

Modélisation éléments finis non-linéaire de réservoirs élastiques soumis à une charge suiveuse hydrostatique

C. Hoareau¹, J.-F. Deü¹

¹ LMSSC, Conservatoire National des Arts et Métiers, {christophe.hoareau,jean-francois.deu}@cnam.fr

Résumé — Nous développons une modélisation éléments finis (EF) non-linéaire quasi-statique d'un réservoir flexible soumis à des forces hydrostatiques dues à la présence d'un liquide interne incompressible non visqueux. Ce problème non-linéaire est résolu grâce à une méthode itérative de type Newton-Raphson, sans maillage du fluide. Nous montrons qu'une attention particulière doit être portée à la discrétisation spatiale de la structure et de la surface mouillée. Deux méthodes seront envisagées : une stratégie de remaillage et une stratégie de découpage des éléments par une méthode de ligne de niveau.

Mots clés — grands déplacements, forces suiveuses hydrostatiques, éléments finis, remaillage, ligne de niveau, interaction fluide-structure, formulation lagrangienne totale.

1 Introduction

Ce travail concerne l'étude du comportement de structures élastiques contenant des liquides internes avec surface libre. Cette problématique d'interaction fluide-structure fait encore l'objet de recherches notamment dans le domaine aéronautique et spatial pour le dimensionnement de réservoirs d'ailes d'avions, de satellites ou de lanceurs spatiaux [1]. Les structures devenant plus légères et plus souples, les approches linéarisées peuvent être remises en cause dans certains cas d'application. L'objectif de ce travail est donc de prendre en compte d'éventuelles non-linéarités structurales dans les problèmes hydroélastiques avec gravité. Nous nous limitons à l'étude de l'état d'équilibre quasi-statique de la structure soumise à des forces suiveuses hydrostatiques modélisant l'action du fluide interne sur la structure, sans résoudre de problème à l'intérieur du milieu fluide (Figure 1).

2 Problème de référence

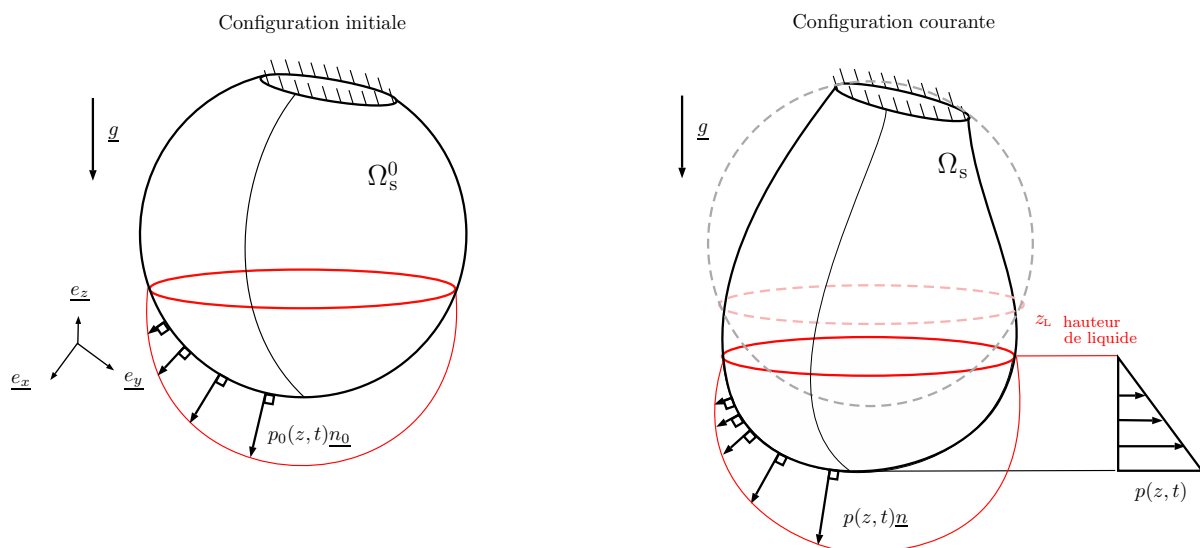


FIGURE 1 – Structure soumise à un champ de pression hydrostatique

2.1 Hypothèses et notations

Considérons un solide élastique isotrope défini par le domaine Ω_s^0 délimité par $\partial\Omega_s^0$ en configuration initiale et par le domaine Ω_s délimité par $\partial\Omega_s$ en configuration courante. Nous notons $\underline{x} = xe_x + ye_y + ze_z$ les coordonnées d'un point matériel en configuration courante. La configuration courante Ω_s est une inconnue du problème. Nous considérons un modèle de comportement hyperélastique. Les effets dynamiques sont négligés pour considérer une transformations quasi-statique. La structure est donc en équilibre statique à chaque instant t . Les efforts de nature volumique dans le solide provenant de la gravité \underline{g} sont négligés. En configuration initiale, le bord du domaine est $\partial\Omega_s^0 = \partial_u\Omega_s^0 \cup \partial_t\Omega_s^0$ et en configuration courante $\partial\Omega_s = \partial_u\Omega_s \cup \partial_t\Omega_s$. Comme les déplacements imposés \underline{u}_d sont nuls, $\partial_u\Omega_s^0$ et $\partial_u\Omega_s$ sont confondus dans la suite de cette étude. Les efforts surfaciques sont notés \underline{t}_0 sur $\partial_t\Omega_s^0$ en configuration initiale et \underline{t} sur $\partial_t\Omega_s$ dite "surface mouillée" en configuration courante. Dans notre cas, ces efforts proviennent du champ de pression hydrostatique $p(z,t)$ porté par la normale \underline{n} en configuration courante et $p_0(z,t)$ porté par \underline{n}_0 en configuration initiale.

2.2 Equations du problème non-linéaire

Les équations locales définies dans le domaine Ω_s et sur le bord du domaine $\partial\Omega_s$, obtenues sous les hypothèses définies précédemment, s'écrivent :

$$\underline{\text{div}} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{0} \quad \text{dans } \Omega_s \quad (1)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} \underline{n} = p(\underline{x}, t) \underline{n} \quad \text{sur } \partial_t\Omega_s \quad (2)$$

$$\underline{u} = \underline{0} \quad \text{sur } \partial_u\Omega_s \quad (3)$$

où $\underline{\underline{\sigma}}$ est la contrainte de Cauchy. Nous définissons le champ de pression hydrostatique de manière suivante :

$$\begin{aligned} p(\underline{x}, t) &= 0 & \text{si } z \geq z_L(t) \\ p(\underline{x}, t) &= -\rho_f g(z - z_L) & \text{si } z < z_L(t) \end{aligned} \quad (4)$$

où ρ_f est la masse volumique du fluide et z_L la hauteur de fluide. Une contrainte supplémentaire doit être prise en compte : le volume de fluide doit rester constant au cours du temps.

3 Formulation EF du problème non-linéaire

3.1 Formulation variationnelle

A partir des équations locales (1), (2) et (3), on montre de manière classique qu'en configuration courante la formulation variationnelle du problème s'écrit :

$$-\int_{\Omega_s} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\delta d}} dV + \int_{\partial_t\Omega_s} \underline{t} \cdot \underline{\underline{\delta u}} ds = 0, \quad \forall \underline{\underline{\delta u}} \in C_u \quad (5)$$

où $\underline{\underline{\delta d}}$ est le taux de déformation et C_u est l'espace des fonctions cinématiquement admissibles à zéro suffisamment régulières. Cette formulation s'écrit classiquement en configuration initiale :

$$-\int_{\Omega_s^0} \mathbb{S} : \mathbb{E} dV + \int_{\partial_t\Omega_s^0} \underline{t}_0 \cdot \underline{\underline{\delta u}} dS = 0, \quad \forall \underline{\underline{\delta u}} \in C_u \quad (6)$$

où \mathbb{S} et \mathbb{E} sont respectivement le second tenseur de Piola-Kirchhoff et le tenseur de Green-Lagrange.

3.2 Forces suiveuses hydrostatiques

La formulation (6) est classique en mécanique non-linéaire des structures. Cependant, le terme lié aux efforts extérieurs est issu du chargement hydrostatique du fluide (4) et dépend donc de la hauteur du fluide z_L et de la position courante de la structure, qui sont des inconnues du problème. Pour écrire les équations du problème non-linéaire, il est nécessaire de détailler le travail virtuel des efforts de pression qui s'écrit sous la forme suivante en configuration courante :

$$\begin{aligned}\delta W_{\text{pres}} &= - \int_{\partial_t \Omega_s} \underline{\delta u} \cdot p(z, t) \underline{n} ds \\ &= \int_{\partial_t \Omega_s} \underline{\delta u} \cdot \rho_f g (z - z_L) \underline{n} ds\end{aligned}\quad (7)$$

A partir d'un changement de variable et de la discrétisation éléments finis, nous pouvons obtenir le vecteur des efforts extérieurs $\underline{F}_{\text{ext}}$ tel que :

$$\delta W_{\text{pres}} = \underline{\delta U}^T \underline{F}_{\text{ext}}(\underline{U}) \quad (8)$$

où \underline{U} est le vecteur des inconnues nodales. Ce vecteur des efforts extérieurs dépend donc du déplacement de façon non linéaire. En effet, la normale extérieure de la surface mouillée et la hauteur de la surface libre sont inconnues. Lors d'un processus de résolution itératif de type Newton-Raphson, la linéarisation et la discrétisation du terme (7) conduisent à une matrice tangente des forces suiveuses notée $\mathbb{K}_{\text{suiiv}}$ que nous ne détaillerons pas ici par soucis de concision (pour plus de précisions le lecteur peut se référer à [2]) :

$$\Delta \delta W_{\text{pres}} = \underline{\delta U}^T \mathbb{K}_{\text{suiiv}}(\underline{U}) \Delta \underline{U} \quad (9)$$

Il est tout de même important de noter que la détermination de $\mathbb{K}_{\text{suiiv}}$ n'est pas triviale du fait que les efforts de pressions suiveurs ne sont pas constants, mais dépendent de la hauteur de fluide et du déplacement de la structure.

3.3 Equation du problème discrétisé

A partir de la formulation variationnelle du problème (6) et après discrétisation éléments finis, nous obtenons une équation non-linéaire de la forme suivante :

$$\underline{F}_{\text{int}}(\underline{U}) - \underline{F}_{\text{ext}}(\underline{U}) = \underline{0} \quad (10)$$

où $\underline{F}_{\text{int}}$ est le vecteur d'effort intérieur. Au cours de la résolution itérative, nous sommes amenés à inverser un système d'équation faisant intervenir un opérateur tangent et le résidu d'équilibre :

$$\mathbb{K}_{\text{tan}} \Delta \underline{U} = \underline{R} \quad (11)$$

avec l'opérateur composé de la matrice tangente matériau, géométrique et la contribution des forces suiveuses définie en (9) tel que :

$$\mathbb{K}_{\text{tan}} = \mathbb{K}_{\text{mat}} + \mathbb{K}_{\text{geo}} + \mathbb{K}_{\text{suiiv}}$$

4 Discrétisation de la surface mouillée

4.1 Prise en compte du glissement à l'interface fluide-structure

La prise en compte de la variation de la hauteur de surface libre soulève un problème lié à la discrétisation de la surface mouillée. Le fluide étant supposé non visqueux, le déplacement d'un point solide ne correspond pas au déplacement d'un point fluide. En effet, le maillage EF de la surface mouillée initiale ne correspond plus à celui de la surface mouillée courante (Figure 2).

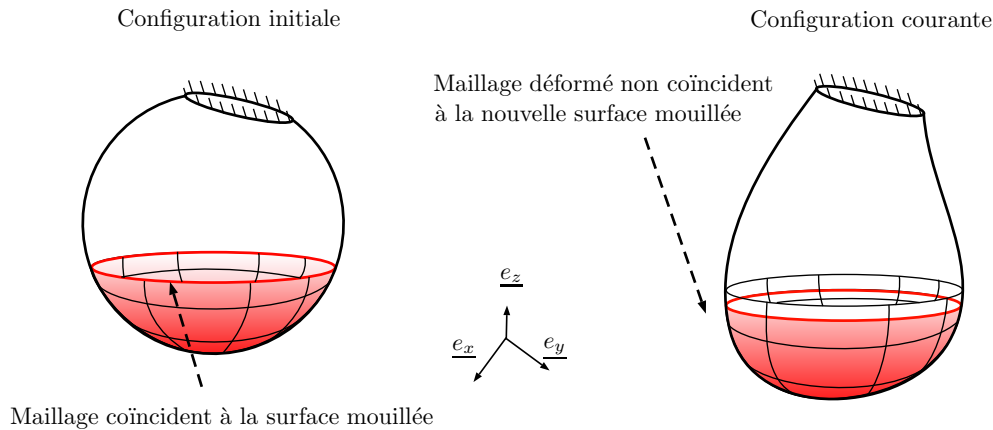


FIGURE 2 – Problème de discrétisation de la surface chargée

Ceci pose de nombreux problèmes techniques vis-à-vis de la construction des opérateurs tangents et du vecteur des efforts extérieurs car ils dépendent de la surface mouillée courante.

4.2 Stratégies de discrétisation

4.2.1 Ligne de niveau

Une première méthode consiste à rendre le chargement indépendant du maillage de la structure. L'introduction d'une ligne de niveau (Figure 3) permet de différencier les surfaces sous charges des surfaces libres d'efforts.

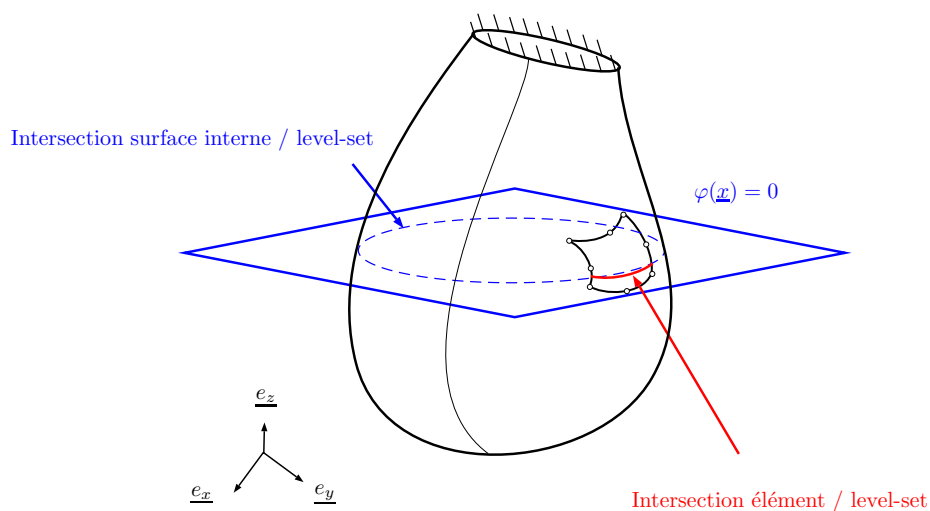


FIGURE 3 – Intersection de la ligne de niveau et de la configuration courante

Cette méthode nécessite une intégration particulière des éléments traversés par la ligne de niveau. En effet, lors des étapes d'intégration par points de Gauss, la position des points de Gauss et la valeur des poids associés vont dépendre de la position de la ligne de niveau dans ces éléments.

4.2.2 Remaillage de la configuration initiale

La deuxième méthode consiste à remailler la configuration initiale à chaque itération (Figure 4).

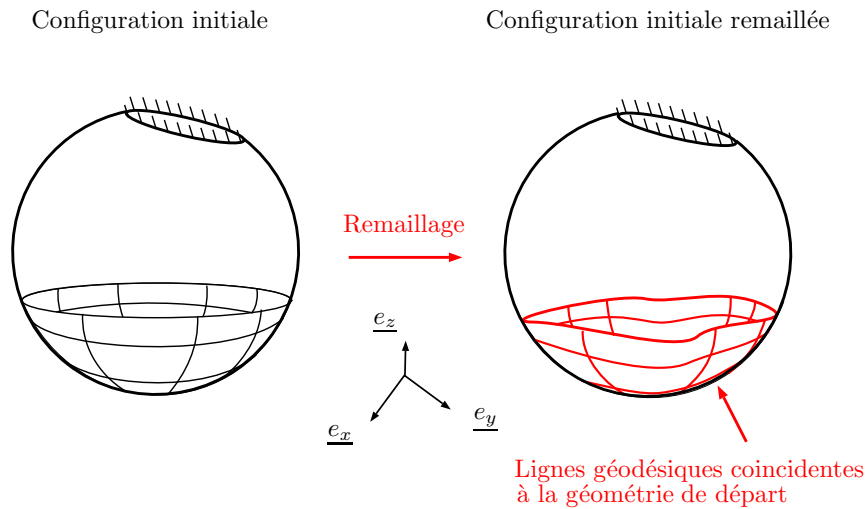


FIGURE 4 – Remaillage de la configuration initiale

Cette méthode nécessite de projeter la solution en déplacement d'une itération précédente sur le maillage mis à jour. De plus, il est nécessaire d'utiliser un mailleur pour générer un maillage transformé compatible avec la surface mouillée.

4.2.3 Variation de hauteur de fluide

Comme nous venons de voir, il est nécessaire d'estimer la variation de hauteur de fluide (Figure 5) au cours de la méthode itérative. Cette variation s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta z_L &= \frac{\Delta V}{A_L} \\ &= \frac{\int_{\partial_t \Omega_s} \underline{\Delta u} \cdot \underline{n} dS}{\int_{\partial_t \Omega_s} \underline{n} \cdot \underline{e}_z dS} \end{aligned} \quad (12)$$

Ce calcul prend en compte la variation du volume de fluide déplacé ΔV et l'aire de la surface libre A_L détaillé dans l'équation (12).

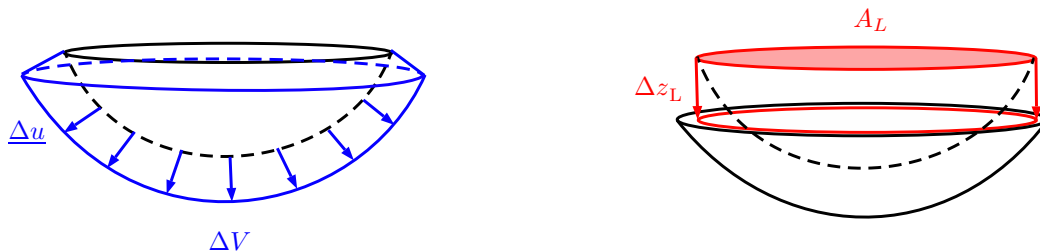


FIGURE 5 – Variation de la hauteur de la surface libre

5 Résultats préliminaires

Le problème non-linéaire, qui paraît simple à première vue, fait intervenir des sources de difficulté de différentes natures. Une première approche consiste à résoudre des sous-problèmes indépendants permettant de valider tous les outils à maîtriser.

5.1 Hauteur de surface libre constante

Considérons une structure de forme sphérique encastrée sur une partie du bord (Figure 6) avec le chargement suivant :

$$\lambda p(z, t) = -\lambda \rho_f g(z - z_L) \quad (13)$$

où λ est un paramètre de chargement variant de 0 à 1 et $\rho_f = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$. La hauteur de surface libre est supposée constante et aucune dépendance au volume interne n'est considérée dans cet exemple.

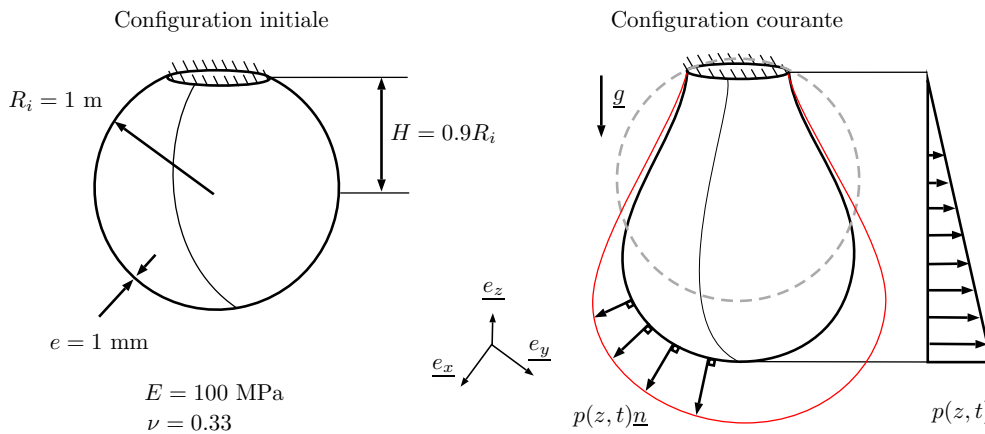


FIGURE 6 – Exemple avec du fluide à hauteur de fluide constante

Les images ci-dessous montrent le maillage avec des cubes à 20 noeuds, à l'état initial (Figure 7) et la déformée à l'état final avec les efforts suiveurs induits par la pression hydrostatique (Figure 8).

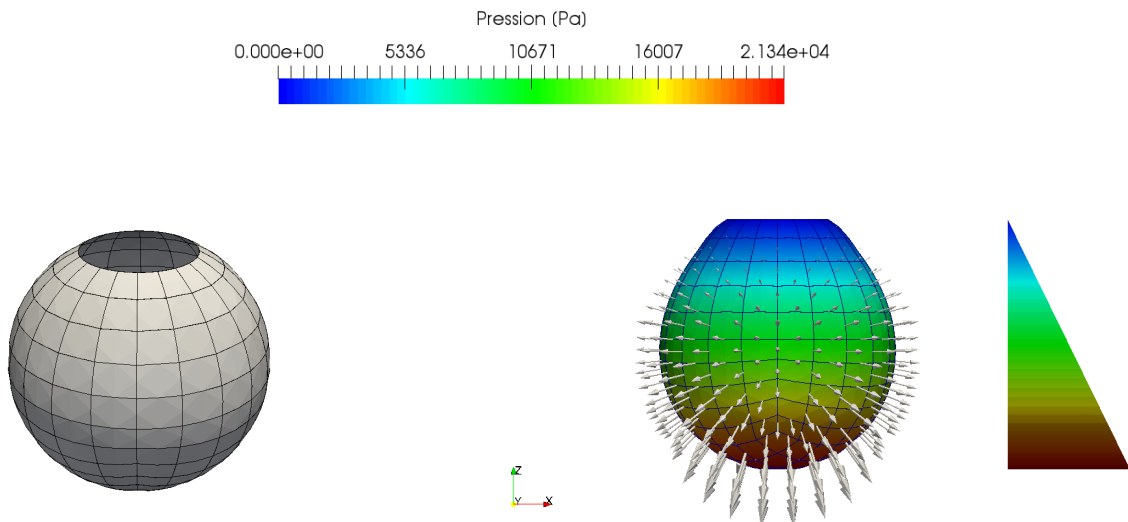


FIGURE 7 – Maillage en cube 20

FIGURE 8 – Solution à $\lambda = 1$

Pour obtenir cette solution nous avons utilisé 10 incréments de chargement. La convergence a été obtenue avec 3 itérations de Newton-Raphson sur chaque incrément.

5.2 Hauteur de surface libre variable

On a testé le cas où la hauteur de fluide est variable avec la méthode de ligne de niveau. Les paramètres matériau restent les mêmes que dans l'exemple précédent mais la sphère est inclinée d'un angle de $\frac{\pi}{4}$ (Figure 9).

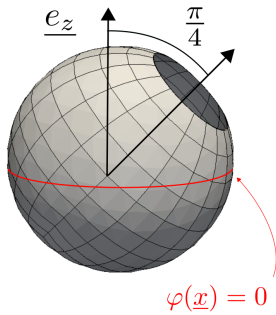


FIGURE 9 – Maillage

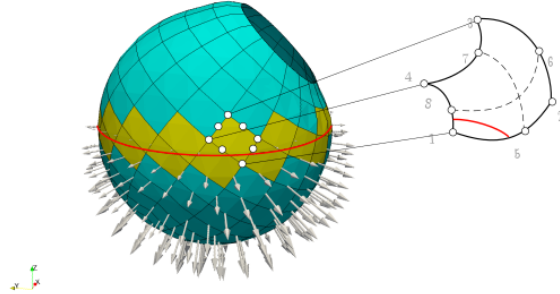


FIGURE 10 – Solution à $\lambda = 1$

Pour intégrer les éléments traversés par la ligne de niveau, il est nécessaire de réévaluer la position et les poids de Gauss. Pour ce faire, de nombreux cas doivent être envisagés. Ci-dessous (Figures 11 et 12) nous décrivons une procédure utilisée pour le cas particulier d'un élément du maillage représenté Figure 10.

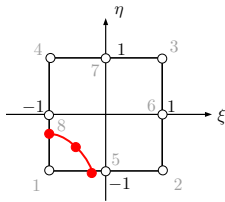


FIGURE 11 – Découpe de l'élément de référence

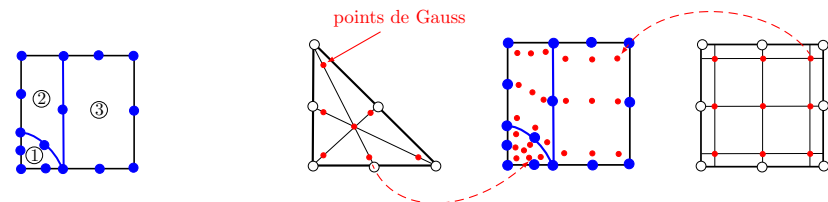


FIGURE 12 – Points de Gauss

L'évolution de la hauteur de ligne de niveau au cours de la simulation est présentée en Figure 13. Rappelons que le volume interne de liquide doit être conservé au cours du temps.

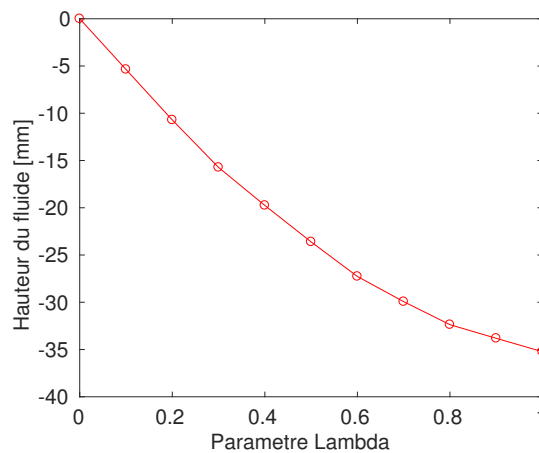


FIGURE 13 – Hauteur de fluide en fonction de λ

A terme nous pourrons comparer les valeurs numériques aux résultats présentés dans [2] qui concernent des cas similaires pour des structures membranaires.

6 Conclusions et perspectives

La modélisation d'un problème non linéaire géométrique avec forces suiveuses hydrostatiques a été traité dans cette étude. Deux points spécifiques ont été abordés. Le premier concerne l'apparition d'opérateurs peu communs, utilisés dans les algorithmes de résolution non-linéaire, dues à la charge suiveuse qui dépend de la hauteur de la ligne de contact. Le deuxième soulève une véritable difficulté technique lié à la discrétisation de la surface mouillée au cours des itérations. Ce problème, qui paraît simple à première vue, nécessite de prendre en main des outils non standards tels que des techniques de lignes de niveaux ou de remaillage. D'autres approches, comme par exemple l'utilisation de maillages incompatibles seront aussi envisagées dans le futur. A terme, les résultats de cette étude ont pour but de connaître l'état précontraint d'une structure souple et flexible contenant un liquide interne incompressible et non visqueux. La maîtrise de ce calcul nous permettrait d'estimer l'influence d'une telle précontrainte sur les vibrations couplées linéarisées de la structure avec le fluide [3] (Figure 14).

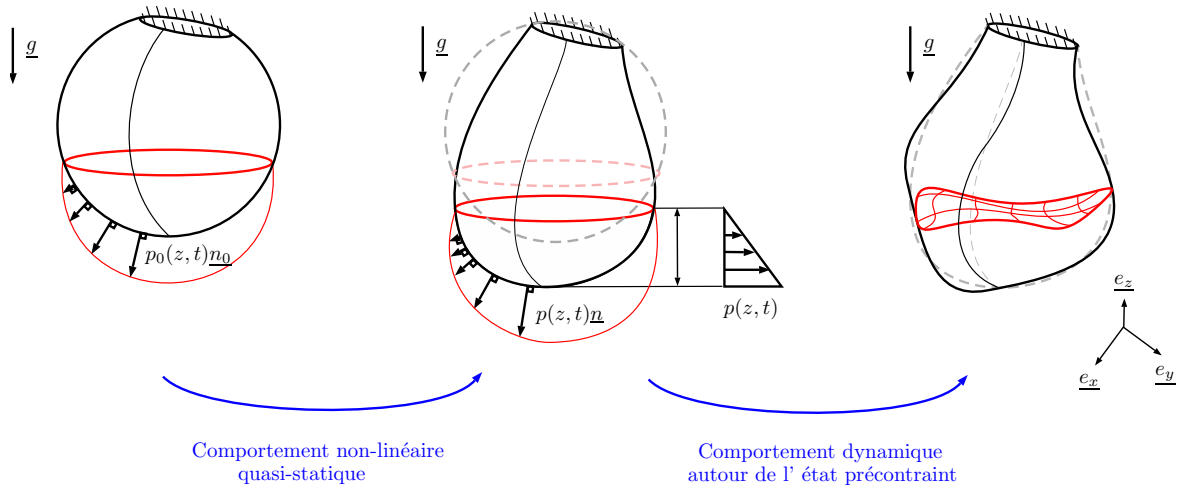


FIGURE 14 – Perspectives : vibrations autour d'un état précontraint

Références

- [1] H.J.-P. Morand, R. Ohayon. *Fluid-Structure Interaction*, Wiley, 1995.
- [2] T. Rumpel, K. Schweizerhof *Hydrostatic fluid loading in non-linear finite element analysis*, International Journal for Numerical Methods in Engineering 59, 849–870, 2004.
- [3] J-S. Schotté, R. Ohayon *Linearized formulation for fluid-structure interaction : Application to the linear dynamic respons of a pressurized elastic structure containing a fluid with a free surface*, Journal of Sound and Vibration 332, 2396-2414, 2013.