

Calcul du comportement dynamique d'une portée de téléphérique bi-câble à l'aide de bases modales

G. Hurel¹, J. Laborde¹, L. Jézéquel¹

¹ LTDS, Ecole Centrale de Lyon, {gabriel.hurel, jerome.laborde, louis.jezequel}@ec-lyon.fr

Résumé — Dans le cadre du développement de téléphérique urbain I2TC, le souci du confort des passagers est accru. Ainsi, l'on souhaite modéliser de façon précise le comportement dynamique d'une ligne de téléphérique. Dans le modèle présenté on effectue les calculs pas à pas suivant l'avancement des cabines sur une portée. À chaque pas, une position statique et une base modale sont calculées. Un calcul transitoire avec un chargement donné est ensuite effectué sur la base modale concernée. Les résultats finaux d'un pas servent de conditions initiales du pas suivant.

Mots clés — téléphérique, câble, cabine, base modale, dynamique.

1 Présentation du modèle

1.1 Système étudié

L'objectif est de modéliser le comportement dynamique d'une portée de ligne de téléphérique bi-câble, c'est à dire la portion de câble entre deux pylônes avec les cabines qui y sont suspendues. Les deux câbles sont :

- Le câble porteur : son rôle est de soutenir le poids de la cabine et de la guider. Il est fixe, les cabines roulent dessus.
- Le câble tracteur : son rôle est de tracter les cabines à une vitesse V_c . Il avance donc avec les cabines.

1.2 Modélisation

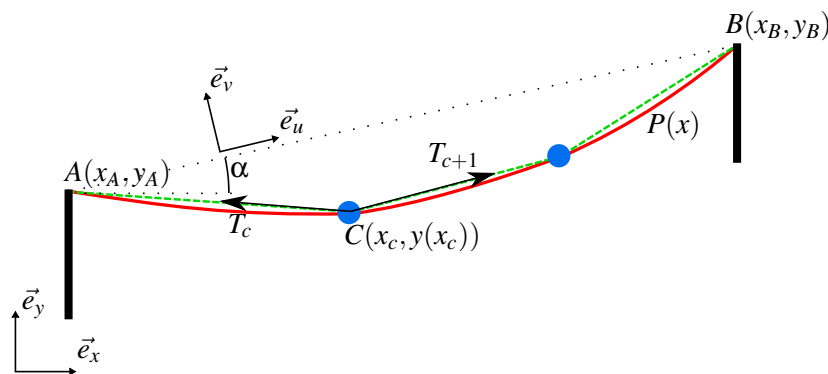


FIGURE 1 – Schéma général du modèle

La modélisation proposée est bi-dimensionnelle se situe dans le plan formé par l'axe du téléphérique et la verticale. Les déplacements transversaux hors-plan ne sont donc pas pris en compte. Les différents éléments du système sont modélisés comme suit :

- Les pylônes A et B sont considérés comme infiniment rigides. Leurs coordonnées dans le repère global (\vec{e}_x, \vec{e}_y) sont respectivement (x_A, y_A) et (x_B, y_B) .
- Chaque cabine est modélisée par une masse ponctuelle M en contact non-frottant sur le câble porteur. L'avancement d'une cabine c selon l'axe \vec{e}_x est noté $x_c(t)$. La vitesse d'avancement est imposée et commune à toutes les cabines de la portée $\dot{x}_c(t) = V_c$.

- Le câble porteur (en tracé rouge continu sur la figure 1) possède une masse linéique μ et est élastique. Son module d'Young est donné par E et sa section par S . Il ne possède pas de raideur en flexion. Ses deux extrémités sont accrochées de manière fixe aux pylônes A et B . Sa longueur ne varie pas si ce n'est de par son élasticité. Sa tension est notée P .
- Le câble tracteur (en tracé vert discontinu sur la figure 1) est lui aussi élastique (E_T, S_T) mais est considéré sans masse. Il relie donc de façon linéaire la cabine (ou le pylône) à la cabine suivante (ou le pylône suivant). La tension T du câble tracteur est maintenue constante en A . La tension en B est telle qu'à chaque instant l'équilibre statique du système est maintenu.

Nous ne considérons pas les effets aérodynamiques qui pourraient exister entre l'atmosphère et les différents éléments du système.

1.3 Stratégie de calcul

Deux hypothèses fortes ont été faites pour la construction de ce modèle. La première vise à considérer que V_c est suffisamment faible pour que les effets dynamiques liés à l'avancement des cabines soient négligeables. Le déplacement global des cabines peut alors être considéré comme quasi-statique.

La seconde hypothèse est celle des petites perturbations dynamiques devant la flèche statique de la portée. La réponse du système peut ainsi être calculée de façon linéaire.

Grâce à ces deux hypothèses, un calcul pas à pas peut être mené en discrétisant l'avancée des cabines. Un pas correspond à un avancement donné de l'ensemble des cabines sur la portée. À chaque pas on effectue un calcul statique non-linéaire permettant de déterminer la déformée du système induite par le poids du câble et des cabines. Son comportement dynamique étant supposé linéaire, on peut à chaque pas calculer une base modale en prenant en compte le résultat statique associé. Enfin à chaque pas, un calcul transitoire dynamique sera effectué sur la base modale concernée. Les conditions initiales seront issues de l'état du système au pas précédent.

Le comportement global du système est obtenu en sommant les résultats statiques et les résultats dynamiques.

Une modélisation similaire d'un téléphérique bicâble ayant pour but d'obtenir la réponse dynamique lors d'un arrêt d'urgence a été proposée par [2]. Cependant, il suppose que les mouvements verticaux et horizontaux sont découplés et les calcule séparément sans utiliser de base modale.

2 Calcul statique

2.1 Câble porteur

On considère une portion élémentaire du câble porteur de longueur ds à l'abscisse x soumise à la tension du câble P et à son propre poids. L'équilibre statique s'écrit :

$$\mu ds \vec{g} + \vec{P}(x) + \vec{P}(x + dx) = \vec{0} \quad (1)$$

Par projection sur les axes \vec{e}_x et \vec{e}_y on en déduit :

$$\frac{dP_x}{dx} = 0, \quad \frac{dP_y}{dx} = \mu g ds \quad (2)$$

Le câble porteur étant élastique sa masse linéique varie selon la tension à laquelle il est soumis :

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + P/(ES)} \quad (3)$$

Dans le contexte des téléphériques, l'ordre de grandeur du terme $P/(ES)$ est de $5 \cdot 10^{-3}$. On s'autorise à le négliger et à considérer μ constant. Les équations 2 aboutissent à l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = \frac{1}{\tau} \sqrt{1 + \left(\frac{dy(x)}{dx} \right)^2} \quad \text{avec } \tau = \frac{P_x}{\mu g} \quad (4)$$

La solution de l'équation (4) correspond à une chaînette :

$$y(x) = \tau \cosh\left(\frac{x}{\tau} + K_1\right) + K_2 \quad (5)$$

Les coefficients τ , K_1 et K_2 sont à déterminer à partir des conditions aux limites. La tension du câble porteur P est donnée par l'expression :

$$P(x) = P_x \cosh\left(\frac{x}{\tau} + K_1\right) \quad (6)$$

2.2 Équilibre statique de la cabine

Soit une cabine c sur la portée à l'abscisse x_c . La tension du câble tracteur à sa gauche est notée T_c tandis que celle à sa droite est notée T_{c+1} . La force de réaction du câble porteur sur la cabine \vec{N} est normale à l'angle moyen φ_c que forme celui-ci au niveau de la cabine.

$$\varphi_c = \frac{1}{2} \left(\arctan\left(\frac{dy(x_c^-)}{dx}\right) + \arctan\left(\frac{dy(x_c^+)}{dx}\right) \right) \quad (7)$$

L'équilibre statique de la cabine s'écrit :

$$\vec{N} + \vec{T}_c + \vec{T}_{c+1} + M\vec{g} = \vec{0} \quad (8)$$

Les angles θ_c et θ_{c+1} que forme le câble tracteur avec l'horizontale de part et d'autre de la cabine sont donnés par :

$$\theta_c = \arctan\left(\frac{y(x_c) - y(x_{c-1})}{x_c - x_{c-1}}\right), \quad \theta_{c+1} = \arctan\left(\frac{y(x_{c+1}) - y(x_c)}{x_{c+1} - x_c}\right) \quad (9)$$

On désigne par $x_0 = x_A$ et $x_{n+1} = x_B$ où n est le nombre de cabines présentes sur la portée. L'équilibre statique du point du câble porteur en contact avec la cabine c est :

$$\vec{N} = \vec{P}(x_c^-) + \vec{P}(x_c^+) \quad (10)$$

La continuité du câble au niveau de la cabine c est donnée par :

$$\tau_c \cosh\left(\frac{x_c}{\tau_c} + K_{1c}\right) + K_{2c} = \tau_{c+1} \cosh\left(\frac{x_c}{\tau_{c+1}} + K_{1(c+1)}\right) + K_{2(c+1)} \quad (11)$$

2.3 Système complet

De même que pour la masse linéique μ , on néglige l'allongement global statique du câble porteur. Sa longueur L à l'équilibre statique est donc considérée comme constante quelque soit le nombre de cabines n et leurs positions. Son expression est donnée par :

$$L = \int_A^B ds = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + \left(\frac{dy(x)}{dx}\right)^2} dx = \sum_{c=1}^{n+1} \int_{x_{c-1}}^{x_c} \tau_c \frac{d^2y(x)}{dx^2} dx = \sum_{c=1}^{n+1} \int_{x_{c-1}}^{x_c} \cosh\left(\frac{x}{\tau_c} + K_{1c}\right) dx \quad (12)$$

La projection des équations d'équilibre (8) et (10) donne $3n$ équations qui avec les n équations (11), l'équation (12) et les conditions aux limites en A et en B constitue un système non-linéaire de $4n + 3$ équations. Il permet de trouver numériquement les $n + 1$ inconnues τ_c , K_{1c} , K_{2c} , et les n inconnues T_c .

2.4 Résultats

La figure 2 trace la déformée du système avec 3 cabines dans une position donnée ainsi que la tension des câbles porteur et tracteur en fonction de l'abscisse x .

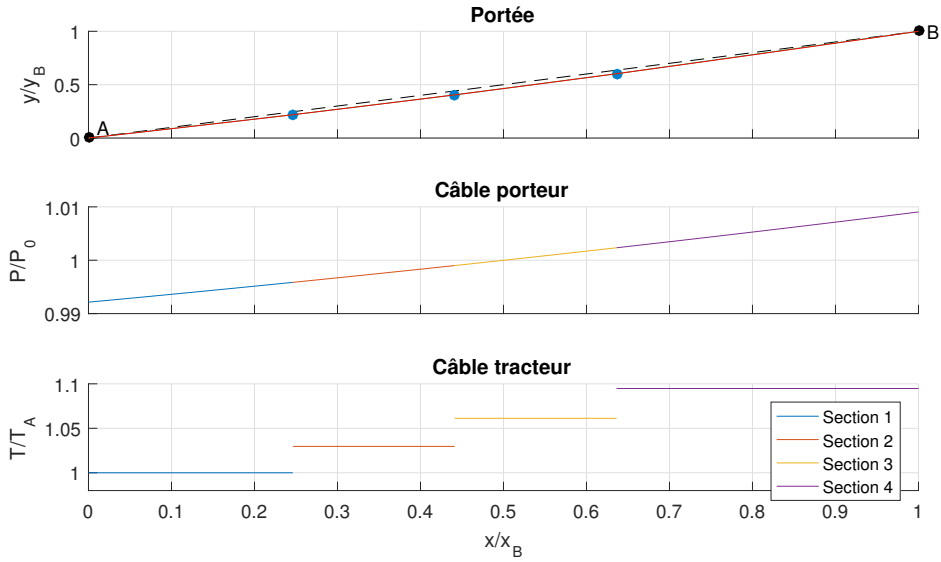


FIGURE 2 – Déformée statique et tensions des câbles d’une portée chargée avec 3 cabines.

3 Calcul dynamique

3.1 Câble pesant incliné

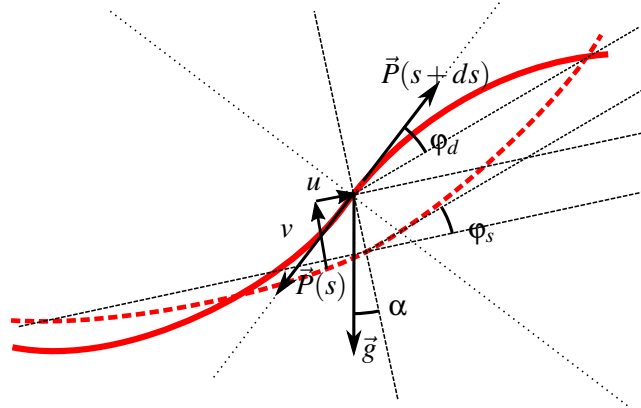


FIGURE 3 – Déformation dynamique du câble porteur (—) par rapport à sa déformée statique (- -).

Les équations dynamiques d’un câble incliné d’un angle α et soumis à son propre poids sont calculées dans [3] et [4] :

$$\mu \frac{\partial^2 u(s,t)}{\partial t^2} - \mu g \sin \alpha = \frac{\partial}{\partial s} \left[(P_s(s) + P_d(s,t)) \left(\frac{\partial u(t,s)}{\partial s} + \frac{dU(s)}{ds} \right) \right] \quad (13)$$

$$\mu \frac{\partial^2 v(s,t)}{\partial t^2} + \mu g \cos \alpha = \frac{\partial}{\partial s} \left[(P_s(s) + P_d(s,t)) \left(\frac{\partial v(t,s)}{\partial s} + \frac{dV(s)}{ds} \right) \right] \quad (14)$$

où u et v sont les déformations dans les sens respectivement longitudinal et transversal du câble porteur d’un point situé aux coordonnées (U, V) dans le repère lié à la portée (\vec{e}_u, \vec{e}_v) . P_s et P_d représentent respectivement les tensions statique et dynamique du câble porteur et s est l’abscisse curviligne le long du câble.

Si l’allongement global du câble porteur est négligé, son allongement local $\varepsilon(s,t)$ permet d’exprimer la tension dynamique. On utilise comme dans [1] l’expression de l’allongement de Green-Lagrange :

$$P_d(s,t) = ES\epsilon(s,t) = ES \left[\frac{dU(s)}{ds} \frac{\partial u(s,t)}{\partial s} + \frac{dV(s)}{ds} \frac{\partial v(s,t)}{\partial s} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u(s,t)}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial v(s,t)}{\partial s} \right)^2 \right) \right] \quad (15)$$

En remplaçant (15) dans les équations (13) et (14), en retirant les termes statiques et en négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à 2 on obtient :

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial^2 u(s,t)}{\partial t^2} &= \left(\frac{dP_s}{ds} + 2ES \frac{dU}{ds} \frac{d^2 U}{ds^2} \right) \frac{\partial u}{\partial s} + \left(P_s + ES \left(\frac{dU}{ds} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \\ &+ ES \left(\frac{dU}{ds} \frac{d^2 V}{ds^2} + \frac{dV}{ds} \frac{d^2 U}{ds^2} \right) \frac{\partial v}{\partial s} + ES \frac{dU}{ds} \frac{dV}{ds} \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial^2 v(s,t)}{\partial t^2} &= \left(\frac{dP_s}{ds} + 2ES \frac{dV}{ds} \frac{d^2 V}{ds^2} \right) \frac{\partial v}{\partial s} + \left(P_s + ES \left(\frac{dV}{ds} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \\ &+ ES \left(\frac{dU}{ds} \frac{d^2 V}{ds^2} + \frac{dV}{ds} \frac{d^2 U}{ds^2} \right) \frac{\partial u}{\partial s} + ES \frac{dU}{ds} \frac{dV}{ds} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \end{aligned} \quad (17)$$

3.2 Cabine

La cabine étant en contact glissant sur le câble porteur, son déplacement transversal est égal à celui du câble porteur $v_c = v(s_c)$. En revanche son déplacement longitudinal u_c lui est propre. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la cabine s'écrit :

$$M \left(\frac{\partial^2 u_c}{\partial t^2} \vec{e}_u + \frac{\partial^2 v_c}{\partial t^2} \vec{e}_v \right) = M \vec{g} + \vec{T}_c + T_{c+1} \vec{e}_u + \vec{N} + \vec{F}_{\text{ext}} \quad (18)$$

La tension T_c de la portion c du câble tracteur est exprimée en fonction de la tension statique du câble tracteur T_{sc} et de la longueur de la portion l_{sc} de la façon suivante :

$$T_c = T_{sc} + \frac{E_T S_T}{l_{sc}} (\cos \theta_c (u_c - u_{c-1}) + \sin \theta_c (w_c - w_{c-1})) \quad (19)$$

En simplifiant et en linéarisant ces équations on obtient :

$$\begin{aligned} M_c \frac{\partial^2 u_c}{\partial t^2} &= f_{uc} + P_s(s_c) \left(\frac{\partial u(s_c^+, t)}{\partial s} - \frac{\partial u(s_c^-, t)}{\partial s} \right) \\ &+ ES \left(\frac{dU(s_c^-)}{ds} \frac{\partial u(s_c^-, t)}{\partial s} + \frac{dV(s_c^-)}{ds} \frac{\partial v(s_c^-, t)}{\partial s} \right) \left(\frac{dU(s_c^+)}{ds} - \frac{dU(s_c^-)}{ds} \right) \\ &- (u_c - u_{c-1}) k_{uc} - (u_c - u_{c+1}) k_{u(c+1)} \\ &- (v(s_c) - v(s_{c-1})) k_{uvc} - (v(s_c) - v(s_{c+1})) k_{uv(c+1)} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} M_c \frac{\partial^2 v_c}{\partial t^2} &= f_{vc} + P_s(s_c) \left(\frac{\partial v(s_c^+, t)}{\partial s} - \frac{\partial v(s_c^-, t)}{\partial s} \right) \\ &+ ES \left(\frac{dU(s_c^-)}{ds} \frac{\partial u(s_c^-, t)}{\partial s} + \frac{dV(s_c^-)}{ds} \frac{\partial v(s_c^-, t)}{\partial s} \right) \left(\frac{dV(s_c^+)}{ds} - \frac{dV(s_c^-)}{ds} \right) \\ &- (u_c - u_{c-1}) k_{uvc} - (u_c - u_{c+1}) k_{uv(c+1)} \\ &- (v(s_c) - v(s_{c-1})) k_{vc} - (v(s_c) - v(s_{c+1})) k_{v(c+1)} \end{aligned} \quad (21)$$

Les raideurs k sont obtenues en projetant les tensions T_c et T_{c+1} sur \vec{e}_u et \vec{e}_v .

3.3 Calcul des modes du système

On cherche ici à exprimer les déplacements X de la structure entière à l'aide une base modale. À partir des équations (16) et (17) et en considérant les conditions aux limites (20) et (21), on calcule numériquement les N premiers modes propres libres φ_i du système.

$$X(t) = \sum_{i=1}^N q_i(t)\varphi_i(s) \quad (22)$$

En discrétisant spatialement le câble porteur, on peut exprimer l'équation (22) sous forme matricielle en désignant la matrice de la base modale par Φ :

$$X = \Phi q \quad (23)$$

Sur la figure 4, les fréquences des 10 premiers modes de la portée sont tracés en fonction de l'avancement de 3 cabines espacées de $0,2L$. Les fréquences sont adimensionnées par rapport à f_0 la fréquence du premier mode de la portée sans cabine.

Les oscillations observées sont dues à la position relative d'une cabine sur un nœud ou sur un ventre de la déformée du câble. Si la cabine se situe sur un ventre, le déplacement de sa masse aura tendance à réduire la fréquence du mode. À l'inverse, si elle se trouve sur un nœud, sa participation à la déformation du câble sera nulle.

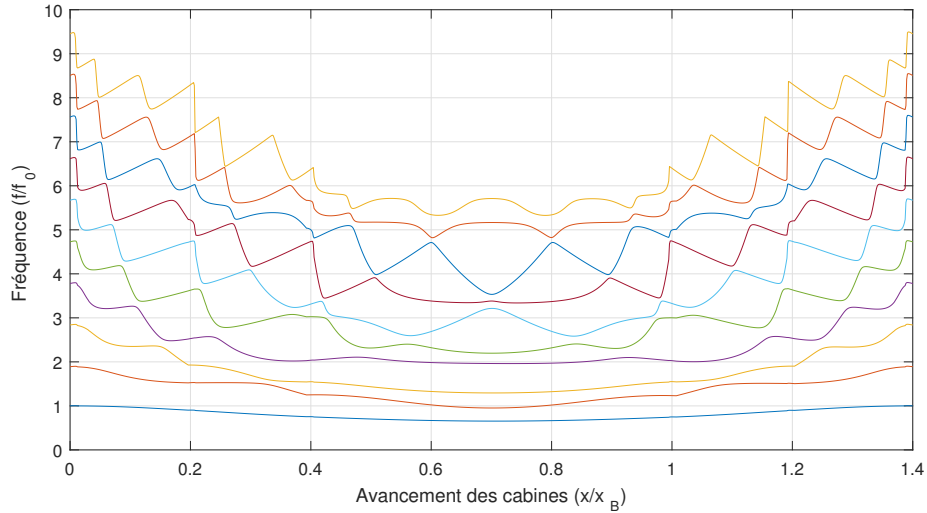


FIGURE 4 – Fréquence des 10 premiers modes de la portée.

3.4 Expression matricielle

L'équation dynamique du système peut être écrite sous forme matricielle de la façon suivante :

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = F \quad (24)$$

Les termes de la matrice de masse M et de matrice de raideur K sont donnés par :

$$M_{ij} = \int_0^L \mu [h_{ui}(s)h_{uj}(s) + h_{vi}(s)h_{vj}(s)] ds + \sum_{c=1}^n M [h_{vi}(s_c)h_{vj}(s_c) + h_{ci}h_{cj}] \quad (25)$$

$$K_{ij} = \int_0^L P(s) \left[\frac{dh_{ui}(s)}{ds} \frac{dh_{uj}(s)}{ds} + \frac{dh_{vi}(s)}{ds} \frac{dh_{vj}(s)}{ds} \right] ds + k_{Tij} \quad (26)$$

Le terme k_{Tij} regroupe les termes dépendant des déplacements h_{ci} et $h_{vi}(s_c)$ ainsi que des raideurs k liées au câble tracteur. On choisit d'utiliser un amortissement de Rayleigh. La matrice C s'exprime alors comme une combinaison linéaire de M et K :

$$C = a_m M + a_k K \quad (27)$$

La force modale F est calculée grâce à base modale Φ :

$$F = \Phi^T [f_u \quad f_v \quad f_{u_c}]^T \quad (28)$$

3.5 Calcul transitoire

A chaque pas d'avancement de durée Δt , un calcul transitoire est effectué sur la base modale associée. L'équation dynamique matricielle au pas p s'écrit :

$$M_p \ddot{q}_p + C_p \dot{q}_p + K_p q_p = F_p \quad (29)$$

Les conditions initiales du calcul transitoire p sont issues de l'état final du système au pas précédent $p-1$:

$$q_p(0) = \Phi_p^{-1} \Phi_{p-1} q_{p-1}(\Delta t) \quad (30)$$

4 Cas de charge

On se propose avec le modèle construit, d'appliquer au niveau des cabines des chargements liés à des perturbations dynamiques. Entre 60 et 65 m du point A, chaque cabine subit à tour de rôle une force de $-f_{\text{ext}}$ dans le sens transversal et de f_{ext} dans le sens longitudinal.

Les trajectoires de trois cabines traversant la portée dans le repère (\vec{e}_u, \vec{e}_v) sont tracées en figure 5. Le déplacement dynamique des cabines a été multiplié par un coefficient de 10 afin d'améliorer sa lisibilité.

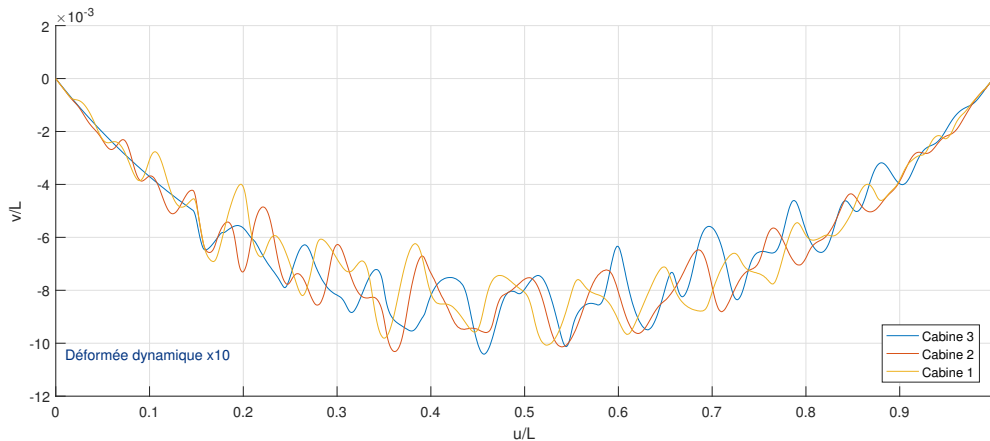


FIGURE 5 – Trajectoires de 3 cabines traversant une portée.

La figure 6 montre le rapport entre les accélérations γ et la force f_{ext} des cabines dans les sens longitudinal et transversal. On observe en premier lieu une synchronisation des accélérations transversales des cabines au cours du temps. Celle-ci se fait par l'intermédiaire du câble.

On remarque aussi que la fréquence des oscillations longitudinales la dernière cabine augmentent au fur et à mesure qu'elle se rapproche du point B. Ce phénomène est dû à l'augmentation de la raideur de la portion du câble tracteur entre la cabine et le point B, du fait de la diminution de sa longueur, conformément à l'équation 19. Cette augmentation de fréquence s'accompagne d'une augmentation du niveau d'accélération longitudinale sans apport d'énergie dans le système.

5 Conclusion

Dans cette étude, un modèle dynamique d'une portée d'un téléphérique bicâble a été construit. Celui-ci comprend un nombre quelconque de cabines se déplaçant à vitesse constante. Les hypothèses de

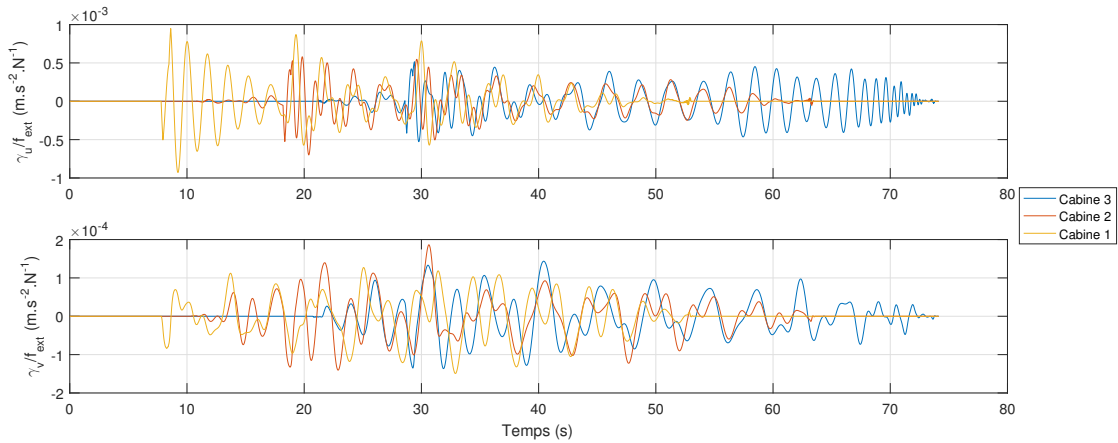


FIGURE 6 – Inertance (γ_u/f_{ext}) des cabines en fonction du temps.

l'avancement quasi-statique de cabines et des petits déplacements dynamiques ont permis de mettre en place une stratégie de calcul pas à pas. À chaque pas, la position statique est calculée de façon non-linéaire puis une base modale de l'ensemble du système est déterminée. Enfin un calcul transitoire permet de connaître le comportement dynamique transitoire de la portée consécutif à un chargement donné.

Le modèle pourrait être amélioré en représentant les cabines par des pendules pesants. Leur mouvement pourrait être couplé avec celui du câble. D'autre part, il serait intéressant de construire le modèle d'une ligne entière d'un téléphérique en introduisant les couplages entre les différentes portées et en gérant l'interaction des cabines avec les pylônes.

Le projet I2TC a été financé par le FUI, la Région Rhône-Alpes, la Région Ile-de-France et le Département de Paris en collaboration avec l'Ecole Centrale de Lyon, EIFFAGE, POMA, la RATP, CD VIA, The Vibrant Project, l'Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne et l'ENSTA.



Références

- [1] A. Berlioz, C.-H. Lamarque *A non-linear model for the dynamics of an inclined cable*, Journal of Sound and Vibration vol. 279, 619-639, 2005.
- [2] J.M.W. Brownjohn *Dynamics of an aerial cableway system*, Engineering Structures vol. 20, 826-836, 1998.
- [3] H. M. Irvine and T. K. Caughey, *The Linear Theory of Free Vibrations of a Suspended Cable*, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences vol. 341, 299-315, 1974.
- [4] H. M. Irvine, H. Max *Cable structures*, MIT Press, 1981.