

Construction de super-éléments pour des liaisons amortissantes en élastomère

B. Morin, A. Legay, J.-F. Deü

*Conservatoire National des Arts et Métiers,
Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés
{benjamin.morin,antoine.legay,jean-francois.deu}@lecnam.net*

Résumé — Grâce à leurs propriétés amortissantes, les élastomères sont couramment utilisés dans l'industrie pour atténuer les vibrations, notamment sous forme de liaisons entre pièces mécaniques. Afin de pouvoir prédire le comportement dynamique de ces liaisons dans un assemblage de structures, la modélisation élément finis doit prendre en compte la géométrie complexe de ces liaisons ainsi que le comportement visco-élastique du matériau constitutif. Ce type de modèle numérique pouvant s'avérer trop coûteux, l'objectif de ce travail est de proposer des stratégies de réduction de modèles des liaisons amortissantes en élastomère.

Mots clés — liaison amortissante, élastomère, visco-élasticité, modèles réduits.

1 Introduction

En raison de leurs capacités à dissiper l'énergie, les élastomères sont couramment utilisés pour atténuer les vibrations, notamment sous forme de liaisons entre pièces mécaniques. Un exemple typique est la protection de matériels sensibles embarqués en aéronautique (caméra de précision par exemple) : ces matériels doivent être protégés des vibrations dues aux différentes sources d'excitation dynamique. Le choix et la conception des ces liaisons amortissantes sont habituellement effectués à l'aide de modèles numériques éléments finis. Le coût en temps de calcul peut vite devenir prohibitif si l'assemblage complet comporte plusieurs liaisons en élastomère.

Beaucoup de solutions existent pour réduire le modèle numérique de structures non amorties dans le domaine linéaire, mais peu prennent en compte l'amortissement. La première catégorie de modèles est basée sur des modèles équivalents rhéologiques dont les paramètres sont identifiés expérimentalement pour une liaison donnée [1]. L'inconvénient de ces modèles est qu'ils ne sont pas prédictifs puisqu'ils sont construits indépendamment les uns des autres pour chaque liaison. La deuxième catégorie de modèles est basée sur des réductions de modèles numériques en utilisant des méthodes de types projections modales. Une étude bibliographique de ces méthodes est donnée dans [2].

Dans ce travail, la méthode de réduction choisie est de type Craig-Bampton [3] modifiée pour tenir compte du comportement viscoélastique de l'élastomère [4]. De plus, les faces inférieure et supérieure de la liaison en contact avec les sous-structures sont supposées infiniment rigides par rapport au caoutchouc, ce qui permet de lier cinématiquement les nœuds d'une face à 6 mouvements de corps rigides. Le modèle réduit est projeté sur ces 2×6 ddls ce qui conduit à un super-élément équivalent de liaison à 12 ddls facilement connectable aux sous-structures à assembler.

2 Présentation du cas étudié

Le cas d'application proposé est composé d'une structure en aluminium (modèle élastique) montée sur quatre amortisseurs (Figure 1). Les amortisseurs sont en matériau élastomère dont le comportement viscoélastique est pris en compte par un modèle de Zener fractionnaire. Le module d'élasticité transversale complexe s'écrit alors sous la forme :

$$G^*(\omega) = \frac{G_0 + G_\infty(i\omega\tau)^\alpha}{1 + (i\omega\tau)^\alpha} \quad (1)$$

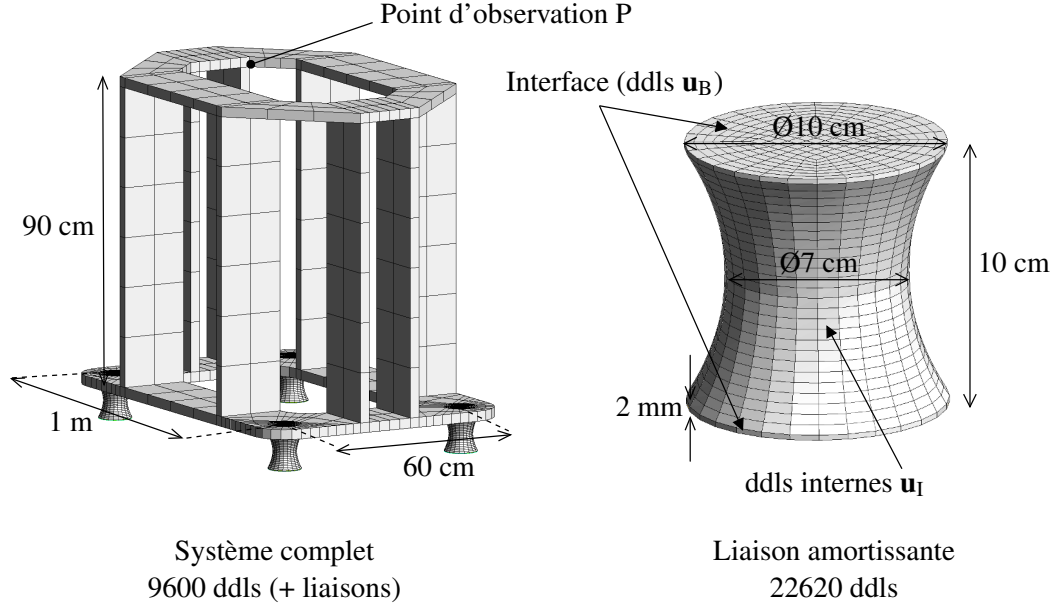


FIGURE 1 – Structure support montée sur quatre amortisseurs

où G_0 et G_∞ sont les valeurs asymptotiques quand $\omega \rightarrow 0$ et quand $\omega \rightarrow \infty$ respectivement, τ est le temps de relaxation et α est l'ordre fractionnaire (voir [5] pour plus de détails).

L'équation de dynamique discrétisée par la méthode des éléments finis s'écrit alors pour le système complet :

$$\left(\mathbf{K}^e + \mathbf{K}_{\text{sph}}^v + \frac{G^*(\omega)}{G_0} \mathbf{K}_{\text{dev}}^v - \omega^2 \mathbf{M} \right) \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (2)$$

où \mathbf{M} est la matrice de masse, \mathbf{K}^e est la partie de la matrice de rigidité purement élastique (structure support) et \mathbf{K}^v représente la partie viscoélastique de la matrice de rigidité qui correspond aux amortisseurs ; elle est séparée en parties sphérique $\mathbf{K}_{\text{sph}}^v$ et déviatorique $\mathbf{K}_{\text{dev}}^v$. Cette séparation est due au fait que l'amortissement viscoélastique est principalement causé par les déformations angulaires, l'amortissement est donc seulement en facteur de la partie déviatorique. En utilisant le modèle viscoélastique à dérivée fractionnaire introduit précédemment, il vient :

$$\left(\mathbf{K}^0 + i\omega h^*(\omega) \mathbf{K}^\infty - \omega^2 \mathbf{M} \right) \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (3)$$

où $\mathbf{K}^0 = \mathbf{K}^e + \mathbf{K}_{\text{sph}}^v + \mathbf{K}_{\text{dev}}^v$ et $\mathbf{K}^\infty = (G_\infty/G_0 - 1) \mathbf{K}_{\text{dev}}^v$. Le module adimensionné $h^*(\omega)$ vaut :

$$h^*(\omega) = \frac{\tau^\alpha (i\omega)^{\alpha-1}}{1 + (i\omega\tau)^\alpha} \quad (4)$$

Les paramètres matériaux utilisés pour ce cas sont donnés dans le tableau 1 pour l'aluminium et dans le tableau 2 pour l'élastomère (source [6]). Chaque amortisseur est composé de 7540 nœuds, ce qui est suffisant pour assurer la convergence du maillage dans la bande de fréquence considérée. Le maillage de la structure support contient 3200 nœuds. Le nombre total de ddls est d'environ 10^5 . Les amortisseurs représentent 90% des ddls, ce qui justifie la nécessité d'avoir recourt à des modèles réduits pour les amortisseurs. Le code de calcul utilisé est un code maison développé en Python et Fortran, les maillages et visualisations sont réalisés à l'aide de Gmsh [7]. Les éléments finis sont des hexaèdres à 8 nœuds.

3 Modèle réduit de liaisons amortissantes

3.1 Hypothèse de faces rigides

La différence de rigidité entre la structure en aluminium et les liaisons en élastomère permet de faire l'hypothèse que les faces inférieure et supérieure de la liaison ont un mouvement de corps rigide. La

TABLE 1 – Paramètres matériaux de l'aluminium.

Paramètres	Valeurs
E	70 GPa
ν	0,3
ρ	2700 kg·m ⁻³

TABLE 2 – Paramètres matériaux de l'élastomère.

Paramètres	Valeurs
E	0,947 MPa
ν	0,45
ρ	1000 kg·m ⁻³
G_0	0,327 MPa
G_∞	0,126 GPa
α	0,3
τ	0,52 μ s

vitesse d'un point A d'une interface peut alors s'écrire en fonction de la vitesse du centre de la face C et de la rotation $\vec{\Omega}$ de l'interface. Cette relation peut être étendue aux déplacements si ceux-ci sont suffisamment petits :

$$\vec{u}_A = \vec{u}_C + \vec{AC} \wedge \vec{\Omega} \quad (5)$$

La même relation peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} u_A \\ v_A \\ w_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & (z_A - z_C) & (y_C - y_A) \\ 0 & 1 & 0 & (z_C - z_A) & 0 & (x_A - x_C) \\ 0 & 0 & 1 & (y_A - y_C) & (x_C - x_A) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ v_C \\ w_C \\ \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} \quad (6)$$

où x_I, y_I, z_I sont les coordonnées du point I (I peut prendre les valeurs A ou C), u_I, v_I, w_I sont les déplacements du point I selon les axes $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ et $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ sont les rotations de l'interface autour des mêmes axes. Une liaison possède alors 12 ddls représentant les 2×6 mouvement de corps rigides des 2 interfaces, ces ddls sont notés \mathbf{u}_B dans la suite.

3.2 Modèle réduit de liaison amortissante

La méthode de réduction mise en œuvre ici combine une méthode de type Craig-Bampton [3] et une approche multi-modèles [2] [4]. Dans le cas d'un assemblage composé d'amortisseurs viscoélastiques et de structures élastiques, le comportement dynamique du système est donné par l'équation (3). En écrivant cette équation pour une liaison élastomère, et en séparant les ddls en ddls d'interface B (12 seulement ici) et ddls internes I, il vient :

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{BB}^0 & \mathbf{K}_{BI}^0 \\ \mathbf{K}_{IB}^0 & \mathbf{K}_{II}^0 \end{bmatrix} + i\omega h^*(\omega) \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{BB}^\infty & \mathbf{K}_{BI}^\infty \\ \mathbf{K}_{IB}^\infty & \mathbf{K}_{II}^\infty \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{BB} & \mathbf{M}_{BI} \\ \mathbf{M}_{IB} & \mathbf{M}_{II} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{u}_B \\ \mathbf{u}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_B \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (7)$$

où le second membre est uniquement composé des forces de réactions \mathbf{f}_B aux interfaces.

La première partie de la base réduite est composée des déformées statiques Ψ_{IB} définies par :

$$\Psi_{IB} = -(\mathbf{K}_{II}^0)^{-1} \mathbf{K}_{IB}^0 \quad (8)$$

Le nombre de déformées statiques est égal au nombre de ddls d'interfaces (12 ici).

La deuxième partie de la base réduite est constituée des modes propres de la liaison à interface fixe, solutions de :

$$(\mathbf{K}_{II}^0 + i\omega h^*(\omega) \mathbf{K}_{II}^\infty - \omega^2 \mathbf{M}_{II}) \mathbf{u}_I = \mathbf{0} \quad (9)$$

Cette dernière équation, non-linéaire en fréquence, étant très délicate à résoudre et conduisant à des modes complexes, une approche multi-modèle [8] est utilisée dans ce travail. Cette approche a déjà été utilisée pour construire une base de projection représentative de modèles fortement amortis en dynamique des structures (voir par exemple [4] et [2]). La base multi-modèle est construite ici par combinaison de deux bases réelles calculées pour la fréquence minimale étudiée ω_{\min} et pour la fréquence maximale ω_{\max} en résolvant le système aux valeurs propres suivant :

$$(\mathbf{K}_{\text{II}}^0 + \Re(i\omega_j \mathbf{h}^*(\omega_j)) \mathbf{K}_{\text{II}}^\infty - \omega_k^2 \mathbf{M}_{\text{II}}) \Phi_k(\omega_j) = \mathbf{0} \quad (10)$$

où ω_j prend successivement les valeurs ω_{\min} puis ω_{\max} . Les deux bases Φ_{\min} et Φ_{\max} pouvant former ensemble une famille liée, une orthonormalisation de Gram-Schmidt est effectuée pour aboutir à une base de m modes notée Φ_{Im} .

Finalement, la base réduite est formée en combinant les déformées statiques et les modes propres :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_B \\ \mathbf{u}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{BB} & \mathbf{0}_{Bm} \\ \Psi_{IB} & \Phi_{Im} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_B \\ \mathbf{q}_m \end{bmatrix} \quad (11)$$

Le système (7) projeté sur cette base réduite donne le système réduit suivant :

$$\left(\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{BB}^0 & \bar{\mathbf{K}}_{Bm}^0 \\ \bar{\mathbf{K}}_{mB}^0 & \bar{\mathbf{K}}_{mm}^0 \end{bmatrix} + i\omega \mathbf{h}^*(\omega) \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{BB}^\infty & \bar{\mathbf{K}}_{Bm}^\infty \\ \bar{\mathbf{K}}_{mB}^\infty & \bar{\mathbf{K}}_{mm}^\infty \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_{BB} & \bar{\mathbf{M}}_{Bm} \\ \bar{\mathbf{M}}_{mB} & \bar{\mathbf{M}}_{mm} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{u}_B \\ \mathbf{q}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_B \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (12)$$

où $\bar{\mathbf{K}}_{mB}^\infty = (\bar{\mathbf{K}}_{Bm}^\infty)^\text{T}$ et $\bar{\mathbf{M}}_{mB} = (\bar{\mathbf{M}}_{Bm})^\text{T}$. Les détails des différents termes sont donnés par :

$$\bar{\mathbf{K}}_{BB}^0 = \mathbf{K}_{BB}^0 + \mathbf{K}_{BI}^0 \Psi_{IB} \quad (13)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{mB}^0 = \Phi_{Im}^\text{T} (\mathbf{K}_{IB}^0 + \mathbf{K}_{II}^0 \Psi_{IB}) \quad (14)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{mm}^0 = \Phi_{Im}^\text{T} \mathbf{K}_{II}^0 \Phi_{Im} \quad (15)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{BB}^\infty = \mathbf{K}_{BB}^\infty + \mathbf{K}_{BI}^\infty \Psi_{IB} + \Psi_{IB}^\text{T} \mathbf{K}_{IB}^\infty + \Psi_{IB}^\text{T} \mathbf{K}_{II}^\infty \Psi_{IB} \quad (16)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{mB}^\infty = \Phi_{Im}^\text{T} (\mathbf{K}_{IB}^\infty + \mathbf{K}_{II}^\infty \Psi_{IB}) \quad (17)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{mm}^\infty = \Phi_{Im}^\text{T} \mathbf{K}_{II}^\infty \Phi_{Im} \quad (18)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{BB} = \mathbf{M}_{BB} + \mathbf{M}_{BI} \Psi_{IB} + \Psi_{IB}^\text{T} \mathbf{M}_{IB} + \Psi_{IB}^\text{T} \mathbf{M}_{II} \Psi_{IB} \quad (19)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{mB} = \Phi_{Im}^\text{T} (\mathbf{M}_{IB} + \mathbf{M}_{II} \Psi_{IB}) \quad (20)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{mm} = \Phi_{Im}^\text{T} \mathbf{M}_{II} \Phi_{Im} \quad (21)$$

Il est important de noter que l'approche multi-modèles conduit à des matrices non-diagonales.

3.3 Condensation sur l'interface du super-élément

La seconde ligne du système réduit (12) permet d'écrire les ddls réduits internes \mathbf{q}_m en fonction des ddls d'interfaces \mathbf{u}_B :

$$\mathbf{q}_m = -\tilde{\mathbf{K}}_{mm}(\omega)^{-1} \tilde{\mathbf{K}}_{mB}(\omega) \mathbf{u}_B \quad (22)$$

où

$$\tilde{\mathbf{K}}_{mm}(\omega) = \left(\bar{\mathbf{K}}_{mm}^0 + i\omega \mathbf{h}^*(\omega) \bar{\mathbf{K}}_{mm}^\infty - \omega^2 \bar{\mathbf{M}}_{mm} \right) \quad (23)$$

et

$$\tilde{\mathbf{K}}_{mB}(\omega) = \bar{\mathbf{K}}_{mB}^0 + i\omega \mathbf{h}^*(\omega) \bar{\mathbf{K}}_{mB}^\infty - \omega^2 \bar{\mathbf{M}}_{mB} \quad (24)$$

En remplaçant dans la première équation du système (12), il vient un système d'équations qui relie les 12 ddls d'interface entre eux et fait apparaître les matrices de rigidité $\mathbf{K}_{\text{super}}(\omega)$ et de masse $\mathbf{M}_{\text{super}}(\omega)$ de tailles 12×12 du super-élément :

$$(\mathbf{K}_{\text{super}}(\omega) - \omega^2 \mathbf{M}_{\text{super}}(\omega)) \mathbf{u}_B = \mathbf{f}_B \quad (25)$$

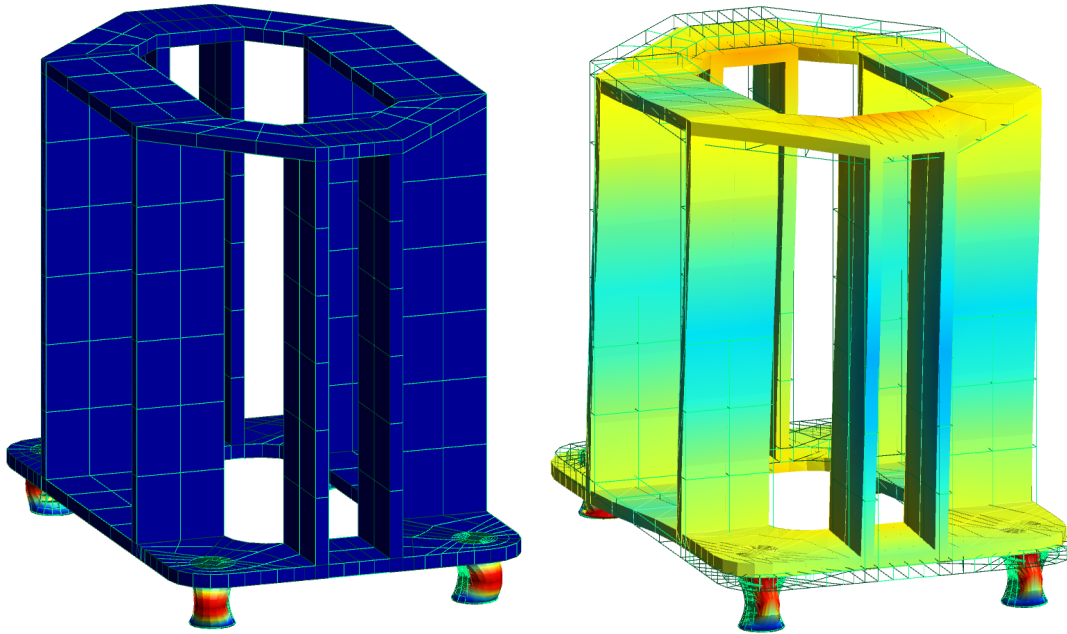


FIGURE 2 – Modes propres du système complet à 98 Hz et 152 Hz

avec

$$\mathbf{K}_{\text{super}}(\omega) = \bar{\mathbf{K}}_{\text{BB}}^0 + i\omega h^*(\omega) \bar{\mathbf{K}}_{\text{BB}}^\infty - \left(\bar{\mathbf{K}}_{\text{Bm}}^0 + i\omega h^*(\omega) \bar{\mathbf{K}}_{\text{Bm}}^\infty \right) \tilde{\mathbf{K}}_{mm}(\omega)^{-1} \tilde{\mathbf{K}}_{mB}(\omega) \quad (26)$$

$$\mathbf{M}_{\text{super}}(\omega) = \bar{\mathbf{M}}_{\text{BB}} - \bar{\mathbf{M}}_{\text{Bm}} \tilde{\mathbf{K}}_{mm}(\omega)^{-1} \tilde{\mathbf{K}}_{mB}(\omega) \quad (27)$$

La matrice $\tilde{\mathbf{K}}_{mm}(\omega)$ qui apparaît dans le calcul du super-élément est diagonale si il n'y a pas d'amortissement, donc inversible à moindre coût. Elle ne l'est pas dans le cas amorti, mais est malgré tout de taille réduite et le temps de calcul associé est relativement faible dans les applications présentées dans la suite.

4 Application à la structure support montée sur 4 liaisons amortissantes

On traite dans cette partie l'exemple présenté dans la partie 2. Une excitation harmonique en déplacement est imposée sur les 4 faces inférieures des 4 liaisons dans le plan perpendiculaire aux axes des liaisons. Deux modes propres du système complet sont représenté sur la figure 2. Le mode à 98 Hz correspond à un mode localisé dans les liaisons tandis que le mode à 152 Hz est un mode de la structure support. La bande de fréquence étudiée varie de 0 Hz à 1500 Hz et le déplacement normalisé du point d'observation P en fonction de la fréquence d'excitation (fonction de réponse en fréquence, FRF) est présenté sur la figure 3. Le super-élément est construit avec 180 modes propres calculés à ω_{min} et dont la plus haute fréquence propre est 630 Hz. Le nombre de modes propres calculés à ω_{max} varie et prend 3 valeurs : 0 modes (pas d'approche multi-modèles), 20 modes (fréquence la plus élevée de 1100 Hz) et 40 modes (fréquence la plus élevée de 1420 Hz). On remarque clairement sur la figure la convergence du super-élément avec l'augmentation du nombre de modes calculés à fréquence maximale.

Le temps de calcul de la FRF du système complet sans réduction est de 27h CPU. Concernant le super-élément, le temps de construction hors ligne ("Offline") est d'environ 2h CPU (à n'effectuer qu'une seule fois au moment de la construction du super-élément), tandis que le calcul de la FRF est de l'ordre de 30 min, c'est à dire, à peu près 50 fois plus rapide.

5 Conclusion

L'objectif de la méthode présentée est de réduire le modèle numérique éléments finis d'une liaison amortissante en élastomère à seulement 2×6 ddls représentant les mouvements de corps rigides des deux faces de la liaison. Une méthode de type Craig-Bampton combinée à une approche multi-modèle

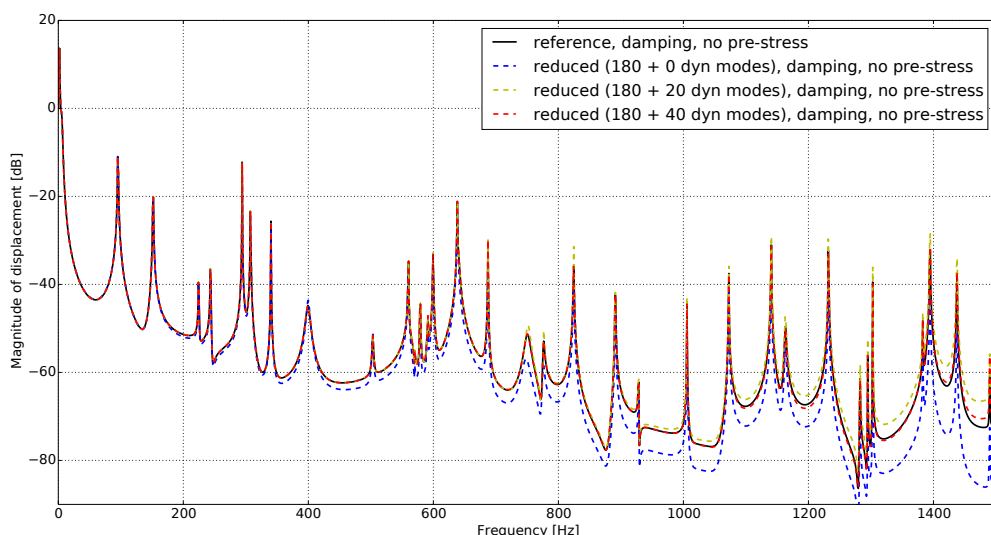


FIGURE 3 – Déplacement normalisé du point P (voir figure (1)) pour le cas de référence non réduit (ligne noire), et pour différentes bases de réduction (lignes pointillées)

est utilisée pour construire la base réduite. Le modèle réduit est alors construit par condensation sur les 12 ddls d'interface. L'application proposée montre une bonne convergence du super-élément. L'utilisation du super-élément permet sur cet exemple un gain en temps de calcul d'un facteur 50.

Cette méthode de construction d'un super-élément équivalent de liaison permet alors la construction d'une librairie numérique de super-éléments correspondants aux liaisons disponibles chez un constructeur d'amortisseurs. L'ingénieur en phase de conception, qui doit choisir le composant correspondant à son besoin, n'a alors plus qu'à sélectionner un super-élément et l'importer dans son calcul d'assemblage pour un surcoût de calcul négligeable.

Références

- [1] V.A Coveney, S. Jamil, D.E Johnson, and M.A Keavey. Implementation in finite element analysis of a triboelastic law for dynamic behaviour of filled elastomers. *Finite Element Analysis of Elastomers*. ISBN 1860581714. 1999.
- [2] L. Rouleau, J.-F. Deü and A. Legay. Review of reduction methods based on modal projection for highly damped structures. *Proceedings of the 11th World Congress on Computational Mechanics, WCCM XI, the 5th European Conference on Computational Mechanics, ECCM V and the 6th European Conference on Computational Fluid Dynamics, ECFD VI*, Barcelona, Spain, July 20-25, 2014.
- [3] R.R. Craig and M.C.C. Bampton. Coupling of substructures for dynamic analysis. *AIAA journal*. 6(7) :1313-1319, 1968.
- [4] A.S. Plouin and E. Balmès. Pseudo-modal representations of large models with viscoelastic behavior. *Proceedings of the 16th International Modal Analysis Conference*. 1998.
- [5] A.C. Galucio, J.-F. Deü and R. Ohayon. Finite element formulation of viscoelastic sandwich beams using fractional derivative operators. *Computational Mechanics* 33(4) :282-291, 2004.
- [6] L. Rouleau. Modélisation vibro-acoustique de structures sandwich munies de matériaux visco-élastiques. *PhD Thesis*. Cnam, 2013.
- [7] C. Geuzaine and J.-F. Remacle. Gmsh : A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 79(11) :1309-1331, 2009.
- [8] T. Takagi and M. Sugeno. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*. 15(1) :116-132, 1985.