

Un critère de fatigue des matériaux poreux ductiles basé sur l'approche de l'adaptation plastique

J. Zhang¹, W.Q.Shen², A.Oueslati¹, G. De Saxcé¹

¹ LML, Université de Lille 1, jinl.zhang@ed.univ-lille1.fr; {abdelbacet.oueslati,gery.desaxce}@univ-lille1.fr

² LML, Polytech Lille, wanqing.shen@polytech-lille.fr

Résumé — Cet article est consacré à la détermination de l'état limite d'adaptation pour une sphère creuse avec une matrice obéissant au critère de von Mises. L'approche statique de Melan, basée sur un champ de contraintes résiduelles indépendant du temps, est adoptée. Nous déterminons la solution exacte pour le chargement purement hydrostatique, puis nous construisons des champs additionnels simples mais suffisants pour capturer les effets de cisaillement. Enfin, la solution analytique est comparée avec des simulations numériques.

Mots clés — Matériaux poreux, Analyse limite, Adaptation plastique.

1 Introduction

Déterminer la charge limite des structures sollicitées au-delà de la limite élastique est depuis longtemps une des tâches les plus importantes des ingénieurs. Dans ce but, les Méthodes Directes jouent un rôle croissant dû au fait qu'elles permettent un accès rapide à l'information requise par des techniques mathématiques constructives. Elles embrassent l'analyse limite, l'approche la plus développée et largement utilisée aujourd'hui, et l'adaptation plastique, une extension puissante aux chargements variables répétés, potentiellement plus économique que l'analyse pas-à-pas classique [15].

L'idée d'appliquer les concepts de l'adaptation plastique à la fatigue des matériaux est due à Dang Van [5]. Partant du travail de pionnier d'Orowan [13] sur la plasticité des grains, il affirme que la fatigue ne survient pas si tous les grains s'adaptent plastiquement. Pour estimer l'état de contrainte-déformation à l'échelle macroscopique, un schéma simple d'homogénéisation de l'inclusion plastique dans la matrice élastique est considéré par Dang Van [6], Papadopoulos [14], Charkaluk et al. [2].

Avec les développements des ordinateurs, de nombreuses approches numériques d'homogénéisation par des méthodes directes ont été proposées, principalement pour les matériaux périodiques, tant en analyse limite (par exemple de Buhan et al. [7], Bleyer et al. [1]) qu'en adaptation plastique (par exemple Magoarić et al. [11], Chen et al. [3]).

Dans le cadre de la micromécanique des matériaux poreux ductiles, Gurson a proposé dans un article célèbre [8] une formule analytique par l'approche cinématique de l'analyse limite de la sphère creuse avec une matrice obéissant au critère de von Mises. Récemment, Shen et al. [16] ont proposé une approche variationnelle statique alternative. Utilisant la programmation conique, des approximations numériques précises ont été obtenues pour la sphère creuse par Thoré et al. [17].

Récemment, Lacroix et al. [10] ont proposé une explication du rochet de porosité observé expérimentalement et qui conduit à une réduction de ductilité sous chargement cyclique.

L'objectif du travail proposé est de déterminer l'état limite des matériaux poreux ductiles sous chargement cyclique répété en considérant le modèle de la sphère creuse dans l'esprit du travail de Gurson. La contrainte macroscopique est prise comme charge externe. Contrairement à l'approche cinématique due à Koiter [9], l'approche statique, basée sur le théorème de Melan [12], ne nécessite pas des calculs fastidieux d'intégrales qui peuvent conduire à des expressions analytiques très lourdes. S'il existe un champ

microscopique de contraintes résiduelles tel que, ajouté à la réponse dans la structure fictive parfaitement élastique, le champ résultant est plastiquement admissible partout et à chaque instant, la sphère creuse s'adapte plastiquement et, suivant Dang Van [5], nous affirmons que la fatigue ne peut pas apparaître. Pour déterminer le domaine de sécurité sous chargement cyclique, nous maximisons la taille du domaine de chargement, ce qui fournit un critère de fatigue pour les matériaux poreux ductiles. La première étape consiste à déterminer la solution exacte pour le chargement hydrostatique pur. Ensuite, des champs d'essai sont construits avec des termes additionnels pour capter les effets de cisaillement et l'approche de Melan par bornes inférieures est utilisée. Finalement, discrétisant le volume élémentaire de référence par éléments finis, des solutions numériques sont calculées pour estimer la pertinence du modèle analytique.

2 Formulation du problème

Dans la perspective d'appliquer l'analyse d'adaptation plastique aux matériaux poreux ductiles, nous considérons un volume élémentaire de référence (VER) Ω composé d'une cavité ω et d'une matrice $\Omega_M = \Omega - \omega$ constituée d'un matériaux élastique-parfaitement plastique avec un critère d'écoulement :

$$F(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0 ,$$

où F est une fonction convexe du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$.

La contrainte macroscopique $\boldsymbol{\Sigma}$ et la déformation macroscopique \mathbf{E} sont définies comme moyennes de leurs homologues microscopiques $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$ sur le VER :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} dV , \quad \mathbf{E} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon} dV .$$

L'ensemble des champ de contraintes statistiquement admissibles est défini par :

$$\mathcal{S}_a = \{ \boldsymbol{\sigma} \text{ s.t. } \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = 0 \text{ dans } \Omega, \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\omega, \boldsymbol{\sigma} = 0 \text{ dans } \omega \} \quad (1)$$

où \mathbf{n} est la normale unitaire extérieure.

La charge de référence $\boldsymbol{\Sigma}$ varie dans un domaine borné convexe \mathcal{P} , qui peut être décrit par une combinaison convexe des charges élémentaires $\boldsymbol{\Sigma}_1, \dots, \boldsymbol{\Sigma}_n$:

$$\boldsymbol{\Sigma}(t) = \sum_{k=1}^n \mu_k(t) \boldsymbol{\Sigma}_k, \quad \sum_{k=1}^n \mu_k(t) = 1, \quad \mu_1(t) \geq 0, \dots, \mu_n(t) \geq 0$$

Les réponses en déplacement \mathbf{u}^E , en déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^E$ et en contrainte $\boldsymbol{\sigma}^E$ dans la structure fictive parfaitement élastique, satisfont à la loi de Hooke. Grâce à la linéarité de la réponse élastique, le champ de contrainte élastique $\boldsymbol{\sigma}^E$ appartient au domaine de chargement polyédrique convexe $\mathcal{S} = \alpha \mathcal{S}^0$, homothétique du domaine de chargement de référence \mathcal{S}^0 correspondant à \mathcal{P}^0 . Alors, le champ :

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^E$$

appartient à l'ensemble des *champs de contraintes résiduelles* :

$$\mathcal{N} = \{ \boldsymbol{\rho} \mid \operatorname{div} \boldsymbol{\rho} = 0 \text{ dans } \Omega, \boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\omega, \boldsymbol{\rho} = 0 \text{ dans } \omega \}$$

L'idée de l'approche statique est de définir un *champ de contraintes résiduelles admissibles* (au sens de Melan) $\bar{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{x})$ correspondant au domaine de chargement \mathcal{S} , comme vérifiant les conditions suivantes [12] :

- $\bar{\boldsymbol{\rho}}$ est indépendant du temps,
- $\bar{\boldsymbol{\rho}}$ est un champ de contraintes résiduelles : $\bar{\boldsymbol{\rho}} \in \mathcal{N}$,
- $\bar{\boldsymbol{\rho}}$ est *plastiquement admissible* :

$$\forall \boldsymbol{\sigma}^E \in \mathcal{S}, \quad F(\boldsymbol{\sigma}^E + \bar{\boldsymbol{\rho}}) \leq 0 \text{ dans } \Omega \text{ à chaque instant}$$

De plus, si $F(\boldsymbol{\sigma}^E + \bar{\boldsymbol{\rho}}) < 0$ dans Ω à chaque instant, $\bar{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{x})$ est considéré comme un *champ de contraintes résiduelles strictement admissibles*. On peut alors prouver le théorème suivant du à Melan [12] :

Théorème de Melan : *s'il existe un champ de contraintes résiduelles $\bar{\boldsymbol{\rho}}$ strictement admissibles, la structure s'adapte.*

3 Analyse d'adaptation plastique

Soit un VER de rayon b entourant une cavité sphérique de rayon a , de fraction volumique $f = (a/b)^3 < 1$, constitué d'un matériaux élastique-parfaitement plastique obéissant au modèle de von Mises :

$$F(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_e(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_0 = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s}} - \sigma_0 \leq 0 \quad (2)$$

où \mathbf{s} est le déviateur des contraintes. La contrainte macroscopique hydrostatique Σ_m (resp. déviatorique Σ_e) est supposée varier entre les valeurs extrêmes Σ_{m-} et Σ_{m+} (resp. Σ_{e-} et Σ_{e+}).

3.1 Champ de contrainte d'essai

Pour le cas général, il n'est pas possible d'obtenir la solution exacte à cause de la non-linéarité du critère de von Mises. Considérant des solutions axi-symétriques, le champ de contrainte d'essai se divise en deux parties :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \boldsymbol{\sigma}^{(2)}, \quad (3)$$

3.1.1 Réponse à un chargement macroscopique hydrostatique

On travaille dans les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) avec un repère orthonormal $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi\}$. Dans la matrice $a < r < b$, le champ d'essai :

$$\boldsymbol{\sigma}^{(1)} = \bar{\boldsymbol{\rho}}^{(1)} + \boldsymbol{\sigma}^{E(1)} \quad (4)$$

se décompose en deux parties :

- la réponse dans la structure fictive parfaitement élastique, solution exacte sous chargement hydrostatique pur :

$$\boldsymbol{\sigma}^{E(1)} = \frac{\Sigma_m}{1-f} \left(\mathbf{1} + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^3 (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\phi - 2\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r) \right) \quad (5)$$

- le champ de contraintes résiduelles, inspiré de la solution exacte sous chargement hydrostatique pur :

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\rho}}^{(1)} = & -A_0 \left(\ln \left(\frac{a}{r} \right) \mathbf{1} - \frac{1}{2} (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\phi) \right) \\ & - \frac{\Sigma_{m+}}{1-f} \left(\mathbf{1} + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^3 (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\phi - 2\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r) \right) \end{aligned} \quad (6)$$

A_0 étant un paramètre constant à déterminer.

3.1.2 Réponse à un chargement macroscopique déviatorique

En fonction de la nature des ruines, nous choisissons des champs correspondant à chaque type de chargement :

- Pour le chargement alterné $\Sigma_{e+} = \Sigma_{e-}$, un champ de contrainte statistiquement admissible, inspiré de la solution de Papkovitch-Neuber pour une sphère creuse sous chargement déviatorique pur, s'écrit :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^{(2)} = & \left[\left(9 \left(\frac{a}{r} \right)^5 + \frac{5}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^3 (-5 + \nu) \right) \frac{1 + 3 \cos(2\theta)}{-7 + 5\nu} A_1 - \frac{1 + 3 \cos(2\theta)}{2} A_1 \right] (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r) \\ & + \left[\left(\frac{27}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^5 + \frac{5}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^3 (1 - 2\nu) - \left(\frac{63}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^5 + \frac{15}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^3 (1 - 2\nu) \right) \cos^2(\theta) \right) \frac{A_1}{-7 + 5\nu} \right. \\ & \quad \left. + \frac{-1 + 3 \cos(2\theta)}{2} A_1 \right] (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta) \quad (7) \\ & + \left[\left(\frac{9}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^5 + \frac{25}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^3 (-1 + 2\nu) - \left(\frac{45}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^5 + \frac{45}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^3 (-1 + 2\nu) \right) \cos^2(\theta) \right) \frac{A_1}{-7 + 5\nu} \right. \\ & \quad \left. + A_1 \right] (\mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\phi) \\ & + \left[\left(18 \left(\frac{a}{r} \right)^5 - \frac{15}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^3 (1 + \nu) \right) \frac{\sin(2\theta)}{-7 + 5\nu} A_1 + \frac{3 \sin(2\theta)}{2} A_1 \right] (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r) \end{aligned}$$

- où ν le coefficient de Poisson et A_1 est un autre paramètre constant.
- Pour le chargement pulsé $\Sigma_{e-} = 0$, une partie homogène est sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}^{(2)} = A_1(\mathbf{e}_\rho \otimes \mathbf{e}_\rho + \mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\phi - 2\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z), \quad (8)$$

3.2 Analyse d'adaptation plastique et critère de fatigue

Le champ de contrainte macroscopique obtenu par moyenne de (3) sur le VER :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \Sigma_m \mathbf{1} + (1-f)A_1(\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta - 2\mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\phi), \quad (9)$$

permet de calculer la contrainte macroscopique équivalente Σ_e et le troisième invariant du déviateur macroscopique J_3 .

Pour le chargement alterné,

$$\Sigma_{e+} = \Sigma_{e-}, \quad \text{sign}(J_{3+}) = -\text{sign}(J_{3-})$$

en respectant la loi d'écoulement (2), en éliminant A_0 et en exprimant A_1 en fonction de Σ_e et J_3 , deux cas peuvent avoir lieu :

- Pour $J_{3+} > 0$, la condition d'adaptation plastique est satisfaite partout dans la matrice si elle est vérifiée à l'équateur $\theta = \pi/2$, ce qui donne le critère de fatigue :

$$\left(\frac{3}{2} \frac{\Delta \Sigma_m}{1-f}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} \frac{\Delta \Sigma_m}{1-f} \cdot \frac{2\Sigma_{e+}}{1-f} \cdot P_1\left(a, \frac{\pi}{2}\right) + P_2\left(a, \frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(\frac{2\Sigma_{e+}}{1-f}\right)^2 \leq 4\sigma_0^2 \quad (10)$$

où

$$P_1\left(a, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{5\nu + 5}{2(5\nu - 7)}$$

$$P_2\left(a, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{25(7\nu^2 - 13\nu + 7)}{(5\nu - 7)^2}$$

- Pour $J_{3+} < 0$, la condition est satisfaite partout si elle est vérifiée aux pôles $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, ce qui conduit au critère :

$$\left(\frac{3}{2} \frac{\Delta \Sigma_m}{1-f}\right)^2 + 2 \cdot \frac{3}{2} \frac{\Delta \Sigma_m}{1-f} \cdot \frac{2\Sigma_{e+}}{1-f} \cdot P_1(a, 0) + P_2(a, 0) \cdot \left(\frac{2\Sigma_{e+}}{1-f}\right)^2 \leq 4\sigma_0^2 \quad (11)$$

où

$$P_1(a, 0) = \frac{5\nu + 5}{-5\nu + 7}$$

$$P_2(a, 0) = \frac{25(\nu^2 + 2\nu + 1)}{(5\nu - 7)^2}$$

Pareillement, pour le chargement pulsé,

$$\Sigma_{e-} = 0$$

- Pour $J_{3+} > 0$, la condition est satisfaite si elle est vérifiée à l'équateur $\theta = \pi/2$, ce qui donne :

$$\left(\frac{3}{2} \frac{\Delta \Sigma_m}{1-f}\right)^2 + \frac{3}{2} \frac{\Delta \Sigma_m}{1-f} \cdot \frac{\Sigma_{e+}}{1-f} + \left(\frac{\Sigma_{e+}}{1-f}\right)^2 \leq 2\sigma_0^2 + 2\sigma_0 \sqrt{\sigma_0^2 - \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(\frac{\Sigma_{e+}}{1-f}\right)^2} \quad (12)$$

- Pour $J_{3+} < 0$, la condition est satisfaite si elle est vérifiée aux pôles $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ et on obtient :

$$\left(\frac{3}{2} \frac{\Delta \Sigma_m}{1-f}\right)^2 + 2 \cdot \frac{3}{2} \frac{\Delta \Sigma_m}{1-f} \cdot \frac{\Sigma_{e+}}{1-f} + \left(\frac{\Sigma_{e+}}{1-f}\right)^2 \leq 4\sigma_0^2 \quad (13)$$

3.3 Simulation numérique

Les simulations numériques sont effectués avec Abaqus Standard et Matlab. Grâce à sa symétrie, nous considérons seulement un quart du modèle discretisé en 60601 nœuds et 20000 éléments [4].

Nous commençons par déterminer le chargement limite de fatigue, premièrement en calculant la réponse élastique des chargements élémentaires pour définir le domaine de chargement de référence S^0 . Pour chaque point de Gauss x_g , $\sigma_{\pm}^{E0}(x_g)$ est la réponse élastique correspondante et α_g la solution du problème local :

$$\max_{\bar{\rho}, \alpha} \{ \alpha \mid F(\alpha \sigma_{\pm}^{E0}(x_g) + \bar{\rho}) \leq 0 \}$$

La fatigue limite α est obtenu comme la valeur minimum de α_g pour tous les points de Gauss x_g . La résolution se réduit à la résolution d'un grand nombre de problèmes d'optimisation de petite taille.

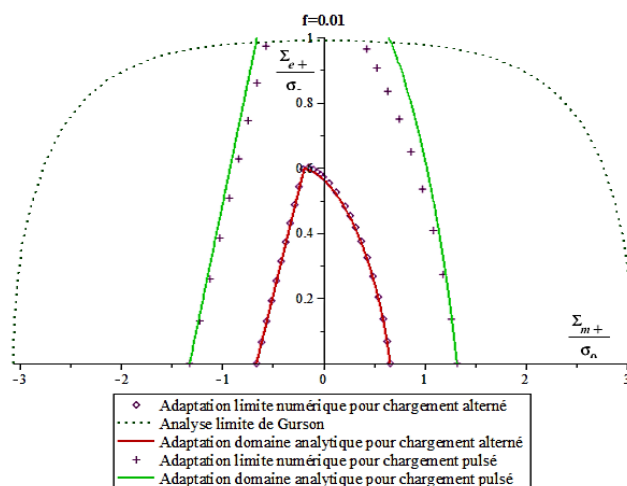


FIGURE 1 – Courbe d'interaction pour porosité $f = 0.01$

Nous pouvons obtenir les contraintes résiduelles correspondant aux différents chargements. Le premier point où le phénomène de fatigue est détecté se trouve sur le bord interne $r = a$ et à l'équateur $\theta = \pi/2$ pour $J_{3+} > 0$ et aux pôles $\theta = 0$ ou π pour $J_{3+} < 0$, donc en accord avec la solution analytique. Le domaine de sécurité réel est obtenu à l'intersection des domaines définis par les critères de fatigue et le critère de Gurson correspondant à une ruine par développement d'un mécanisme dès le premier cycle.

Références

- [1] Bleyer, J., Duc Toan, P., de Buhan, P., Florence, C., 2015. Yield design of periodically heterogeneous plates. Direct Methods for Limit and Shakedown Analysis of Structures, Advanced Computational Algorithms and Material Modelling, Fuschi, P., Pisano, A.A., Weichert, D. (eds.), Springer, Dordrecht.
- [2] Charkaluk, E., Constantinescu, A., Maitournam, H., Dang Van, K., 2009. Revisiting the Dang Van criterion, Procedia Engineering, 1, 143-146.
- [3] Chen, M., Hachemi, A., Weichert, D., 2013. Shakedown and optimization analysis of periodic composites, Limit State of Materials and Structures, Direct methods 2, de Saxcé, G., Oueslati, A., Charkaluk, E., Tritsch, J.B. (eds.), Springer, Dordrecht.
- [4] L. Cheng, T.F. Guo (2007). Void interaction and coalescence in polymeric materials, Int. J. Solids Struct, 44, 1787-1808.
- [5] Dang Van, K., 1973. Sur la résistance à la fatigue des métaux, Sci. Tech. Armement, 47.
- [6] Dang Van, K., 1993. Macro-micro approach in high-cycle multiaxial fatigue, pp. 120-130 in Advances in multi-axial fatigue, McDowell, D.L. and R. Ellis, R. (eds.), STP 191, ASTM, Philadelphia.
- [7] de Buhan, P., Hassen, G., 2013. A multiphase model for assessing the overall yield strength of soils reinforced by linear inclusions, Limit State of Materials and Structures, Direct methods 2, de Saxcé, G., Oueslati, A., Charkaluk, E., Tritsch, J.B. (eds.), Springer, Dordrecht.
- [8] Gurson, A.L., 1977. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth – part I : Yield criteria and flow rules for porous ductile media, Journal of Engineering Materials and Technology, 99, 2-15.

- [9] Koiter, W.T., 1960. General Theorems for Elastic-Plastic Solids, Progress in Solid Mechanics, vol. 1, Sneddon, I.N., Hill, R. (eds.), North-Holland, Amsterdam.
- [10] Lacroix, R., Leblond, J.B., Perrin, G., 2016. Numerical study and theoretical modelling of void growth in porous ductile materials subjected to cyclic loadings, European Journal of Mechanics/A Solids, 55, 100-109.
- [11] Magoaric, H., Bourgeois, S., Débordes, O., 2004. Elastic plastic shakedown of 3D periodic heterogeneous media : a direct numerical approach, International Journal of Plasticity, Volume 20, Issues 8-9, 1655-1675
- [12] Melan, E., 1936. Theorie statisch unbestimmter Systeme aus ideal plastischen baustoff. Sitz Ber. Akad. Wiss. Wien IIa, 145-195.
- [13] Orowan, E., 1939. Theory of the fatigue of metals, Proc. R. Soc. Lond. A 171 :944, 79-106.
- [14] Papadopoulos, I.V., 1994. A new criterion of fatigue strength for out-of phase bending and torsion of hard metals, Int. J. Fatigue, 16, 6, 377-384.
- [15] Save, M.A., Massonnet, C.E., de Saxcé, G., 1997. Plastic limit analysis of plates, shells and disks. Elsevier, New York.
- [16] Shen, W.Q., Oueslati, A., de Saxcé, G., 2015. Macroscopic criterion for ductile porous materials based on a statically admissible microscopic stress field, International Journal of Plasticity, 70, 60-76.
- [17] Thoré, P., Pastor, F., Pastor, J., Kondo, D., 2009. Closed-form solutions for the hollow sphere model with Coulomb and Drucker-Prager materials under isotropic loadings, Comptes-Rendus Mécanique, 337, 260-267.