudnicki, J.R. Rice. *J. Mech. Phys. Solids*, 23, 371-394, 1975.
- [10] V. Tvergaard, A. Needleman. *Acta Metall.*, 32, 157-169, 1984.