

# Positionnement optimal de parois en vibro-acoustique à l'aide de modèles réduits et d'optimisation par métamodèle

L. Laurent<sup>1</sup>, A. Legay<sup>1</sup>

<sup>1</sup> LMSSC, Conservatoire National des Arts et Métiers, case 2D6R10, 2 rue Conté, 75003 Paris, France  
{luc.laurent,antoine.legay}@lecnam.net

**Résumé** — La réduction de bruit, dans le domaine des transports ou pour l'acoustique des bâtiments, est une contrainte de plus en plus importante que les ingénieurs doivent pouvoir prendre en compte dès la phase de conception. Cette exigence implique la mise en place de méthodes permettant, par exemple, d'étudier efficacement l'influence de l'aménagement d'une cabine d'avion sur le niveau de bruit intérieur ou encore la position optimale des parois pour limiter la propagation du bruit dans un open-space. Cette étude se propose d'optimiser la position d'une paroi vis-à-vis de l'acoustique d'une cavité en combinant une résolution du problème mécanique par la méthode des éléments finis à une méthode d'optimisation employant un métamodèle de krigeage.

**Mots clés** — optimisation, krigeage, vibro-acoustique, XFEM.

## 1 Introduction et contexte de l'étude

On s'intéresse dans ce travail à l'optimisation de positionnement de parois dans une cavité acoustique afin d'en réduire le niveau sonore. Le problème mécanique associé est un problème couplé qui fait intervenir :

- un fluide acoustique (air) régi par l'équation de Helmholtz ;
- un matériau poreux (mousse absorbante), collé sur une ou plusieurs paroi(s) de la cavité et permettant d'atténuer le bruit, modélisé par une loi de Biot-Allard ;
- des parois structurelles fines placées dans le fluide acoustique, modélisées par les équations de l'élasto-dynamique.

Ce problème, modélisé numériquement à l'aide de la méthode des éléments finis, présente un temps de calcul incompatible avec une optimisation globale nécessitant un nombre important d'appels au solveur. Pour cette raison, deux outils sont proposés : (1) une réduction du modèle mécanique basée sur l'emploi conjoint des approches Xfem [1, 2] et de synthèse modale (Craig-Bampton [3]), et (2) une optimisation paramétrique réalisée en s'appuyant sur un métamodèle de krigeage [4].

L'emploi de ces deux outils conduit alors à une réduction significative des temps de calcul de la procédure d'optimisation.

## 2 Modélisation et résolution du problème de vibro-acoustique

### 2.1 Modélisation du problème couplé air-structure

On considère une structure mince immergée dans un fluide acoustique (Fig. 1). Le fluide acoustique est décrit par la fluctuation de pression  $p$  autour d'un état d'équilibre. La structure est modélisée par des éléments finis de coques et suit les équations classiques de l'élasto-dynamique.

La fluctuation de pression dans le fluide est discrétisée par des éléments finis volumiques. Ces deux maillages sont indépendants, permettant ainsi de placer arbitrairement la structure dans le maillage donné de la cavité [1]. La fluctuation de pression étant discontinue de part et d'autre de la structure, cette discontinuité est prise en compte par enrichissement de la base d'approximation du fluide par une fonction de Heaviside (XFEM [5]) :

$$p(M) = \sum_{i \in S} N_i(M) P_i + \sum_{i \in E} N_i(M) \psi(M) A_i \quad (1)$$

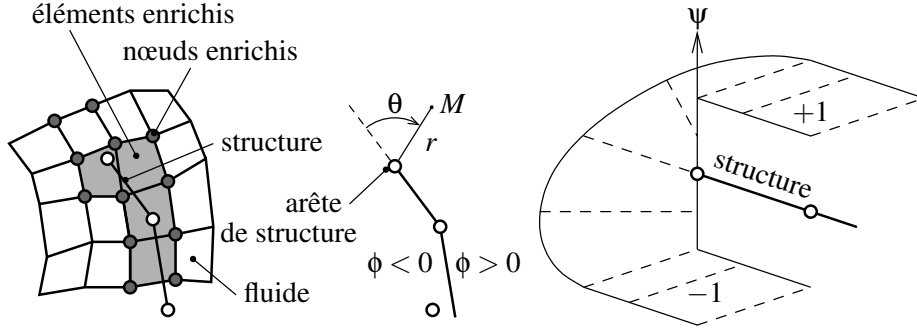


FIGURE 1 – Enrichissement du champ de pression autour d'une structure mince dans un fluide acoustique

où  $\mathcal{S}$  est l'ensemble des nœuds du maillage,  $N_i(M)$  est la fonction de forme associée au nœud  $i$ ,  $P_i$  est la valeur de pression nodale,  $\mathcal{E}$  est l'ensemble des nœuds enrichis (nœuds connectés aux éléments coupés par la structure),  $\psi(M)$  est la fonction d'enrichissement qui est égale à la fonction de Heaviside le long de la structure ( $\pm 1$  suivant la position de  $M$  par rapport à la structure) et qui est rendue continue le long des bords libres de la structure dans le fluide, et  $A_i$  est l'inconnue additionnelle provenant de l'enrichissement.

## 2.2 Modélisation du matériaux poreux

Le matériau poreux est modélisé par la théorie de Biot-Allard comme possédant un squelette solide flexible noyé dans de l'air [6, 7]. IL s'agit d'un modèle homogénéisé où les deux phases, solide et fluide, sont définies en tout point du domaine  $\Omega_P$  occupé par le matériau poreux. Les champs de contraintes  $\underline{\sigma}_s$  et  $\underline{\sigma}_f$  des phases solide et fluide respectivement vérifient les équations locales de la dynamique :

$$\overrightarrow{\text{div}} \underline{\sigma}_s + \omega^2 (\tilde{\rho}_s \underline{u}_s + \tilde{\rho}_{sf} \underline{u}_f) = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega_P, \quad (2)$$

$$\overrightarrow{\text{div}} \underline{\sigma}_f + \omega^2 (\tilde{\rho}_{sf} \underline{u}_s + \tilde{\rho}_f \underline{u}_f) = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega_P, \quad (3)$$

où  $\underline{u}_s$  et  $\underline{u}_f$  sont respectivement les champs de déplacement des phases solide et fluide,  $\tilde{\rho}_s$ ,  $\tilde{\rho}_f$  et  $\tilde{\rho}_{sf}$  sont des densités complexes équivalentes dépendantes de la pulsation  $\omega$  qui prennent en compte les effets visqueux ainsi que les couplages inertiels entre les deux phases. Les champs de déplacements et de contraintes homogénéisés sont reliés par des relations de comportements qui s'écrivent en notation de Voigt :

$$\underline{\sigma}_s = \tilde{D}_s \underline{\varepsilon}(\underline{u}_s) + \tilde{D}_{sf} \underline{\varepsilon}(\underline{u}_f), \quad (4)$$

$$\underline{\sigma}_f = \tilde{D}_{sf}^T \underline{\varepsilon}(\underline{u}_s) + \tilde{D}_f \underline{\varepsilon}(\underline{u}_f), \quad (5)$$

où  $\tilde{D}_s$ ,  $\tilde{D}_{sf}$  et  $\tilde{D}_f$  sont des opérateurs d'élasticité complexes équivalents dépendants de la pulsation  $\omega$ .

## 2.3 Modèle numérique du problème couplé poreux-air-structure

En discrétisant le matériau poreux par des éléments finis tridimensionnels et en notant  $\underline{\eta}_s$  et  $\underline{\eta}_f$  respectivement les représentations de  $\underline{u}_s$  et de  $\underline{u}_f$  dans la base des fonctions de forme du maillage du domaine poreux, le système couplé fluide-poreux-structure à résoudre pour la pulsation harmonique  $\omega$  est :

$$\left( \begin{array}{ccccc} \mathbf{K}_{FF} & \mathbf{K}_{FA} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{AF} & \mathbf{K}_{AA} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{C}_{AS}^T & \mathbf{K}_{SS} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -(1-\phi)\mathbf{C}_{Fs}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{K}}_{ss} & \tilde{\mathbf{K}}_{sf} \\ -\phi\mathbf{C}_{Ff}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{K}}_{fs} & \tilde{\mathbf{K}}_{ff} \end{array} \right) - \omega^2 \left( \begin{array}{ccccc} \mathbf{M}_{FF} & \mathbf{M}_{FA} & \mathbf{0} & (1-\phi)\mathbf{C}_{Fs} & \phi\mathbf{C}_{Ff} \\ \mathbf{M}_{AF} & \mathbf{M}_{AA} & \mathbf{C}_{AS} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{SS} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{M}}_{ss} & \tilde{\mathbf{M}}_{sf} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{M}}_{fs} & \tilde{\mathbf{M}}_{ff} \end{array} \right) \begin{bmatrix} \underline{P}_F \\ \underline{P}_A \\ \underline{U}_S \\ \underline{\eta}_s \\ \underline{\eta}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^2 \underline{U}_F \\ \underline{0} \\ \underline{E}_S \\ \underline{0} \\ \underline{0} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

où  $\phi$  est la porosité du matériau poreux (c'est à dire la fraction volumique de fluide),  $\underline{P}_F$  et  $\underline{P}_A$  sont respectivement les vecteurs des pressions nodales des parties standard et enrichie, tandis que  $\underline{U}_S$  est le champ de déplacement de la structure écrit dans la base d'approximation de la structure. Ce système montre que le couplage fluide-structure est uniquement réalisé via l'enrichissement et que, par conséquent, seules les matrices correspondantes ( $\mathbf{K}_{AA}$ ,  $\mathbf{M}_{AA}$ ,  $\mathbf{K}_{FA}$ ,  $\mathbf{M}_{FA}$ ,  $\mathbf{C}_{SA}$ ) doivent être recalculées lorsque la position de la structure varie.

Un modèle réduit du problème couplé est ensuite construit (voir [2] pour plus de détails). Cette approche s'appuie sur deux principes :

- la structure est projetée sur sa base modale tronquée ;
- les inconnues  $\underline{P}_F$  sont projetées la base modale tronquée de la cavité considérée en l'absence de structure ainsi que sur les relèvements statiques à l'interface [3].

Cette réduction permet un gain significatif en termes de temps de calcul.

### 3 Optimisation à l'aide de métamodèles

La conduite d'une optimisation globale faisant appel à un solveur coûteux rend inabordable l'usage d'algorithmes d'optimisation classiques. Une solution consiste à réaliser l'optimisation globale sur un métamodèle construit à partir d'un nombre limité d'appels au solveur et donc pour un coût réduit en termes de temps de calcul. L'optimisation globale se fait alors à coût négligeable. Dans le cadre de ce papier, en raison de ses performances en terme de qualité d'approximation globale, le krigeage universel est employé. Après échantillonnage de l'espace de conception, ce type de métamodèle utilisé dans un cadre déterministe permet d'obtenir une approximation de la fonction objectif interpolante aux points de calcul obtenus à l'aide du solveur. Afin de palier au manque d'informations entre ces points, l'usage d'un enrichissement itératif basé sur l'amélioration espérée permet d'accroître la qualité d'approximation locale du métamodèle et de localiser plus précisément le minimum.

Cette partie a pour but de présenter succinctement le métamodèle construit, ainsi que la méthode d'optimisation employée.

#### 3.1 Krigeage universel

Introduit dans les années 1950, le krigeage [8] est une technique actuellement utilisée entre autres pour l'approximation de fonctions complexes et coûteuses. Cette technique, initialement introduite dans le cadre de la géostatistique [9], a été déployée dans le contexte de l'approximation globale à la fin des années 1980 [10].

##### 3.1.1 Construction du métamodèle

Afin de construire le métamodèle, un échantillonnage de l'espace de conception  $\mathcal{D}$  (où les  $n_p$  paramètres de conception varient) est réalisé en utilisant la technique *Improve hypercube Sampling* [11] basée sur la technique de l'Hypercube Latin [12] et assure un remplissage de l'espace. Ainsi, le solveur est employé pour évaluer la valeur réelle de la réponse  $y()$  en ces  $n_s$  échantillons  $\mathbf{x}^{(i)}$ . Finalement, le métamodèle peut être construit à partir des  $n_s$  couples  $\{\mathbf{x}^{(i)}, y(\mathbf{x}^{(i)})\}$ .

Afin d'élaborer le métamodèle de krigeage, la véritable fonction  $y()$  est considérée comme la réalisation d'un processus gaussien stationnaire  $Y()$  s'écrivant sous la forme :

$$Y(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) + Z(\mathbf{x})$$

où le modèle de tendance  $\mu$  est une fonction déterministe et  $Z$  une processus gaussien stationnaire à moyenne nulle, c'est-à-dire tel que  $\mathbb{E}[Z(\mathbf{x})] = 0$  et  $\text{Var}[\mu(\mathbf{x})] = 0^1$ . Dans le cadre du krigeage universel la fonction  $\mu(\mathbf{x})$  est choisie égale à une fonction polynomiale d'ordre 2 à coefficients inconnus  $\beta_i$  telle que  $\mu(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^p \beta_i f_i(\mathbf{x})$ .

Par ailleurs, la relation de covariance se formule de la manière suivante :

$$k(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j)}) = \text{cov}[Y(\mathbf{x}^{(i)}), Y(\mathbf{x}^{(j)})] = \text{cov}[Z(\mathbf{x}^{(i)}), Z(\mathbf{x}^{(j)})]. \quad (7)$$

1.  $\mathbb{E}[\bullet]$  et  $\text{Var}[\bullet]$  désigne l'espérance et la variance statistiques.

Le procédé de construction du métamodèle vise à déterminer un estimateur linéaire, sans biais et à variance minimale  $\hat{Y}(\mathbf{x})$  du processus aléatoire  $Y(\mathbf{x})$ . L'estimateur obtenu est généralement désigné sous le nom de *Best Linear Unbiased Predictor* (BLUP).

La minimisation de la variance de l'erreur du modèle sous contrainte de non-biais conduit à l'obtention de l'approximation de la fonction  $\tilde{y}()$  et la variance du krigeage  $s^2()$  :

$$\tilde{y}(\mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{f}_0^T \hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{c}_0^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{y}_{n_s} - \mathbf{F} \hat{\boldsymbol{\beta}}); \quad (8)$$

$$s^2(\mathbf{x}^{(0)}) = \sigma_Y^2 - \begin{bmatrix} \mathbf{c}_0 \\ \mathbf{f}_0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F}^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_0 \\ \mathbf{f}_0 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

avec  $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{F}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{y}_{n_s}$ , tels que

- $\mathbf{f}_0$  et  $\mathbf{F}$  sont les vecteur et matrice contenant les fonctions de base polynomiales évaluées respectivement au point courant  $\mathbf{x}^{(0)}$  et aux points échantillonnés  $\mathbf{x}^{(i)}$  ( $i \in \llbracket 1, n_s \rrbracket$ );
- $\mathbf{c}_0$  et  $\mathbf{C}$  sont les vecteur et matrice contenant respectivement les relations de covariance  $k(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(0)})$  et  $k(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j)})$  ( $(i, j) \in \llbracket 1, n_s \rrbracket^2$ );
- $\sigma_Y^2$  est la variance du processus  $Y$ ;
- $\mathbf{y}_{n_s}$  est le vecteur contenant les valeurs de la fonction  $y()$  aux points échantillonnés.

### 3.1.2 Choix de la structure de covariance et estimation des paramètres internes

La structure de covariance nécessaire à la construction du krigeage est basée sur l'emploi d'une fonction noyau paramétrée telle que :

$$k(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j)}) = \sigma_Y^2 \prod_{k=1}^{n_p} h(x_k^{(i)} - x_k^{(j)}; \ell_k). \quad (10)$$

Cette fonction multidimensionnelle s'appuie sur une fonction noyau unidimensionnelle Matérn 3/2 (cf. Eq. (11)). Cette dernière est une expression particulière de la classe de fonction Matérn [13] de plus en plus utilisée lors de la construction du krigeage en lieu et place de la fonction gaussienne.

$$h(r) = \left( 1 + \frac{\sqrt{3}|r|}{\ell} \right) \exp \left( -\frac{\sqrt{3}|r|}{\ell} \right) \quad (11)$$

Cette fonction présente en particulier une aptitude à réduire les problèmes de conditionnement de la matrice de covariance  $\mathbf{C}$  conduisant ainsi à une meilleure stabilité numérique lors de l'estimation des paramètres.

La construction du krigeage nécessite enfin la détermination des  $n_p$  paramètres internes  $\ell_k$  ainsi que la variance du processus  $\sigma_Y^2$ . Pour cela, la maximisation de la vraisemblance [14] du processus est réalisée analytiquement pour déterminer  $\sigma_Y^2$  et numériquement - à l'aide d'un algorithme d'optimisation globale par essais particuliers - pour déterminer les paramètres internes  $\ell_k$ .

## 3.2 Optimisation

La réalisation d'une optimisation paramétrique employant un métamodèle de krigeage peut alors être réalisée. Pour ce faire, un algorithme EGO (*Efficient Global Optimization* [4]) est employé. Ce dernier s'articule en 2 phases :

- la construction d'un premier métamodèle à partir d'un tirage initial;
- l'exécution d'un algorithme itératif employant le métamodèle initial à la première itération puis l'enrichissant itérativement grâce à l'ajout de nouveaux couples  $\{\mathbf{x}^{(j)}, y(\mathbf{x}^{(j)})\}$  choisis judicieusement.

Les nouveaux couples ajoutés à chaque itération de l'algorithme EGO sont obtenus grâce à la maximisation de l'amélioration espérée (*Expected Improvement* [15]). Cette fonctionnelle nécessite le calcul de la variance de prédiction fournie ici par le métamodèle de krigeage. De plus, en raison de la forte multimodalité de cette fonction, un algorithme d'optimisation globale par essais particuliers est employé. Finalement, un critère de convergence basé sur le maximum de l'amélioration espérée est employé.

## 4 Placement optimale d'une paroi

On considère une paroi structurelle dans une cavité acoustique munie d'un matériau absorbant poreux collé sur le plafond de la cavité (Fig. 2). Une source acoustique est placée dans un des coins de la cavité. La position de la paroi est paramétrée par la position de son centre  $d \in [1.35 \text{ m}, 3.95 \text{ m}]$  ainsi que de son orientation angulaire  $\theta \in [0, \pi]$ .

On cherche le couple de paramètres  $(d, \theta)$  minimisant la pression quadratique moyenne dans le volume de contrôle dans la bande de fréquence  $[42 \text{ Hz}, 63 \text{ Hz}]$ .

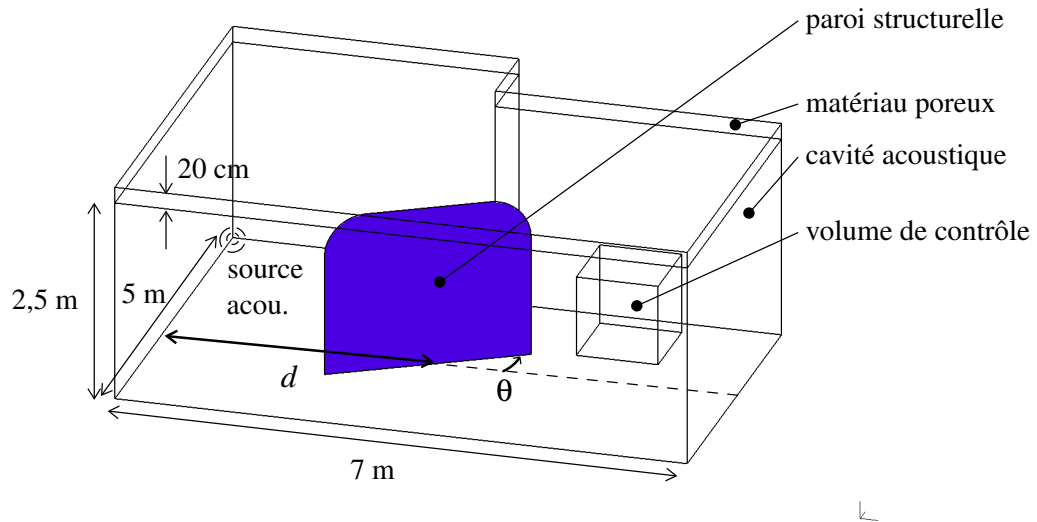


FIGURE 2 – Cavité et paroi considérées

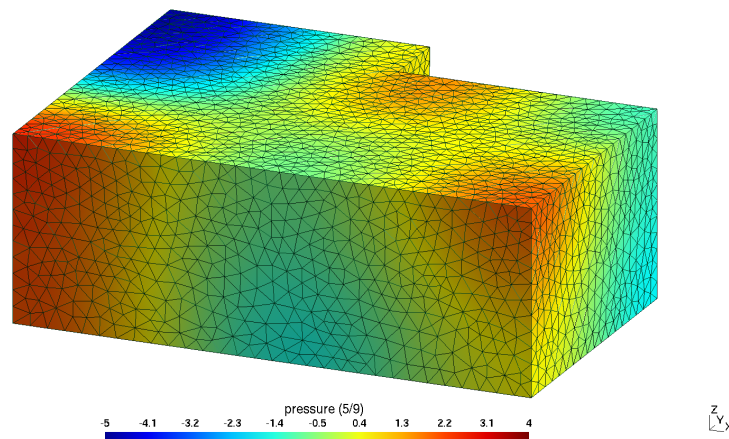
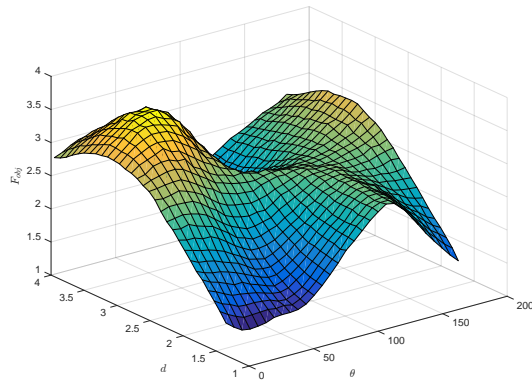


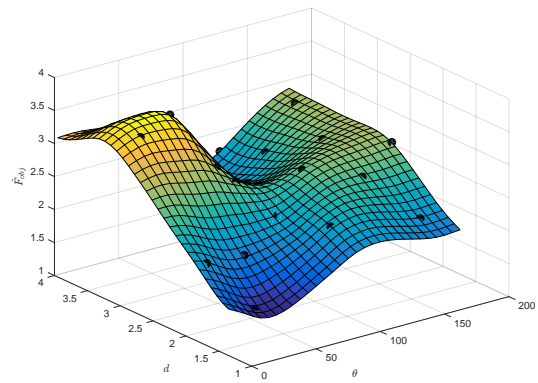
FIGURE 3 – Partie réelle du champ de pression dans la cavité air à 71 Hz pour  $d = 3.25 \text{ m}$  et  $\theta = 30 \text{ deg}$

### 4.1 Approximation initiale

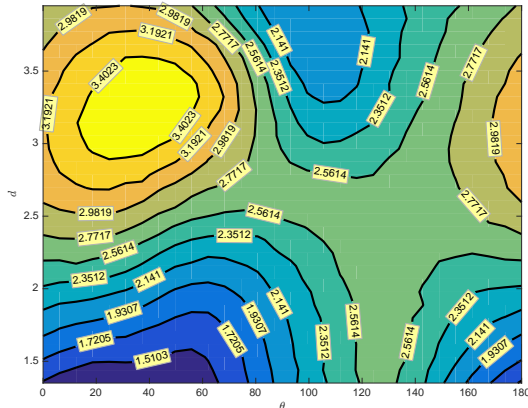
La surface de référence obtenue est présentée en Figure 4a. Celle-ci est obtenue à partir de 900 points échantillonnés en une grille régulière. La Figure 4b présente quant à elle l'approximation obtenue à l'aide du krigeage universel à partir d'un tirage IHS de 25 points. La construction du métamodèle nécessite environ 5 min (soit environ 1 h50 CPU) sur une machine équipée de 20 cœurs (processeurs Intel® Xeon® E5-2680 v2 - 2.8 GHz) et de 128 Gb de mémoire vive DDR3-1866.



(a) Surface de référence



(b) Surface approchée par krigeage universel ( $n_s = 25$ )



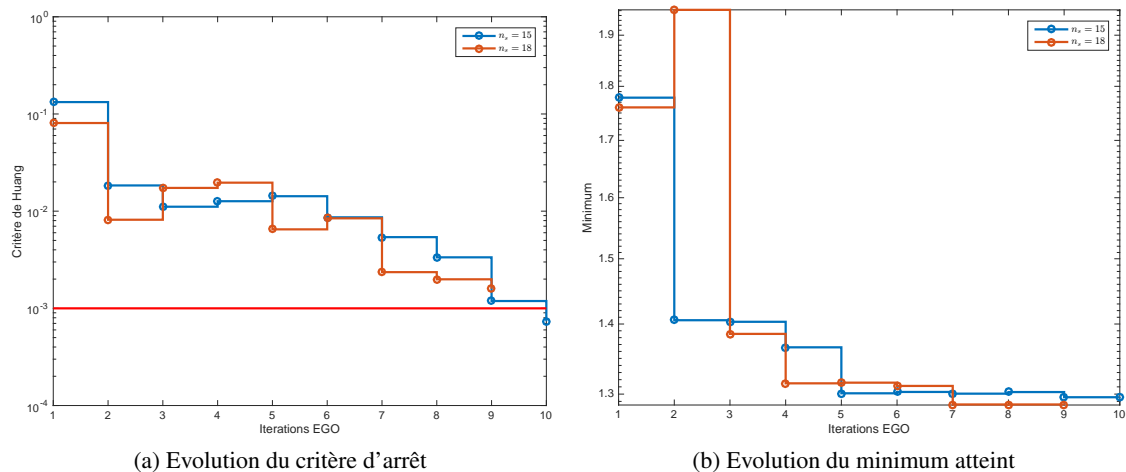


FIGURE 5 – Evolutions du critère d'arrêt et du minimum atteint durant les itérations de l'algorithme EGO

mécanique que pour localiser le minimum global.

L'exemple proposé d'une cavité trois dimensions et d'une optimisation à deux paramètres sera étendu par la suite à un exemple comportant plus de paramètres. Parallèlement des développements complémentaires sont en cours. Ces derniers portent en particulier sur la réduction du modèle du poreux ainsi qu'à la prise en compte de plusieurs fonctions objectifs.

## Références

- [1] Antoine Legay. An extended finite element method approach for structural-acoustic problems involving immersed structures at arbitrary positions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 93(4) :376–399, 2013.
- [2] Antoine Legay. The extended finite element method combined with a modal synthesis approach for vibro-acoustic problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 101(5) :329–350, 2015.
- [3] Mervyn C. C. Bampton and Roy R. Craig Jr. Coupling of substructures for dynamic analyses. *AIAA Journal*, 6(7) :1313–1319, 2016/11/25 1968.
- [4] Donald R. Jones, Matthias Schonlau, and William J. Welch. Efficient global optimization of expensive black-box functions. *Journal of Global optimization*, 13(4) :455–492, 1998.
- [5] Nicolas Moës, John Dolbow, and Ted Belytschko. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(1) :131–150, 1999.
- [6] Maurice A. Biot. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. i. low-frequency range. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 28(2) :168–178, 1956.
- [7] Jean-François Allard and Noureddine Atalla. Sound propagation in porous media : modelling sound absorbing materials. *Elsevier, London*, 1(0) :11, 1993.
- [8] Daniel G. Krige. A statistical approach to some mine valuation and allied problems on the Witwatersrand. Master's thesis, University of the Witwatersrand, 1951.
- [9] Georges Matheron. Traité de géostatistique appliquée. *Memoires du Bureau de Recherches Geologiques et Minières*, 14, 1962.
- [10] Jerome Sacks, Susannah B. Schiller, and William J. Welch. Designs for computer experiments. *Technometrics*, 31(1) :41–47, 1989.
- [11] Brian Beachkofski and Ramana Grandhi. Improved distributed hypercube sampling. In *43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, number AIAA 2002–1274, 2002.
- [12] Michael D. McKay, William J. Conover, and R.J. Beckman. A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code. *Technometrics*, 21(2) :239–245, 1979.
- [13] Carl E. Rasmussen and Christopher K. I. Williams. *Gaussian Processes for Machine Learning*. Adaptive Computation and Machine Learning. The MIT Press, Cambridge, MA, USA, 01 2006.

- [14] Kanti V. Mardia and Roger J. Marshall. Maximum likelihood estimation of models for residual covariance in spatial regression. *Biometrika*, 71(1) :135, 1984.
- [15] Matthias Schonlau. *Computer Experiments and Global Optimization*. PhD thesis, University of Waterloo, 1997.